Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Захаров, Представление Вейерштрасса для дискретных поверхностей в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 31–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:38:09

Представление Вейерштрасса для дискретных поверхностей в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$

© 2011. Д. В. ЗАХАРОВ

При помощи интегрируемого дискретного оператора Дирака построен дискретный аналог представления Вейерштрасса для гиперболических поверхностей в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$, параметризованных вдоль изотропных направлений. Соответствующие дискретные поверхности имеют изотропные ребра. Показано, что любая дискретная поверхность с изотропными ребрами, удовлетворяющая общему условию монотонности, допускает представление Вейерштрасса.

§1. Введение

Классическое представление Вейерштрасса ([3]–[4], [1]) сопоставляет произвольному решению уравнения Дирака

$$\partial_z \varphi = u\psi, \quad \partial_{\bar{z}} \psi = -\bar{u}\varphi, \quad u = \bar{u}, \quad (1.1)$$

конформно вложенную поверхность в $\mathbb{R}^3$, и любая конформно вложенная поверхность может быть задана при помощи представления Вейерштрасса. Средняя кривизна поверхности, вложенной таким образом, легко выражается через оператор Дирака (1.1), что делает представление Вейерштрасса удобным для изучения минимальных поверхностей и поверхностей постоянной средней кривизны. Кроме того, в последнее время представление Вейерштрасса активно изучается как возможный подход к доказательству гипотезы Виллмора (см. недавно опубликованный обзор [5]).

Существует много разновидностей представления Вейерштрасса. В частности, при помощи различных редукций обобщенного оператора Дирака

$$\partial_\xi \varphi = u\psi, \quad \partial_\eta \psi = v\varphi, \quad (1.2)$$

где ξ и η — комплексные переменные, а u и v — комплекснозначные функции, можно построить поверхности в трех- и четырехмерных евклидовых и псевдоевклидовых пространствах (см. [6]–[8]). Существует два основных вида редукций. Редукция $\eta = \bar{\xi}$ описывает конформно вложенные пространственноподобные поверхности в $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$, тогда как редукция $\eta = \bar{\eta}$, $\xi = \bar{\xi}$ описывает гиперболические поверхности в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ с изотропными линиями координат.

В работе [10] автор рассмотрел следующую интегрируемую дискретизацию обобщенного оператора Дирака (1.2):

$$T_2 \varphi = \alpha \varphi + \beta \psi, \quad T_1 \psi = \gamma \varphi + \delta \psi.$$

Здесь функции φ и ψ зависят от двух дискретных переменных, а T_1 и T_2 — операторы трансляций в этих переменных. Возникает естественный вопрос: можно ли воспользоваться этой дискретизацией для построения дискретного аналога представления Вейерштрасса?

В данной работе построена дискретизация представления Вейерштрасса для гиперболических поверхностей с изотропными линиями координат. Показано, что по решениям определенного дискретного оператора Дирака можно построить решетки в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ с изотропными ребрами. Также показано, что любая такая решетка, удовлетворяющая определенному условию монотонности, может быть представлена при помощи дискретизованного представления Вейерштрасса.

Как указано выше, представление Вейерштрасса конформно вложенных поверхностей в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах использует эллиптический оператор Дирака, содержащий ∂ и $\bar{\partial}$ вместо двух вещественных переменных. Прямой подход, используемый в данной работе, в этом случае не дает результатов. В монографии [9] описаны основные понятия и задачи дискретной дифференциальной геометрии.

Данная работа организована следующим образом. В §2 приведены известные формулы [6] представления Вейерштрасса для гиперболических поверхностей с изотропными линиями координат в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$. В §3 показано, что в каждом из трех случаев подходящая дискретизация оператора Дирака позволяет построить, используя те же формулы, что и в непрерывном случае, дискретные поверхности в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ с изотропными ребрами. Также показано, что любая дискретная поверхность может быть задана при помощи дискретизованного представления Вейерштрасса. В §4 показано, что при устремлении шага решетки к нулю в пределе восстанавливается непрерывная конструкция.

