Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, О линейных селекторах выпуклых
многозначных отображений, *Функци. анализ и его
прил.*, 2011, том 45, выпуск 1, 56–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3030>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:37:14

О линейных селекторах выпуклых многозначных отображений*

© 2011. В. Ю. ПРОТАСОВ

В работе исследуются непрерывные субаддитивные многозначные отображения, ставящие в соответствие точкам пространства X выпуклые компакты пространства Y . Субаддитивность отображения φ означает, что $\varphi(x_1 + x_2) \subset \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$. Охарактеризованы пары локально выпуклых пространств (X, Y) , для которых любое такое отображение имеет линейный селектор, т. е. оператор $A: X \rightarrow Y$, такой, что $Ax \in \varphi(x)$, $x \in X$. Доказано существование линейного селектора для класса субаддитивных отображений, порожденных приращениями непрерывных функций. Данный результат применен к задаче о липшицевой устойчивости линейных операторов в банаховых пространствах.

§1. Введение

Мы рассматриваем многозначные отображения, ставящие в соответствие точкам пространства X выпуклые компакты пространства Y . Везде далее X и Y — линейные локально выпуклые пространства, $\mathcal{M}(Y)$ — множество непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y . На $\mathcal{M}(Y)$ вводится частичный порядок: $K_1 \leq K_2$, если $K_1 \subset K_2$, и $K_1 < K_2$, если $K_1 \subset \text{int } K_2$. Рассматриваются непрерывные отображения $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, причем топология на $\mathcal{M}(Y)$ определяется стандартным образом, через опорные функционалы: базу составляют всевозможные конечные пересечения множеств вида $\mathcal{O}_{\alpha, z} = \{K \in \mathcal{M}(Y) \mid \sup_{y \in K} \langle z, y \rangle < \alpha\}$, $z \in Y^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Отображение φ называется *субаддитивным*, если $\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, т. е. образ суммы содержится в сумме (по Минковскому) образов. Отображение φ *выпукло*, если $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $t \in [0, 1]$, и *положительно однородно* (в дальнейшем мы для краткости будем называть такое отображение *однородным*, опуская слово «положительно»), если $\varphi(tx) = t\varphi(x)$, $t \in [0, +\infty)$. Субаддитивное однородное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ будем, следуя [1], называть *веером*. В частности, веер является выпуклым отображением.

Простейший пример субаддитивного отображения: $\varphi(x) = \{Ax\}$, где A — линейный непрерывный оператор. Если $\mathcal{A}$ — компактное выпуклое множество линейных операторов, то отображение $\varphi(x) = \{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ также субаддитивно. Для любой липшицевой функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображение $\varphi(x) = \mathcal{Q}(x)$, где $\mathcal{Q}(x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\{f(z+x) - f(z) \mid z \in \mathbb{R}^n\}$, является субаддитивным. В отличие от предыдущего примера, это отображение, вообще говоря, не является веером. Важный для приложений к теории экстремума пример веера — предпроизводная липшицевой функции [1]. Субаддитивные и выпуклые отображения широко изучались в литературе и нашли

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00208 и 10-01-00293 и гранта Фонда «Династия» (программа поддержки молодых докторов наук, 2010 г.).

множество применений в теории функций, нелинейном анализе, алгебре, математической экономике и т.д. (см. обзор [2], соответствующие главы в обзорах [3], [4], а также [1] и библиографию в этих работах).

Один из наиболее важных вопросов для субаддитивных отображений — наличие у них *линейного селектора*, т.е. линейного оператора A (вообще говоря, не обязательно непрерывного), для которого $Ax \in \varphi(x)$, $x \in X$. Заметим, что наличие непрерывного однородного селектора (без свойства аддитивности) вытекает из результатов классической работы Майкла [5]. Верно ли, что любое субаддитивное отображение имеет линейный селектор? Для известных примеров из приложений (в том числе упомянутых выше) ответ утвердительный. Существование линейных селекторов было доказано для многих классов отображений. В частности, *аддитивные* отображения φ , т.е. отображения, обладающие свойством $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, всегда имеют линейный селектор [6]. В литературе подробно изучался класс *супераддитивных* отображений, которые, в некотором смысле, противоположны субаддитивным. Такие отображения характеризуются свойством $\varphi(x_1 + x_2) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$. Любое супераддитивное отображение имеет линейный селектор, это было доказано в [7] при условии однородности, которое затем было снято в [8], [9]. Для субаддитивных отображений ответ в общем случае получен не был, хотя наличие линейных селекторов было установлено для ряда частных случаев, важных в приложениях (см. [1], [10], а также [11], [12], где изучались сходные задачи). В данной работе мы показываем, что для общих субаддитивных отображений ответ отрицательный. Если размерность каждого из пространств X , Y больше 1, то существует веер $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, не имеющий линейного селектора (теорема 1). Лишь в случаях $\dim X = 1$ и $\dim Y = 1$ линейный селектор всегда существует. Аналогичный результат верен и для аффинных селекторов выпуклых отображений (теорема 2). Эти результаты сформулированы в §2 и доказаны в §3. Затем мы рассматриваем один класс субаддитивных отображений, порожденных приращениями равномерно непрерывных функций, и доказываем, что для этого класса линейный селектор всегда существует (теорема 3). В §5 этот результат применен для решения задачи о липшицевой устойчивости линейных операторов в банаховых пространствах (теорема 4).

