Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, Функторы и диадические множества конечного типа, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:49:50

Поскольку любое дополняемое подпространство пространства степенных рядов бесконечного типа обладает свойствами D_1 и Ω , из теоремы 1 и результатов статьи [7] выводится следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. *В пространстве степенных рядов бесконечного типа каждое ядерное дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно некоторому координатному подпространству.*

Из теоремы 2 непосредственно следует положительное решение проблемы существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве пространства s быстро убывающих последовательностей.

Из теоремы 1 и результатов статьи [7] легко также вывести, что ядерное пространство Фреше E , обладающее свойствами D_1 и Ω , изоморфно заданному пространству $F = l_2[\exp rb_n]$ тогда и только тогда, когда линейные размерности пространств E и F совпадают или равны их диаметральные размерности (определение см., например, в [4, 6, 7]). Аналогичным образом можно сформулировать и условие существования изоморфизма ядерного пространства Фреше со свойствами D_1 и Ω на дополняемое подпространство заданного пространства степенных рядов бесконечного типа в терминах определяющих эти пространства матриц Кёте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dubinsky E., Vogt D. *Studia Math.*, **93**, No. 1, 71–85 (1989).
2. Aytuna A., Krone J., Terzioglu T. *Math. Ann.*, **283**, 193–202 (1989).
3. Krone J. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105**, No. 2, 350–355 (1989).
4. Драгилев М. М. *Матем. сб.*, **58**, № 2, 153–173 (1965).
5. Zahariuta V. P. *Studia Math.*, **46**, 201–221 (1973).
6. Vogt D., Wagner M. J. *Studia Math.*, **70**, 63–80.
7. Кондаков В. П. *Studia Math.*, **76**, 137–151 (1983).

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.

УДК 512.2

Функторы и диадические множества конечного типа

© 2000. Л. А. НАЗАРОВА, А. В. РОЙТЕР

К 85-летию И. М. Гельфанда

Пусть $\Phi: \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ — аддитивный функтор и $\mathcal{C} \subset \text{Mod } k$, где k — кольцо. Построим категорию Φ^Δ следующим образом: $\text{Ob } \Phi^\Delta = \{(A, B, \varphi) \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \varphi \in \Phi(A, B)\}$, $\Phi^\Delta((A_1, B_1, \varphi_1), (A_2, B_2, \varphi_2)) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathcal{A}(A_1, A_2), \beta \in \mathcal{B}(B_1, B_2), \varphi_1 \Phi(1_{A_1}, \beta) = \Phi(\alpha, 1_{B_2}) \varphi_2\}$ (см. [1]). Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ и $\Phi = \text{Hom}_{\mathcal{C}}$, то Φ^Δ есть категория $\mathcal{C}^{\Delta_1}$ морфизмов категории $\mathcal{C}$ (см. [2]). Если $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ — аддитивный функтор (от одной переменной), то построим $\Phi_F: \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod } k$, $\Phi_F(C, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, F(B))$, и положим $F^\nabla = (\Phi_F)^\Delta$. В дальнейшем $\mathcal{C}$ — это категория $\text{mod } k$ конечно порожденных k -модулей.

Существование этих категорий очевидна. В частности, к F^∇ сводится описание представлений конечномерных алгебр [3].

Будем далее считать, что k — алгебраически замкнутое поле, все категории являются k -категориями, а функторы являются k -функторами [1], все пространства $\text{Hom}(A, B)$ конечномерны и во всех категориях идемпотенты расщепляемы. Объект A *неразложим*, если $\text{Hom}(A, A)$ содержит ровно 2 идемпотента ($1_A \neq 0_A$). *Спектроид* $\text{Sp } \mathcal{A}$ категории $\mathcal{A}$ — это ее полная подкатегория, содержащая по одному представителю из каждого неразложимого изокласса.