§2. Представление Вейерштрасса для гиперболических изотропных поверхностей

В этом параграфе приведены формулы представления Вейерштрасса для поверхностей с изотропными линиями координат в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$, найденные в [6].

Обозначим через $\mathbb{R}^{n,m}$ псевдоевклидово пространство размерности $n + m$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с сигнатурой (n, m) , и пусть S — поверхность. Вложение S в $\mathbb{R}^{n,m}$ назовем *гиперболическим*, если индуцированная метрика на S имеет сигнатуру $(1, 1)$. В случае когда $(n, m) = (2, 1)$, $(3, 1)$ или $(2, 2)$, любое такое вложение может быть локально описано при помощи решений различных редукций следующего уравнения Дирака:

$$\partial_y \varphi = p\psi, \quad \partial_x \psi = q\varphi, \quad (2.1)$$

где x и y — вещественные переменные. Опишем эти случаи по отдельности.

2.1. Случай $\mathbb{R}^{2,1}$. Предположим, что комплекснозначные функции φ, ψ заданы на некоторой односвязной области $U \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют уравнениям

$$\partial_y \varphi = p\psi, \quad \partial_x \psi = p\varphi, \quad \bar{p} = p. \quad (2.2)$$

Пусть P — точка в U . Тогда формулы

$$X^1(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2) dx + (\psi^2 + \bar{\psi}^2) dy],$$

$$X^2(Q) = \frac{i}{2} \int_P^Q [(\varphi^2 - \bar{\varphi}^2) dx + (\psi^2 - \bar{\psi}^2) dy],$$

$$X^3(Q) = \int_P^Q [\varphi \bar{\varphi} dx + \psi \bar{\psi} dy]$$

задают вложение $\vec{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, причем индуцированная метрика на U имеет сигнатуру $(+, -)$ и, кроме того, направления $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются изотропными, т.е.

$$\left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \right\rangle = 0.$$

С другой стороны, любая гиперболическая поверхность в $\mathbb{R}^{2,1}$ локально допускает такое представление.

2.2. Случай $\mathbb{R}^{3,1}$. Предположим, что комплекснозначные функции φ_i , ψ_i , $i = 1, 2$, заданы на некоторой односвязной области $U \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют уравнениям

$$\partial_y \varphi_i = p \psi_i, \quad \partial_x \psi_i = \bar{p} \varphi_i. \quad (2.3)$$

Пусть P — точка в U . Тогда формулы

$$X^1(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2) dy],$$

$$X^2(Q) = \frac{i}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \varphi_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) dy],$$

$$X^3(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_1 - \varphi_2 \bar{\varphi}_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_1 - \psi_2 \bar{\psi}_2) dy],$$

$$X^4(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \bar{\varphi}_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2) dy]$$

задают вложение $\vec{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, причем индуцированная метрика на U имеет сигнатуру $(+, -)$ и, кроме того, направления $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются изотропными. С другой стороны, любая гиперболическая поверхность в $\mathbb{R}^{3,1}$ локально допускает такое представление.

2.3. Случай $\mathbb{R}^{2,2}$. Предположим, что комплекснозначные функции φ_i , ψ_i , $i = 1, 2$, заданы на некоторой односвязной области $U \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют уравнениям

$$\partial_y \varphi_1 = p \psi_1, \quad \partial_x \psi_1 = q \varphi_1, \quad \partial_y \varphi_2 = q \psi_2, \quad \partial_x \psi_2 = p \varphi_2, \quad \bar{p} = p, \quad \bar{q} = q. \quad (2.4)$$

Пусть P — точка в U . Тогда формулы

$$X^1(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \varphi_2 + \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) dx + (\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) dy],$$

$$X^2(Q) = \frac{i}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \varphi_2 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) dx + (\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) dy],$$

$$X^3(Q) = \frac{1}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2) dy],$$

$$X^4(Q) = \frac{i}{2} \int_P^Q [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \varphi_2) dx + (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) dy]$$

задают вложение $\vec{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$, причем индуцированная метрика на U имеет сигнатуру $(+, -)$ и, кроме того, направления $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются изотропными. С другой стороны, любая гиперболическая поверхность в $\mathbb{R}^{2,2}$ локально допускает такое представление.