§2. Основные результаты

В качестве первого шага мы покажем, что любое субаддитивное отображение мажорирует некоторый веер. Напомним, что здесь и далее рассматриваются только непрерывные отображения.

Предложение 1. *Для любого субаддитивного отображения $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ существует веер $\tilde{\varphi}: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, такой, что $\tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$, $x \in X$.*

Доказательство отнесено в приложение. Любой селектор отображения $\tilde{\varphi}$ является также селектором для φ . Поэтому при доказательстве существования линейных селекторов можно ограничиться однородными отображениями φ . Любое субаддитивное отображение, таким образом, можно считать однородным и, следовательно, выпуклым.

Следующий результат устанавливает, для каких пространств X и Y любое субаддитивное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ имеет линейный селектор.

Теорема 1. Если $\dim X = 1$ либо $\dim Y = 1$, то любое субаддитивное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ имеет непрерывный линейный селектор. Если размерность обоих пространств больше 1, то существует веер $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, не имеющий линейного селектора.

Таким образом, в отличие от супераддитивных отображений, субаддитивные могут не иметь линейных селекторов. Аналогичная задача ставится для выпуклых отображений. В этом случае речь идет не о линейных, а об аффинных селекторах. Если выпуклое отображение однозначно, т.е. все множества $\varphi(x)$ одноточечны, то φ аффинно и само является аффинным селектором. В общем случае для выпуклых отображений верен результат, аналогичный теореме 1:

Теорема 2. Если $\dim Y = 1$, то любое выпуклое отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ имеет непрерывный аффинный селектор. Если $\dim Y \geq 2$, то существует выпуклое отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, не имеющее аффинного селектора.

Аналогичные результаты верны для отображений $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, где $\Omega \subset X$ — выпуклая область (см. замечание 2 ниже).

§3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательства обеих теорем будут разбиты на несколько шагов и вспомогательных утверждений. Для построения отображения, не имеющего линейного (или аффинного) селектора, мы определим так называемые дискретно-выпуклые отображения, заданные на конечном множестве точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$. Их значения выбираются так, чтобы не существовало соответствующего селектора. Затем доказывается, что кусочно линейные продолжения таких отображений на все пространство X являются выпуклыми отображениями.

Доказательство теоремы 1. *Случай $\dim X = 1$.* Положим $X = \mathbb{R}$. В силу предложения 1 можно считать, что φ — веер. В частности, $\varphi(0) = \{0\}$. В силу субаддитивности $0 \in \varphi(-1) + \varphi(1)$, поэтому существует $b \in \varphi(1)$, для которого $-b \in \varphi(-1)$. Тогда отображение $A: x \mapsto xb$ является линейным селектором отображения φ .

Случай $\dim Y = 1$. Множество $\varphi(x)$ — отрезок прямой, обозначим его через $[\varphi_-(x), \varphi_+(x)]$. Согласно предложению 1, считаем φ веером. В частности, φ выпукло. Тогда функция φ_+ выпукла, а функция φ_- вогнута. Надграфик $P = \{(x, t) \in X \oplus \mathbb{R} \mid t \geq \varphi_+(x)\}$ функции φ_+ и подграфик $Q = \{(x, t) \in X \oplus \mathbb{R} \mid t \leq \varphi_-(x)\}$ функции φ_- — выпуклые множества. Из непрерывности отображения φ следует, что множество P имеет непустую внутренность. По первой теореме отделимости [13, с. 38] существует ненулевой линейный непрерывный функционал $(x^*, s) \in (X \oplus \mathbb{R})^*$, для которого

$$\inf_{(t,x) \in P} [(x^*, x) + st] \geq \sup_{(t,x) \in Q} [(x^*, x) + st].$$

Обозначим левую часть этого неравенства через a . Случай $s \leq 0$ невозможен, иначе $a = -\infty$; следовательно, $s > 0$. Для любого x имеем $(x^*, x) + s\varphi_+(x) \geq a$ и $(x^*, x) + s\varphi_-(x) \leq a$. Тогда для аффинной функции $A_\varphi(x) = a/s - (x^*, x)/s$ при любом x мы имеем $A_\varphi(x) \in [\varphi_-(x), \varphi_+(x)]$. Поэтому A_φ — аффинный селектор. Так как φ — веер, то $\varphi(0) = \{0\}$, а тогда $A_\varphi(0) = 0$. Следовательно, оператор A_φ линейный.