Пусть $\text{ind } \Phi = \text{Ob}(\text{Sp } \Phi^\Delta)$, $\text{ind } F = \text{ind } \Phi_F$, Φ^* — такая полная подкатегория категории Φ^Δ , что $\text{Ob}(\Phi^*) = \{(A, B, \varphi) \mid A \in \text{Sp } \mathcal{A}, B \in \text{Sp } \mathcal{B}, \varphi \neq 0\}$ (все ее объекты неразложимы), $\text{ind}^*(\Phi) = \text{Ob}(\text{Sp } \Phi^*)$ и $\text{ind}^*(F) = \text{ind}^*(\Phi_F)$.

k -подкатегорию $\mathcal{V}$ в $\text{mod } k$ назовем *вектроидом*, если $\text{Sp } \mathcal{V} = \mathcal{V}$. Пусть $\oplus \mathcal{V}$ — аддитивное замыкание категории $\mathcal{V}$ [1], $F_{\mathcal{V}}$ — естественное вложение категории $\oplus \mathcal{V}$ в $\text{mod } k$, $\text{Rep } \mathcal{V} = (F_{\mathcal{V}})^\nabla$, $\text{ind } \mathcal{V} = \text{ind } F_{\mathcal{V}}$ и $S_{\mathcal{V}} = \text{ind}^*(F_{\mathcal{V}})$.

Будем далее считать, что $|\text{Ob } \mathcal{V}| < \infty$. Говорят, что $\mathcal{V}$ (соответственно Φ , F) — вектроид (соответственно функтор) *конечного типа*, если $|\text{ind } \mathcal{V}| < \infty$ ($|\text{ind } \Phi| < \infty$, $|\text{ind } F| < \infty$).

Введем на $S_{\mathcal{V}}$ структуру *пополненного биупорядоченного множества* (б.у.м.), т.е. множества с отношениями (частичного) порядка $\leq$, эквивалентности $\approx$ и отношением $\triangleleft$, такими, что

- (a) из $s \triangleleft t$ следует $s \leq t$;
- (b) из $s \triangleleft t \leq u$ или $s \leq t \triangleleft u$ следует $s \triangleleft u$;
- (c) $s \triangleleft s$ равносильно равенству $r(s) = 1$, где $r(s)$ — порядок класса эквивалентности s .

Пусть $a \in A$, $b \in B$, $A, B \in \mathcal{V}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$ — соответствующие элементы в $S_{\mathcal{V}}$ ($\bar{a} = (k, A, \varphi_a)$, $1_k \varphi_a = a$). Положим $\bar{a} \leq \bar{b}$, если $a\psi = b$ для некоторого $\psi \in \mathcal{V}(A, B)$, $\bar{a} \triangleleft \bar{b}$, если $a\psi = b$ и $\text{rank}(\psi) = 1$ ($\psi \in \text{mor } \mathcal{V} \subset \text{mor}(\text{mod } k)$), и $\bar{a} \approx \bar{b}$, если $A = B$.

Для произвольного модуля M через $w(M)$ обозначим максимальный порядок антицепи в частично упорядоченном множестве его подмодулей ($w(M) \leq \infty$). Положим $w(\mathcal{V}) = \sup_{A \in \mathcal{V}} w(A_{\text{Hom}(A, A)})$. Легко проверяется, что $|S_{\mathcal{V}}| < \infty$, если и только если $w(\mathcal{V}) \leq 1$. Морфизм ψ в $\mathcal{V}$ назовем *аддитивно неразложимым*, если $\psi \neq \psi_1 + \psi_2$, где $\text{rank}(\psi_1) < \text{rank}(\psi)$, $\text{rank}(\psi_2) < \text{rank}(\psi)$. Рангом вектроида $\mathcal{V}$ назовем $\sup\{\text{rank } \psi\}$, где ψ — аддитивно неразложимый необратимый морфизм. Положим $\dim \mathcal{V} = \sup_{A \in \mathcal{V}} \dim A$.

По существу хорошо известно (см. [1, 4]) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathcal{V}$ — вектроид конечного типа, то

- I. $w(\mathcal{V}) \leq 1$;
- II. $\text{rank } \mathcal{V} \leq 2$;
- III. $\dim \mathcal{V} \leq 3$.

Вектроид $\mathcal{V}$ и множество $\text{ind } \mathcal{V}$, вообще говоря, не определяются пополненным б.у.м. $S_{\mathcal{V}}$. Однако при выполнении условий I–III изоморфизм между $S_{\mathcal{V}_1}$ и $S_{\mathcal{V}_2}$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между $\text{ind } \mathcal{V}_1$ и $\text{ind } \mathcal{V}_2$ (см. [4]).

Если $\dim \mathcal{V} = 1$, то отношение $\approx$ тривиально, $\triangleleft$ совпадает с $\leq$ и $\text{Rep } \mathcal{V}$ — категория представлений частично упорядоченного множества $S = S_{\mathcal{V}}$ (см. [5, 6]).