§3. Изотропные дискретные поверхности

Как было показано в предыдущем параграфе, решения определенных редукций уравнения Дирака (2.1) позволяют построить гиперболические вложения поверхностей в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ с изотропными линиями координат. В работе [10] автор рассмотрел дискретизацию спектральных данных, связанных с обобщенным оператором Дирака (1.2), и получил следующую дискретную систему, которую можно рассматривать как обобщенный дискретный оператор Дирака:

$$T_2 \varphi = \alpha \varphi + \beta \psi, \quad T_1 \psi = \gamma \varphi + \delta \psi. \quad (3.1)$$

Здесь φ и ψ — функции дискретных переменных $n, m \in \mathbb{Z}^2$, а T_1 и T_2 — операторы сдвига в этих переменных. Рассматривая симметрии спектральных данных, аналогичные тем, которые возникают при редукции обобщенного оператора Дирака (1.2) к стандартному (1.1), автор нашел следующую редукцию оператора (3.1):

$$T_2 \varphi = \alpha \varphi + \beta \psi, \quad T_1 \psi = \beta \varphi + \alpha \psi, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1.$$

В этом параграфе мы покажем, как при помощи аналогичных редукций обобщенного дискретного оператора Дирака (3.1) можно построить, используя те же формулы, что и в дифференциальном случае, дискретные поверхности в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ с изотропными гранями.

Дискретной поверхностью в $\mathbb{R}^{n,m}$ называется отображение $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$. *Ребрами* этой дискретной поверхности называются векторы

$$\vec{F}(n, m) = \vec{X}(n+1, m) - \vec{X}(n, m), \quad \vec{G}(n, m) = \vec{X}(n, m+1) - \vec{X}(n, m).$$

С другой стороны, пара функций $\vec{F}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$ и $\vec{G}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$ определяет (с точностью до трансляций) дискретную поверхность, если выполнено следующее условие согласованности:

$$\vec{F}(n, m+1) - \vec{F}(n, m) = \vec{G}(n+1, m) - \vec{G}(n, m). \quad (3.2)$$

Для поверхности, определенной по ее ребрам, мы используем следующее обозначение:

$$\vec{X} = \sum (\vec{F} \Delta_1 + \vec{G} \Delta_2).$$

Дискретная поверхность называется *невыврожденной*, если в каждой точке ее ребра линейно независимы. Дискретная поверхность в $\mathbb{R}^{n,m}$ называется *изотропной*, если все ее ребра являются светоподобными векторами:

$$\langle \vec{F}(n, m), \vec{F}(n, m) \rangle = 0, \quad \langle \vec{G}(n, m), \vec{G}(n, m) \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Главный результат данной работы состоит в том, что изотропные дискретные поверхности в $\mathbb{R}^{2,1}$, $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$, удовлетворяющие определенному условию монотонности, описываются решениями дискретного уравнения Дирака.

3.1. Случай $\mathbb{R}^{2,1}$.

Предложение 1. *Предположим, что функции φ , ψ удовлетворяют следующему дискретному уравнению Дирака:*

$$T_2\varphi = \alpha\varphi + \beta\psi, \quad T_1\psi = \beta\varphi + \alpha\psi, \quad \bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1. \quad (3.4)$$

Тогда формулы

$$X_1 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi^2 + \bar{\varphi}^2)\Delta_1 + (\psi^2 + \bar{\psi}^2)\Delta_2], \quad (3.5)$$

$$X_2 = \frac{i}{2} \sum [(\varphi^2 - \bar{\varphi}^2)\Delta_1 + (\psi^2 - \bar{\psi}^2)\Delta_2], \quad (3.6)$$

$$X_3 = \sum [\varphi\bar{\varphi}\Delta_1 + \psi\bar{\psi}\Delta_2] \quad (3.7)$$

определяют изотропную дискретную поверхность $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$. С другой стороны, если невырожденная изотропная дискретная поверхность $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ удовлетворяет условию монотонности

$$X_3(n+1, m) - X_3(n, m) > 0, \quad X_3(n, m+1) - X_3(n, m) > 0 \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.8)$$

то найдутся функции φ и ψ , удовлетворяющие уравнению (3.4) и уравнениям (3.5)–(3.7).