Случай $\dim X \geq 2$, $\dim Y \geq 2$. Достаточно построить веер $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, не имеющий линейного селектора. Если таковой существует, то для любых пространств X, Y можно выделить двумерные подпространства $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, разложить X в прямую сумму $X = X_1 \oplus L$, где $L \subset X$ — замкнутое подпространство коразмерности 2, и рассмотреть соответствующий проектор $P: X \rightarrow X_1$. Тогда отображение $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(Px)$ является веером. Поскольку $\tilde{\varphi}|_{X_1} = \varphi$, веер $\tilde{\varphi}$ не имеет линейного селектора.

Для построения отображения $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ понадобится следующая лемма, доказательство которой приведено в приложении. Рассмотрим произвольное разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ лучами $r_1, \dots, r_n$, выходящими из начала координат. Лучи расположены последовательно, угол между соседними лучами меньше $\pi/2$. На каждом луче r_i выберем направляющий вектор x_i и обозначим через α_i, β_i положительные числа, для которых $x_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$; при этом полагаем $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$. Функция φ со значениями в $\mathcal{M}(Y)$, заданная в точках $x_i, i = 1, \dots, n$, называется *дискретно-выпуклой*, если $\varphi(x_i) \leq \alpha_i \varphi(x_{i-1}) + \beta_i \varphi(x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$. *Кусочно линейное продолжение* данной функции на $\mathbb{R}^2$, которое мы будем обозначать тем же символом φ , — это однородная функция $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, определенная в каждом угле между соседними лучами r_i и r_{i+1} по формуле $\varphi(sx_i + tx_{i+1}) = s\varphi(x_i) + t\varphi(x_{i+1})$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 1. *Кусочно линейное продолжение дискретно-выпуклой функции φ со значениями в $\mathcal{M}(Y)$, заданной в точках $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$, является веером.*

Пусть $x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{R}^2$ — вершины правильного шестиугольника с центром в начале координат; порожденные ими лучи $r_i = \{tx_i \mid t \in [0, +\infty)\}$ разбивают плоскость на шесть частей. Пусть также $D_i, i = 1, \dots, 6$, — главные диагонали правильного 12-угольника с центром в начале координат, взятые последовательно. Функция, ставящая в соответствие точке x_i отрезок D_i , дискретно-выпукла. В самом деле, $x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$, откуда $\alpha_i = \beta_i = 1$; при этом $D_{i-1} + D_{i+1}$ — ромб, содержащий внутри отрезок D_i , значит, $D_i < D_{i-1} + D_{i+1}$. Немного пошевелим отрезки D_i , получив отрезки $\tilde{D}_i$. Поскольку все неравенства строгие, дискретная выпуклость функции при этом сохранится. По лемме 1 кусочно линейное продолжение функции $\varphi: x_i \rightarrow \tilde{D}_i, i = 1, \dots, 6$, выпукло. Предположим, что A — линейный селектор отображения φ . Так как $x_i = -x_{i+3}$, то $Ax_i = -Ax_{i+3}$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому для данного i точка Ax_i определяется однозначно как пересечение отрезка $\tilde{D}_i$ с отрезком $-\tilde{D}_{i+3}$. Можно пошевелить отрезок $\tilde{D}_2$ так, чтобы $Ax_2 \neq Ax_1 + Ax_3$. Поскольку $x_2 = x_1 + x_3$, это противоречит линейности оператора A . $\square$

Замечание 1. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ дано конечное множество точек $T = \{x_1, \dots, x_n\}$, удовлетворяющее условиям леммы 1 (т.е. все x_i отличны от нуля, лучи $r_i = \{tx_i \mid t \in [0, +\infty)\}$, $i = 1, \dots, n$, расположены на плоскости последовательно, угол между соседними лучами меньше $\pi/2$), а также задано выпуклое однородное отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}(Y)$. Тогда, как несложно показать, ограничение функции F на множество T является дискретно-выпуклым. Согласно лемме 1, верно и обратное: любое дискретно-выпуклое отображение, заданное на T , продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ до выпуклого однородного отображения. Таким образом, дискретно-выпуклые отображения суть ограничения на множество T всевозможных выпуклых однородных отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathcal{M}(Y)$.

Доказательство теоремы 2. *Случай $\dim Y = 1$.* Доказательство дословно совпадает с доказательством аналогичного случая в теореме 1.