Пусть S — пополненное б.у.м. Если $a \in S$ и $r(a) = 2$, то обозначим через a^* такой (единственный) элемент, что $a^* \approx a$, $a^* \neq a$. Будем писать $a \Rightarrow b$,

если $a < b$, $a \not\leq b$ (такую пару назовем *ребром*). (Конечное) пополненное б.у.м. D назовем *диадическим*, если

- (d) $r(s) \leq 2$ при $s \in S$;
- (e) из $a \Rightarrow b$ следует $a^* \Rightarrow b^*$;
- (f) a и a^* сравнимы.

Если $w(\mathcal{V}) = 1$, а $\dim \mathcal{V} \leq 2$, то $S_{\mathcal{V}}$ — диадическое множество, и каждому диадическому множеству D соответствует вектроид $\mathcal{V}$, такой, что $D \simeq S_{\mathcal{V}}$. Будем говорить, что D имеет *конечный тип*, если $|\text{ind } \mathcal{V}| < \infty$ при $D = S_{\mathcal{V}}$.

При $X \subset D$ положим $\overset{\circ}{X} = \{x \in X \mid r(x) = 2\}$. При $X, Y \subset D$ через $X^{\times}(Y)$ обозначим совокупность элементов $x \in X$, несравнимых со всеми $y \in Y$. Запись $T = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n \subset D$ означает, что $T_i^{\times}(T_j) = T_i$ (при $i \neq j$).

Построим в D ряд $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_i \subseteq \dots$, где $D_0 = D \setminus \overset{\circ}{D}$, $\overset{\circ}{D}_i = \{d \mid D^{\times}(d^*) \subset D_{i-1}\}$. Цепью в D назовем множество $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, где $z_i < z_{i+1}$ ($n \geq 0$, $1 \leq i < n$), а *антицепью* — множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, где $a_i \not\leq a_j$ при $i \neq j$ и, если $a_i < d < a_j$, то $d \notin A$ ($1 \leq i, j \leq n$).

Введем на элементах и подмножествах из D функцию $\langle \rangle$ (если $X \subset D$, то $\langle X \rangle = \sum_{x \in X} \langle x \rangle$) последовательно на $D_0, D_1, \dots$. При $d \in D_0$ полагаем $\langle d \rangle = 1$.

Пусть $d \in \overset{\circ}{D}_i$; тогда $D^{\times}(d^*) \subset D_{i-1}$, где $\langle \rangle$ уже определена; если $D^{\times}(d^*)$ — цепь, то положим $\langle d \rangle = \langle D^{\times}(d^*) \rangle + 2$; если $D^{\times}(d^*)$ не цепь, то $\langle d \rangle = \infty$. Если $d \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$, то $\langle d \rangle = \infty$.

Положим $\widehat{D} = \{d \in D \mid \langle d \rangle < \infty\}$. Введем числовую функцию $\mu(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$. Для ребра $\varphi = (a \Rightarrow b)$ положим $\varphi^* = (a^* \Rightarrow b^*)$, $L(\varphi) = \{d \mid a < d < b\}$, $l(\varphi) = |L(\varphi)|$ и $eq(\varphi) = \langle \widehat{D}^{\times}(a, b) \rangle$.

ТЕОРЕМА. D имеет конечный тип, если и только если выполняются следующие условия:

- (1) $|A| + |A'| < 4$, где A — любая антицепь, $A' = \{a \in A \mid A^{\times}(a) = A \setminus \{a\}\} \cap (D \setminus \widehat{D})$;
- (2) $\mu(\langle Z_1 \rangle - 1, \langle Z_2 \rangle - 1, \langle Z_3 \rangle - 1) < 4$ при $Z_1 \sqcup Z_2 \sqcup Z_3 \subset \widehat{D}$;
- (3) $\langle Z \rangle < 4$ при $Z \sqcup N \subset \widehat{D}$, $N = \{a, b, c, d \mid a < b, c < b, c < d\}$;
- (4) $\mu(eq(\varphi, X), eq^*(\varphi, X), l(\varphi)) < 4$. Здесь $\varphi = (a \Rightarrow b)$ — произвольное ребро, $X = Z^- \sqcup Z^+ \sqcup Z^e \subset \widehat{D}$, $Z^e \subset D^{\times}(\varphi)$, $Z^- \subset D^{\times}(L(\varphi) \cup \{b\})$, $Z^+ \subset D^{\times}(L(\varphi) \cup \{a\})$, $eq(\varphi, X) = \langle Z^e \rangle$ и $eq^*(\varphi, X) = eq(\varphi^*) + \max\{0, \min\{\langle Z^- \rangle, 2 - l(\varphi)\}\} + \max\{0, \min\{\langle Z^+ \rangle, 2 - l(\varphi)\}\}$;
- (5) если $l(\varphi) = 1$, $eq(\varphi) = 3$, то $\widehat{D}^{\times}(\{a\} \cup \widehat{D}^{\times}(\varphi)) = \widehat{D}^{\times}(\{b\} \cup \widehat{D}^{\times}(\varphi)) = \emptyset$ ($\varphi = \{a \Rightarrow b\}$);
- (6) если $\{a, b, c, d \mid a \Rightarrow b, c \Rightarrow d, a < d\} \subset D$ (и других сравнений в $\{a, b, c, d\}$ нет), то $\widehat{D}^{\times}(a, d)$ — цепь и $\mu(|\widehat{D}^{\times}(a, d)|, eq(a^*, b^*), eq(c^*, d^*)) = 0$.

Формулы (1)–(3) дают критерий конечности типа вектроида $\mathcal{V}$ при $\text{rank } \mathcal{V} = 1$, $\dim \mathcal{V} = 2$, а при $\dim \mathcal{V} = 1$ превращаются (с заменой $\langle \rangle$ на $|\cdot|$, $A' = \emptyset$, $\widehat{D} = D$) в критерий Клейнера [6]. В другой форме критерий конечности типа диадических множеств (= бинволютивных частично упорядоченных множеств) доказан в [7–9]. Для триадических множеств (т.е. при $\dim \mathcal{V} = 3$) аналогичные формулы выписаны в [10], где доказана их необходимость для конечности типа; вместе с предложением и теоремой данной статьи они дают явный критерий конечности типа функтора от одной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. Encyclopaedia Math. Sci., Vol. 73, Algebra 8, Springer-Verlag, N.Y., 1992. 2. *Басс Х.* Алгебраическая К-теория. Мир, М., 1973. 3. *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D.* Укр. матем. ж., **45**, № 3, 313–352 (1993). 4. *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергеечук В. В.* Укр. матем. ж., **47**, № 11, 5–31 (1995). 5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Зап. науч. семинаров ЛОМИ, **28**, 5–31 (1972). 6. *Клейнер М. М.* Зап. науч. семинаров ЛОМИ, **28**, 32–41 (1972). 7. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств. Препринт 91.34., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1991. 8. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств, II. Препринт 94.2, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1994. 9. *Roiter A. V., Belousov K. I., Nazarova L. A.* Proceedings of ICRA VIII, Canadian Math. Society Conference Proc., vol. 24, 1998, pp. 61–77. 10. *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Алгебра и анализ, **9**, вып. 4, 3–27 (1997).

Институт математики НАН Украины

Поступило в редакцию
11 сентября 1998 г.

УДК 517.51

Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега

© 2000. Е. Д. НУРСУЛТАНОВ, Н. Т. ТЛЕУХАНОВА

Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\mathbb{T}^n$ есть n -мерный тор. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$, если для произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx}$ найдется функция f_λ из $L_q(\mathbb{T}^n)$, такая, что ее ряд Фурье совпадает с рядом $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx}$ и оператор T_λ , $T_\lambda f = f_\lambda$, является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$. Множество $\mathbf{m}_p^q$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} = \|T_\lambda\|_{L_p \rightarrow L_q}.$$

В данной работе получены нижние и верхние оценки для нормы мультипликаторов из $\mathbf{m}_p^q$. Методы доказательства опираются на результаты работ [1, 2], где доказаны новые неравенства, отражающие зависимость метрических свойств функции и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе.

Хорошо известен следующий результат Хёрмандера [3]: при $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ и $1/r = 1/p - 1/q$ имеет место вложение $l_{r\infty}(\mathbb{Z}^n) \hookrightarrow \mathbf{m}_p^q$, т. е.

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \leq c \sup_{e \in E} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \left| \sum_{m \in e} \lambda_m \right|.$$