Доказательство. Предположим, что функции φ , ψ удовлетворяют (3.4). Прямое вычисление показывает, что заданные формулами (3.5)–(3.7) ребра являются изотропными, т. е. удовлетворяют (3.3), и удовлетворяют условию согласованности (3.2), а следовательно, определяют изотропную дискретную поверхность в $\mathbb{R}^{2,1}$.

С другой стороны, пусть $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ — изотропная дискретная поверхность, удовлетворяющая условию монотонности (3.8). Ребра поверхности удовлетворяют уравнениям

$$F_1^2 + F_2^2 = F_3^2, \quad G_1^2 + G_2^2 = G_3^2, \quad F_3 > 0, \quad G_3 > 0;$$

следовательно, найдутся функции φ и ψ , определенные с точностью до умножения на ± 1 , такие, что эти ребра задаются формулами (3.5)–(3.7). Из условия согласованности (3.2) следует, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$(T_2\varphi)^2 - \varphi^2 = (T_1\psi)^2 - \psi^2, \quad (3.9)$$

$$(T_2\varphi)(T_2\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} = (T_1\psi)(T_1\bar{\psi}) - \psi\bar{\psi}, \quad (3.10)$$

а из условия невырожденности следует, что

$$\varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi \neq 0.$$

Из этого соотношения вытекает существование единственных вещественно-значных функций α , β , γ и δ , удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$T_2\varphi = \alpha\varphi + \beta\psi, \quad T_1\psi = \gamma\varphi + \delta\psi.$$

Решая эту систему, мы получаем

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\bar{\psi}(T_2\varphi) - \psi(T_2\bar{\varphi})}{\varphi\psi - \bar{\varphi}\bar{\psi}}, & \beta &= \frac{\varphi(T_2\bar{\varphi}) - \bar{\varphi}(T_2\varphi)}{\varphi\psi - \bar{\varphi}\bar{\psi}}, \\ \gamma &= \frac{\bar{\psi}(T_1\psi) - \psi(T_1\bar{\psi})}{\varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi}, & \delta &= \frac{\varphi(T_1\bar{\psi}) - \bar{\varphi}(T_1\psi)}{\varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi}.\end{aligned}$$

Прямое вычисление при помощи формул (3.9)–(3.10) показывает, что

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1, \quad \delta^2 - \beta^2 = 1, \quad \alpha\beta = \gamma\delta.$$

Решая эту систему, получаем $\delta = \lambda\alpha$ и $\gamma = \lambda\beta$, где $\lambda = \pm 1$. Меняя, если это необходимо, знак функции ψ в каждой точке, можно положить $\lambda = 1$, так что функции φ и ψ удовлетворяют системе (3.4). Предложение доказано.

3.2. Случай $\mathbb{R}^{3,1}$.

Предложение 2. *Предположим, что функции $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, удовлетворяют следующему дискретному уравнению Дирака:*

$$T_2\varphi_i = \alpha\varphi_i + \beta\psi_i, \quad T_1\psi_i = \bar{\beta}\varphi_i + \bar{\alpha}\psi_i, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (3.11)$$