Случай $\dim Y \geq 2$. Достаточно построить выпуклое отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, не имеющее аффинного селектора. Обобщение на произвольные пространства X, Y осуществляется так же, как в теореме 1. Нам понадобятся две леммы, доказательства которых приведены в приложении. Первая лемма является аналогом леммы 1 для прямой. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_1 < \dots < x_n = b$ и положим $T = \{x_i\}_{i=1}^n$. Обозначим через α_i, β_i положительные числа, для которых $x_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_{i+1}$ и $\alpha_i + \beta_i = 1, i = 2, \dots, n-1$. Функция $\varphi: T \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ дискретно-выпукла, если $\varphi(x_i) \leq \alpha_i \varphi(x_{i-1}) + \beta_i \varphi(x_{i+1})$ для всех $i = 2, \dots, n-1$. Кусочно линейное продолжение данной функции на весь отрезок $[a, b]$ определяется на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, как $\varphi(tx_i + (1-t)x_{i+1}) = t\varphi(x_i) + (1-t)\varphi(x_{i+1})$, $t \in [0, 1]$.

Лемма 2. *Кусочно линейное продолжение дискретно-выпуклой функции $\varphi: T \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ является выпуклой функцией на отрезке $[a, b]$.*

Лемма 3. *В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны пять параллельных плоскостей. Тогда для пяти прямых общего положения, лежащих в этих плоскостях (по одной в каждой плоскости), не существует прямой, их пересекающей.*

Зададим на плоскости 5 точек $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (4/7, 1/7)$, $a_3 = (1/3, 1/3)$, $a_4 = (1/7, 4/7)$, $a_5 = (0, 1)$ и 5 соответствующих отрезков $A_i = [-a_i, a_i]$. Несложно проверить, что $A_i < (A_{i-1} + A_{i+1})/2$, $i = 2, 3, 4$. Согласно лемме 3, существуют сколь угодно близкие к ним отрезки $\tilde{A}_i$, такие, что 5 отрезков $(\tilde{A}_i, (i-1)/4) \subset \mathbb{R}^3$ не могут быть пересечены одной прямой. Тогда для точек $T = \{x_i\}_{i=1, \dots, 5}$, $x_i = (i-1)/4$, отрезка $[0, 1]$ функция $\varphi(x_i) = \tilde{A}_i$ дискретно-выпукла, следовательно, ее кусочно линейное продолжение $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ — выпуклая функция (лемма 2), для которой не существует аффинного селектора. Продолжив функцию φ с отрезка $[0, 1]$ на $\mathbb{R}$ по формулам $\varphi(x) = (1-4x)\varphi(0)$ при $x \leq 0$ и $\varphi(x) = (4x-3)\varphi(1)$ при $x \geq 1$, получаем выпуклое отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, не имеющее аффинного селектора. $\square$

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 полностью проходит и для отображений $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, где $\Omega \subset X$ — произвольная открытая выпуклая область. В самом деле, взяв любые точки $a, b \in \Omega$ и положив $x_i = \frac{5-i}{4}a + \frac{i-1}{4}b$, $i = 1, \dots, 5$, определяем дискретно-выпуклое отображение φ в точках $\{x_i\}$, затем продолжаем его на отрезок $[a, b]$ и далее на Ω . Получаем, что при $\dim Y \geq 2$ существует выпуклое отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ без аффинного селектора. Аналогичным образом теорема 1 распространяется на отображения $\varphi: C \rightarrow \mathcal{M}(Y)$, где $C \subset X$ — произвольный выпуклый конус.

§ 4. О селекторах отображений, порожденных непрерывными функциями

В этом параграфе будет исследован специальный класс субаддитивных отображений, порожденных приращениями непрерывных функций на банаховых пространствах. Линейные селекторы таких отображений применяются в задачах об устойчивости линейных операторов, о чем пойдет речь в § 5.

Рассмотрим равномерно непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ между банаховыми пространствами X и Y , причем Y — пространство, сопряженное к некоторому нормированному пространству (будем в дальнейшем для краткости писать просто «сопряженное пространство»). Далее норму в X будем обозначать через $|\cdot|$, а норму в Y — через $\|\cdot\|$. Для произвольного $u \in X$ обозначим через $\mathcal{Q}(u) = \mathcal{Q}_f(u)$ замыкание (в $*$ -слабой топологии Y) выпуклой оболочки множества $\{f(x+u) - f(x) \mid x \in X\}$. Таким образом, $\mathcal{Q}_f(u)$ является $*$ -слабым замыканием выпуклой оболочки всевозможных приращений функции f , соответствующих приращениям u аргумента. Далее индекс f будем опускать. Из равномерной непрерывности отображения f следует, что все $\mathcal{Q}(u)$ ограничены и, следовательно, компактны в $*$ -слабой топологии.