Тогда формулы

$$X_1 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi_1\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\varphi_2)\Delta_1 + (\psi_1\bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1\psi_2)\Delta_2], \quad (3.12)$$

$$X_2 = \frac{i}{2} \sum [(\varphi_1\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\varphi_2)\Delta_1 + (\psi_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\psi_2)\Delta_2], \quad (3.13)$$

$$X_3 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi_1\bar{\varphi}_1 - \varphi_2\bar{\varphi}_2)\Delta_1 + (\psi_1\bar{\psi}_1 - \psi_2\bar{\psi}_2)\Delta_2], \quad (3.14)$$

$$X_4 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi_1\bar{\varphi}_1 + \varphi_2\bar{\varphi}_2)\Delta_1 + (\psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2)\Delta_2] \quad (3.15)$$

определяют изотропную дискретную поверхность $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$. С другой стороны, если невырожденная изотропная дискретная поверхность $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ удовлетворяет условию монотонности

$$X_4(n+1, m) - X_4(n, m) > 0, \quad X_4(n, m+1) - X_4(n, m) > 0 \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.16)$$

то найдутся функции $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, удовлетворяющие уравнению (3.11) и уравнениям (3.12)–(3.15).

Доказательство. Предположим, что функции $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, удовлетворяют (3.11). Прямое вычисление показывает, что заданные формулами (3.12)–(3.15) ребра являются изотропными, т. е. удовлетворяют (3.3), и удовлетворяют условию согласованности (3.2), а следовательно, определяют изотропную дискретную поверхность в $\mathbb{R}^{3,1}$.

С другой стороны, пусть $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ — изотропная дискретная поверхность, удовлетворяющая условию монотонности (3.16). Ребра поверхности удовлетворяют уравнениям

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_4^2, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G_4^2, \quad F_4 > 0, \quad G_4 > 0;$$

следовательно, найдутся функции φ_i и ψ_i , где $i = 1, 2$, такие, что эти ребра задаются формулами (3.12)–(3.15). Эти функции определены с точностью до следующей локальной калибровочной эквивалентности:

$$\varphi_1 \rightarrow e^{i\zeta} \varphi_1, \quad \varphi_2 \rightarrow e^{i\zeta} \varphi_2, \quad \psi_1 \rightarrow e^{i\xi} \psi_1, \quad \psi_2 \rightarrow e^{i\xi} \varphi_2, \quad (3.17)$$

где ζ и ξ — вещественнозначные функции. Из условия согласованности (3.2) следует, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$(T_2\varphi_1)(T_2\bar{\varphi}_1) - \varphi_1\bar{\varphi}_1 = (T_1\psi_1)(T_1\bar{\psi}_1) - \psi_1\bar{\psi}_1, \quad (3.18)$$

$$(T_2\varphi_1)(T_2\bar{\varphi}_2) - \varphi_1\bar{\varphi}_2 = (T_1\psi_1)(T_1\bar{\psi}_2) - \psi_1\bar{\psi}_2, \quad (3.19)$$

$$(T_2\varphi_2)(T_2\bar{\varphi}_2) - \varphi_2\bar{\varphi}_2 = (T_1\psi_2)(T_1\bar{\psi}_2) - \psi_2\bar{\psi}_2, \quad (3.20)$$

а из условия невырожденности следует, что

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0.$$

Из этого соотношения вытекает существование единственных комплекснозначных функций α , β , γ и δ , удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$T_2\varphi_i = \alpha\varphi_i + \beta\psi_i, \quad T_1\psi_i = \gamma\varphi_i + \delta\psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Решая эту систему, мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\psi_2(T_2\varphi_1) - \psi_1(T_2\varphi_2)}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, & \beta &= \frac{\varphi_1(T_2\varphi_2) - \varphi_2(T_2\varphi_1)}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \\ \gamma &= \frac{\psi_2(T_1\psi_1) - \psi_1(T_1\psi_2)}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, & \delta &= \frac{\varphi_1(T_1\psi_2) - \varphi_2(T_1\psi_1)}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}. \end{aligned}$$

Прямое вычисление при помощи формул (3.18)–(3.20) показывает, что

$$\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} = 1, \quad \delta\bar{\delta} - \beta\bar{\beta} = 1, \quad \alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} = 0.$$

Решая эту систему, мы получаем $\delta = \lambda\bar{\alpha}$ и $\gamma = \lambda\bar{\beta}$, где $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Калибровочное преобразование (3.17) действует на λ следующим образом:

$$\lambda \rightarrow e^{i(\zeta+\xi-T_2\zeta-T_1\xi)}\lambda.$$

Значит, можно положить $\lambda = 1$. Таким образом, функции φ_i и ψ_i удовлетворяют системе (3.11). Предложение доказано.