Если отображение f аффинное, то все множества $\mathcal{Q}(x)$ одноточечны и отображение $\varphi(x) = \mathcal{Q}(x)$ линейно. Для произвольного f отображение φ многозначное и субаддитивное. Оказывается, оно всегда имеет непрерывный линейный селектор.

Теорема 3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — равномерно непрерывное отображение банаховых пространств X и Y , причем Y — сопряженное пространство. Тогда найдется линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow Y$, для которого $Ax \in \mathcal{Q}(x)$, $x \in X$.

Как будет показано ниже, ни одно из условий этой теоремы нельзя ослабить. Вначале мы докажем ее для случая конечномерного пространства X . Затем распространим ее на любое банахово пространство X , применив следующий результат из работы [15], который мы приводим с измененными обозначениями:

Теорема А. Пусть Y — топологическое пространство, X — множество, $\mathcal{T}$ — направленное семейство подмножеств множества X , т.е. для любых $L_1, L_2 \in \mathcal{T}$ найдется множество $L \in \mathcal{T}$, содержащее L_1 и L_2 . Пусть для каждого $L \in \mathcal{T}$ дано непустое компактное подмножество P_L отображений из L в Y . При этом для любых $L_1, L_2 \in \mathcal{T}$ из $L_1 \subset L_2$, $F \in P_{L_2}$ следует, что $F|_{L_1} \in P_{L_1}$.

Тогда если $\bigcup_{L \in \mathcal{T}} L = X$, то существует отображение $\tilde{F}: X \rightarrow Y$, такое, что $\tilde{F}|_L \in P_L$ для любого $L \in \mathcal{T}$.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала случай $\dim X < \infty$. Для $n \geq 3$ обозначим через B_n и $\tilde{B}_n$ шары в X с центром в нуле и радиусами n^2 и $n^2 - 2n$ соответственно. Положим

$$f_n(u) = \frac{1}{\nu(B_n)} \int_{B_n} [f(x+u) - f(x)] dx,$$

$$h_n(a, u) = \frac{1}{\nu(B_n)} \int_{\tilde{B}_n} [f(x+a+u) - f(x+a)] dx$$

(используется интеграл Римана–Бохнера [14], $\nu(M)$ — объем множества M). Ясно, что $f_n(u) \in \mathcal{Q}(u)$. Для любых $v, u \in X$, таких, что $|u|, |v| < 1$, и для любого $x \in \tilde{B}_n$ все три точки $x+u$, $x+v$ и $x+u+v$ лежат в B_n . Если $\omega(t) = \sup_{|x-y| \leq t} \|f(x) - f(y)\|$ — модуль непрерывности отображения f , то $\|\int_{\Omega} [f(x+z) - f(x)] dx\| \leq \nu(\Omega)\omega(|z|)$. Используя эту оценку сначала для $\Omega = B_n \setminus \tilde{B}_n$, $z = u$, затем для $\Omega = B_n \setminus (u + \tilde{B}_n)$, $z = v$, и, наконец, для $\Omega = B_n \setminus \tilde{B}_n$,

$z = u + v$, получим

$$\|f_n(u) - h_n(0, u)\| \leq \left(1 - \frac{\nu(\tilde{B}_n)}{\nu(B_n)}\right) \omega(|u|),$$

$$\|f_n(v) - h_n(u, v)\| \leq \left(1 - \frac{\nu(\tilde{B}_n)}{\nu(B_n)}\right) \omega(|v|),$$

$$\|f_n(u + v) - h_n(0, u + v)\| \leq \left(1 - \frac{\nu(\tilde{B}_n)}{\nu(B_n)}\right) \omega(|u| + |v|).$$

Поскольку $h_n(0, u + v) = h_n(0, u) + h_n(u, v)$, по неравенству треугольника получаем

$$\|f_n(u) + f_n(v) - f_n(u + v)\| \leq \left(1 - \frac{\nu(\tilde{B}_n)}{\nu(B_n)}\right) \cdot 2(\omega(|u|) + \omega(|v|)).$$