Заметим, что случай $\mathbb{R}^{2,1}$ можно получить редукцией $\varphi_2 = \bar{\varphi}_1$, $\psi_2 = \bar{\psi}_1$.

3.3. Случай $\mathbb{R}^{2,2}$.

Предложение 3. *Предположим, что функции φ_i , ψ_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют следующему дискретному уравнению Дирака:*

$$\begin{aligned} T_2\varphi_1 &= \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1, & T_2\varphi_2 &= \delta\varphi_2 + \gamma\psi_2 \\ T_1\psi_1 &= \gamma\varphi_1 + \delta\psi_1, & T_1\psi_2 &= \beta\varphi_2 + \alpha\psi_2, \\ \bar{\alpha} &= \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\delta} = \delta, & \alpha\delta - \beta\gamma &= 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тогда формулы

$$X_1 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi_1 \varphi_2 + \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) \Delta_1 + (\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) \Delta_2], \quad (3.22)$$

$$X_2 = \frac{i}{2} \sum [(\varphi_1 \varphi_2 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) \Delta_1 + (\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) \Delta_2], \quad (3.23)$$

$$X_3 = \frac{1}{2} \sum [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1 \varphi_2) \Delta_1 + (\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2) \Delta_2], \quad (3.24)$$

$$X_4 = \frac{i}{2} \sum [(\varphi_1 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \varphi_2) \Delta_1 + (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) \Delta_2] \quad (3.25)$$

определяют изотропную дискретную поверхность $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$. С другой стороны, для любой невырожденной изотропной дискретной поверхности $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ найдутся функции $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, удовлетворяющие уравнению (3.21) и уравнениям (3.22)–(3.25).

Доказательство. Предположим, что функции $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, удовлетворяют (3.21). Прямое вычисление показывает, что заданные уравнениями (3.22)–(3.25) ребра являются изотропными, т. е. удовлетворяют (3.3), и удовлетворяют условию согласованности (3.2), а следовательно, определяют изотропную дискретную поверхность в $\mathbb{R}^{2,2}$.

С другой стороны, пусть $\vec{X}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ — изотропная дискретная поверхность. Ее ребра удовлетворяют уравнениям

$$F_1^2 + F_2^2 = F_3^2 + F_4^2, \quad G_1^2 + G_2^2 = G_3^2 + G_4^2; \quad (3.26)$$

следовательно, найдутся функции φ_i и ψ_i , где $i = 1, 2$, такие, что ребра заданы формулами (3.22)–(3.25). Эти функции определены с точностью до следующей локальной калибровочной эквивалентности:

$$\varphi_1 \rightarrow \mu \varphi_1, \quad \varphi_2 \rightarrow \mu^{-1} \varphi_2, \quad \psi_1 \rightarrow \nu \psi_1, \quad \psi_2 \rightarrow \nu^{-1} \psi_2, \quad (3.27)$$

где μ и ν — вещественнозначные функции. Из условия согласованности (3.2) следует, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$(T_2 \varphi_1)(T_2 \varphi_2) - \varphi_1 \varphi_2 = (T_1 \psi_1)(T_1 \psi_2) - \psi_1 \psi_2, \quad (3.28)$$

$$(T_2 \varphi_1)(T_2 \bar{\varphi}_2) - \varphi_1 \bar{\varphi}_2 = (T_1 \psi_1)(T_1 \bar{\psi}_2) - \psi_1 \bar{\psi}_2, \quad (3.29)$$