Поскольку $\nu(\tilde{B}_n)/\nu(B_n) \rightarrow 1$, для любых u, v имеем $\|f_n(u) + f_n(v) - f_n(u + v)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из непрерывности следует, что $\|\lambda f_n(u) - f_n(\lambda u)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. По индукции получаем, что для любого базиса $\{e_i\}$ пространства X

$$\left\| \sum_i x_i f_n(e_i) - f_n\left(\sum_i x_i e_i\right) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для любого элемента $z \in Z$, где $Z^* = Y$, имеем

$$\sum_i x_i(z, f_n(e_i)) - (z, f_n(x)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $x = \sum_i x_i e_i$. Поскольку $f_n(e_i) \in \mathcal{Q}(e_i)$ при всех n и множество $\mathcal{Q}(e_i)$ является *-слабо компактным, последовательность $\{f_n(e_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет *-слабый частичный предел $g_i \in \mathcal{Q}(e_i)$. Значит, для любого $z \in Z$ и любого $i = 1, \dots, \dim X$ найдется подпоследовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, для которой $(z, f_{n_k}(e_i)) \rightarrow (z, g_i)$, $k \rightarrow \infty$. В силу конечности множества индексов i при каждом z существует единая подпоследовательность для всех i . Определим теперь линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ формулой $Ax = \sum_i x_i g_i$, где $x = \sum_i x_i e_i$. Применяя (1) к подпоследовательности $\{n_k\}$, получаем, что $(z, Ax) - (z, f_{n_k}(x)) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Поскольку такая подпоследовательность найдется для любого $z \in Z$, элемент Ax является *-слабым частичным пределом последовательности $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{Q}(x)$. Следовательно, $Ax \in \mathcal{Q}(x)$, что завершает доказательство в случае $\dim X < \infty$.

Пусть теперь X — произвольное банахово пространство. Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ всех его линейных конечномерных подпространств. Для любого $L \in \mathcal{T}$ обозначим через P_L множество линейных операторов $A_L: L \rightarrow Y$, для которых $Ax \in \mathcal{Q}(x)$, $x \in L$. Мы показали, что P_L непусто для любого $L \in \mathcal{T}$. Более того, P_L компактно в *-слабой топологии, поскольку любой оператор $A_L \in P_L$ определяется конечным множеством $\{A_L e_i\}$, где $\{e_i\}$ — базис пространства L . Наконец, если $L_1 \subset L_2$, то $A_{L_2}|_{L_1} \in P_{L_1}$ для любого $A_{L_2} \in P_{L_2}$. Поэтому множества P_L удовлетворяют условиям теоремы А. Применяя эту теорему, заключаем, что существует оператор $A: X \rightarrow Y$, такой, что $A|_L \in P_L$ для всех $L \in \mathcal{T}$. Он линеен, поскольку является таковым на любом конечномерном подпространстве. Его непрерывность следует из равномерной непрерывности отображения f . Так как $\|f(x + u) - f(x)\| \leq \omega(|u|)$, $u \in X$, то множество $\mathcal{Q}(u)$

лежит в шаре радиуса $\omega(|u|)$, а значит, $\|Au\| \leq \omega(|u|)$. При $|u| = 1$ получаем $\|A\| \leq \omega(1)$. $\square$

Замечание 3. Сравнение теорем 1 и 3, показывает, в частности, что не всякое субаддитивное отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ можно представить в виде $\varphi(x) = \mathcal{Q}_f(x)$ для подходящей функции f .

Замечание 4. Равномерная непрерывность отображения f в теореме 3 существенна. Например, для числовой функции $f(x) = x^3$ имеем $\mathcal{Q}(x) = [x^3/4, +\infty)$, и тогда для любого линейного селектора было бы $\|Ax\| \geq x^3/4$, что невозможно.

Выпуклость всех множеств $\mathcal{Q}$ также существенна. В качестве простейшего примера можно взять функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$, и соответствующее многозначное отображение $\varphi(x) = \{f(a+x) - f(a), a \in \mathbb{R}\}$. Оно субаддитивно, каждый образ $\varphi(x)$ — окружность. Если существует линейный селектор A , то $A \equiv 0$, поскольку все множества $\varphi(x)$ содержатся в круге радиуса 2 с центром в нуле. Следовательно, $0 \in \varphi(x)$ для любого x , что неверно, например, $0 \notin \varphi(\pi)$. Таким образом, при определении множеств $\mathcal{Q}(x)$ нельзя отказаться от взятия выпуклой оболочки.

Условие сопряженности пространства Y также нельзя опустить, как показывает следующий пример.

Пример 1. Теорема 3 может не выполняться, если пространство Y не является сопряженным либо если *-слабое замыкание в определении множеств $\mathcal{Q}(u)$ заменить слабым замыканием (которое в силу выпуклости множеств совпадает с обычным замыканием). Покажем, что существует липшицева функция $f: \mathbb{R} \rightarrow l_1$, у которой соответствующее многозначное отображение $\varphi(x) = \mathcal{Q}(x)$ (определяемое с помощью обычного замыкания выпуклой оболочки) не имеет линейного селектора.