а из условия невырожденности следует, что

$$\varphi_1 \bar{\psi}_1 - \bar{\varphi}_1 \psi_1 \neq 0, \quad \varphi_2 \bar{\psi}_2 - \bar{\varphi}_2 \psi_2 \neq 0.$$

Из этих соотношений вытекает существование единственных вещественнозначных функций $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i , где $i = 1, 2$, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$T_2 \varphi_i = \alpha_i \varphi_i + \beta_i \psi_i, \quad T_1 \psi_i = \gamma_i \varphi_i + \delta_i \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Решая эту систему, мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\bar{\psi}_i(T_2 \varphi_i) - \psi_i(T_2 \bar{\varphi}_i)}{\varphi_i \bar{\psi}_i - \bar{\varphi}_i \psi_i}, & \beta_i &= \frac{\varphi_i(T_2 \bar{\varphi}_i) - \bar{\varphi}_i(T_2 \varphi_i)}{\varphi_i \bar{\psi}_i - \bar{\varphi}_i \psi_i}, \\ \gamma_i &= \frac{\bar{\psi}_i(T_1 \psi_i) - \psi_i(T_1 \bar{\psi}_i)}{\varphi_i \bar{\psi}_i - \bar{\varphi}_i \psi_i}, & \delta_i &= \frac{\varphi_i(T_1 \bar{\psi}_i) - \bar{\varphi}_i(T_1 \psi_i)}{\varphi_i \bar{\psi}_i - \bar{\varphi}_i \psi_i}. \end{aligned}$$

Прямое вычисление при помощи формул (3.28)–(3.29) показывает, что

$$\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 = 1, \quad \delta_1\delta_2 - \beta_1\beta_2 = 1, \quad \alpha_1\beta_2 - \gamma_1\delta_2 = 0, \quad \alpha_2\beta_1 - \gamma_2\delta_1 = 0.$$

Решая эту систему, мы получаем $\alpha_2 = \lambda\delta_1$, $\beta_2 = \lambda\gamma_1$, $\gamma_2 = \lambda\beta_1$ и $\delta_2 = \lambda\alpha_1$. Калибровочное преобразование (3.27) действует на λ следующим образом:

$$\lambda \rightarrow (T_2\mu)(T_1\nu)\mu^{-1}\nu^{-1}\lambda.$$

Значит, можно положить $\lambda = 1$. Таким образом, функции φ_i и ψ_i удовлетворяют системе (3.21). Предложение доказано.

§4. Непрерывный предел

В этом параграфе мы покажем, что в непрерывном пределе редукции (3.4), (3.11), (3.21) оператора Дирака (3.1) сходятся к их непрерывным аналогам.

Сначала рассмотрим оператор (3.4). Пусть h — шаг решетки, так что

$$\begin{aligned} \varphi(x, y+h) &= \alpha(x, y)\varphi(x, y) + \beta(x, y)\psi(x, y), \\ \psi(x+h, y) &= \beta(x, y)\varphi(x, y) + \alpha(x, y)\psi(x, y), \end{aligned}$$

где α и β вещественны, $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Полагая $\beta = hp$, получаем $\alpha = 1 + O(h^2)$. Рассматривая уравнение до членов порядка $O(h^2)$, получаем, что

$$\varphi + h\partial_y\varphi = \varphi + hp\psi + O(h^2), \quad \psi + h\partial_x\psi = hp\varphi + \psi + O(h^2),$$

так что в пределе $h \rightarrow 0$ приходим к уравнению (2.2).

Аналогичным образом, вводя для оператора (3.11) шаг решетки h , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y+h) &= \alpha(x, y)\varphi(x, y) + \beta(x, y)\psi(x, y), \\ \psi(x+h, y) &= \bar{\beta}(x, y)\varphi(x, y) + \bar{\alpha}(x, y)\psi(x, y), \end{aligned}$$

где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Полагая $\beta = hp$, получаем $\alpha = 1 + O(h^2)$. Рассматривая уравнение до членов порядка $O(h^2)$, получаем

$$\varphi + h\partial_y\varphi = \varphi + hp\psi + O(h^2), \quad \psi + h\partial_x\psi = h\bar{p}\varphi + \psi + O(h^2),$$

так что в пределе $h \rightarrow 0$ приходим к уравнению (2.3).