Определим систему функций одной переменной $\{g_k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ следующим образом:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases}$$

$$g_k(x) = \begin{cases} 2x - 2^{k-1}, & x \in [2^{k-2}, 2^{k-1}], \\ 2^k - x, & x \in [2^{k-1}, 2^k], \\ 0, & x \notin [2^{k-2}, 2^k], \end{cases} \quad k \geq 2.$$

Все функции g_k финитны, кусочно линейны и липшицевы с константой 2. При этом сумма $\sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(x)$ равна x при $x \geq 0$ и равна 0 при $x \leq 0$. При каждом x данная сумма содержит не более двух ненулевых слагаемых. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow l_1$, заданное следующим образом: $f(x) = y = (y_1, y_2, \dots) \in l_1$, где $y_i = -g_i(-x) + g_i(x)$. При каждом x элемент $f(x)$ имеет не более двух ненулевых координат, поэтому f липшицево с константой 4. Следовательно, если существует линейный селектор отображения $\varphi(x) = \mathcal{Q}(x)$, то он непрерывен: $\|A\| \leq 4$. Для любого i модуль i -й координаты элемента $f(a+x) - f(a)$ равномерно ограничен по всем $a \in \mathbb{R}$ некоторой константой m_i . Поэтому $\sup_{z \in \mathcal{Q}(x)} |z_i| \leq m_i$, а значит, $|(Ax)_i| \leq m_i$ при всех x . Следовательно, $(Ax)_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$, и, таким образом, $A \equiv 0$. С другой стороны, полагая $e = (1, 1, \dots) \in l_\infty$, получаем

$(e, f(x)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i(x) = x$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $(e, z) = x$ для любого $z \in \mathcal{Q}(x)$. В частности, $(e, Ax) = x$, что невозможно при $x \neq 0$.

§5. Липшицева устойчивость линейных операторов

Задачи, связанные с устойчивостью линейных отображений, восходят к Уламу и Хайерсу ([16], [17]). Они широко изучались в литературе (см. подробный обзор [18]). Опишем кратко общую постановку. Существует много критериев линейности отображения $f: X \rightarrow Y$. Например, так называемое уравнение Коши $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, характеризует линейность непрерывных отображений. Предположим, что какой-либо из этих критериев выполнен приближенно, с некоторой погрешностью. Можно ли утверждать, что существует линейное отображение, достаточно близкое к f ? Под устойчивостью понимается следующее свойство: каждое «почти линейное» отображение может быть аппроксимировано линейным. Мы применим теорему 3 о линейных селекторах к решению задачи о липшицевой устойчивости.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — произвольное отображение банаховых пространств X и Y . Для пары различных точек $x_1, x_2 \in X$ положим $\{x_1, x_2\}_f = (f(x_2) - f(x_1))/|x_2 - x_1|$. Для фиксированного $\varepsilon \geq 0$ рассмотрим следующее свойство отображения f :

$$\|\{a, b\}_f - \{b, c\}_f\| \leq \varepsilon \quad \text{для любых точек } a, c \in X \text{ и } b \in [a, c]. \quad (2)$$

Таким образом, при данном $\varepsilon \geq 0$ неравенство (2) должно выполняться для любой тройки $a, b, c \in X$, такой, что $b \in [a, c]$. При $\varepsilon = 0$ аффинные операторы и только они удовлетворяют условию (2). Для произвольного $\varepsilon > 0$ липшицевы $\varepsilon/2$ -возмущения аффинных операторов, т.е. $f = A + h$, где A — аффинное отображение, а h — липшицево с константой $\varepsilon/2$, удовлетворяют условию (2). Верно ли обратное: любое отображение f со свойством (2) является липшицевым возмущением аффинного оператора?

Определение 1. Пара банаховых пространств (X, Y) обладает свойством липшицевой линейной устойчивости (ЛЛУ), если существует функция $C(\varepsilon)$, такая, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = 0$ и для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию (2) при некотором $\varepsilon \geq 0$, найдется непрерывный линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, для которого $\|\{x_1, x_2\}_{f-A}\| \leq C(\varepsilon)$, $x_1, x_2 \in X$.

Величина $\{x_1, x_2\}_{f-A}$ не меняется при прибавлении константы к оператору A . Поэтому если существует аффинный приближающий оператор A , то существует и линейный. Таким образом, ЛЛУ означает, что для любого отображения f , удовлетворяющего условию (2), найдется линейный оператор A , такой, что отображение $f - A$ липшицево с константой $C(\varepsilon)$. Свойство ЛЛУ было введено Палешем в [19, с. 150–151], где он сформулировал следующую задачу: выяснить, для каких пространств X пара $(X, \mathbb{R})$ обладает свойством ЛЛУ? Эта задача тесно связана с вопросом об устойчивости Улама–Хайерса при $p = 1$ ([20], [21]). Устойчивость Улама–Хайерса при данном $p \geq 0$ означает, что любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее неравенству $\|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)\| \leq \delta(|x_1|^p + |x_2|^p)$, может быть приближено линейным оператором A таким образом, что $\|f(x) - Ax\| \leq C(\delta)|x|^p$, где $C(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Доказано, что все пары банаховых пространств X, Y обладают данным свойством при любом $p \neq 1$, причем для каждого отображения f приближающий оператор единственный. Случай же $p = 1$ является исключительным:

уже при $X = Y = \mathbb{R}$ устойчивости нет (подробнее об этом см. [18]). Свойство ЛЛУ является естественным аналогом устойчивости Улама–Хайерса при $p = 1$. Заметим, что в этом случае приближающий оператор уже не обязательно будет единственным. О связи ЛЛУ с другими задачами устойчивости см. [15], [22]–[24].