Вводя для оператора (3.21) шаг решетки h , получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y+h) &= \alpha(x, y)\varphi_1(x, y) + \beta(x, y)\psi_1(x, y), \\ \psi_1(x+h, y) &= \gamma(x, y)\varphi_1(x, y) + \delta(x, y)\psi_1(x, y), \\ \varphi_2(x, y+h) &= \delta(x, y)\varphi_1(x, y) + \gamma(x, y)\psi_1(x, y), \\ \psi_2(x+h, y) &= \beta(x, y)\varphi_1(x, y) + \alpha(x, y)\psi_1(x, y). \end{aligned}$$

Используя остаточную калибровочную симметрию (3.27), положим $\alpha = \delta$. Таким образом, если шаг решетки равен h , то, полагая $\beta = hp$, $\gamma = hq$, мы получаем $\alpha = \delta = 1 + O(h^2)$. Рассматривая уравнение до членов порядка $O(h^2)$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 + h\partial_y\varphi_1 &= \varphi_1 + hp\psi_1 + O(h^2), & \psi_1 + h\partial_x\psi_1 &= hq\varphi_1 + \psi_1 + O(h^2), \\ \varphi_1 + h\partial_y\varphi_1 &= \varphi_1 + hq\psi_1 + O(h^2), & \psi_1 + h\partial_x\psi_1 &= hp\varphi_1 + \psi_1 + O(h^2), \end{aligned}$$

так что в пределе $h \rightarrow 0$ приходим к уравнению (2.4).

Благодарности. Данная работа выполнена в Техническом университете в Берлине в июне 2009 г. при финансовой поддержке исследовательской группы «Полиэдрические поверхности». Автор выражает благодарность И. М. Кричеву за постановку задачи, а также Б. Г. Конопельченко и А. И. Бобенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. G. Konopelchenko, I. A. Taimanov, *Generalized Weierstrass formulae, soliton equations and Willmore surfaces. I. Tori of revolution and the mKDV equation* <http://arxiv.org/abs/dg-ga/9506011>.
- [2] И. А. Тайманов, *Конечнозонные решения модифицированных уравнений Веселова–Новикова, их спектральные свойства и приложения*, Сиб. матем. журн., **40**:6 (1999), 1352–1363.
- [3] И. А. Тайманов, *Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$* , Функц. анализ и его прил., **32**:4 (1998), 49–62.
- [4] B. G. Konopelchenko, *Induced surfaces and their integrable dynamics*, Stud. Appl. Math., **96**:1 (1996), 9–52.
- [5] И. А. Тайманов, *Двумерный оператор Дурака и теория поверхностей*, УМН, **61** (2006), 85–164.
- [6] B. G. Konopelchenko, G. Landolfi, *Induced surfaces and their integrable dynamics. II. Generalized Weierstrass representations in 4D spaces and deformations via DS hierarchy*, Stud. Appl. Math., **104**:2 (2000), 129–169.
- [7] B. G. Konopelchenko, G. Landolfi, *Generalized Weierstrass representation for surfaces in multidimensional Riemann spaces*, J. Geom. Phys., **29**:4 (1999), 319–333; <http://arxiv.org/abs/math/9804144>.
- [8] B. G. Konopelchenko, *Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, Ann. Global Anal. Geom., **18**:1 (2000), 61–74.
- [9] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Discrete differential geometry. Integrable structure*, Graduate Studies in Math., vol. 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [10] D. V. Zakharov, *A discrete analogue of the modified Novikov–Veselov hierarchy*, <http://arxiv.org/abs/0904.3728>.

Колумбийский университет, США
e-mail: zakharov@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
14 сентября 2009 г.