Применение теоремы 3 позволяет получить полное решение даже в более общей постановке: если X произвольно, а Y — пространство, сопряженное к нормированному, то свойство ЛЛУ имеет место с показателем $C(\varepsilon) = 2\varepsilon$. Это верно, в частности, если Y рефлексивно, например, при $Y = \mathbb{R}$, что дает ответ на вопрос Палеша.

Теорема 4. *Если X — произвольное банахово пространство, а Y — пространство, сопряженное к нормированному, то свойство ЛЛУ выполняется с показателем $C(\varepsilon) = 2\varepsilon$.*

Доказательство. Покажем сначала, что при выполнении условия (2) значение $\{x_1, x_2\}_f$ почти одинаково для всех параллельных отрезков $[x_1, x_2]$ (далее индекс f мы будем опускать). А именно, если векторы $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ сонаправлены, то $\|\{x_1, x_2\} - \{y_1, y_2\}\| \leq 2\varepsilon$. Возьмем на продолжении отрезка $[x_1, x_2]$ за точку x_2 произвольную точку z и обозначим через y'_2 ближайшую к y_2 точку отрезка $[y_1, z]$. При $z \rightarrow \infty$ имеем $y'_2 \rightarrow y_2$ и $|z - y'_2| = |z - x_2| + O(1)$, следовательно, $\{y'_2, z\} - \{x_2, z\} \rightarrow 0$. Так как

$$\|\{x_1, x_2\} - \{x_2, z\}\| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\{y'_2, z\} - \{y_1, y'_2\}\| \leq \varepsilon,$$

то по неравенству треугольника $\|\{x_1, x_2\} - \{y_1, y'_2\}\| \leq 2\varepsilon + \|\{y'_2, z\} - \{x_2, z\}\|$, что в пределе при $z \rightarrow \infty$ дает $\|\{x_1, x_2\} - \{y_1, y_2\}\| \leq 2\varepsilon$.

Так как отображение f непрерывно в нуле, то для достаточно малого δ величина $\sup_{|u|=\delta} \|f(u) - f(0)\|$ ограничена некоторой константой C . Следовательно, $\|\{x_1, x_2\}\| \leq C/\delta + 2\varepsilon$ при всех $x_1, x_2 \in X$. Таким образом, f липшицево. Далее,

$$\|(f(x+u) - f(x)) - (f(y+u) - f(y))\| \leq 2\varepsilon|u| \quad \text{для любых } x, y \in X.$$

Значит, расстояние между любыми двумя точками множества $\mathcal{Q}(u)$ не превосходит $2\varepsilon|u|$. По теореме 3 существует линейный селектор A отображения $\varphi(u) = \mathcal{Q}(u)$. Так как $Au \in \mathcal{Q}(u)$ и $f(x+u) - f(x) \in \mathcal{Q}(u)$, то $\|(f(x+u) - f(x)) - Au\| \leq 2\varepsilon|u|$ для любых $x, u \in X$, откуда следует, что $\{x+u, x\}_{f-A} \leq 2\varepsilon$. $\square$

Приложение. Доказательства вспомогательных утверждений

Доказательство предложения 1. Так как множество $\varphi(x)$ выпукло, то сумма n множеств $\varphi(x)$ равна $n\varphi(x)$. Из субаддитивности отображения φ следует, что

$$\varphi(nv) \leq n\varphi(v), \quad n \in \mathbb{N}, v \in X. \quad (3)$$

Рассмотрим отображения

$$\varphi_\infty(x) = \bigcap_{t \in (0, +\infty)} t^{-1}\varphi(tx) \quad \text{и} \quad \varphi'_\infty(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} 2^{-k}\varphi(2^k x)$$

и покажем, что на самом деле $\varphi_\infty = \varphi'_\infty$. Очевидно, что $\varphi_\infty(x) \leq \varphi'_\infty(x)$. Для доказательства обратного неравенства заметим, что $\{2^{-k}\varphi(2^k x)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ — система вложенных компактов (это следует из (3)), поэтому она имеет непустое

пересечение, т. е. $\varphi'_\infty(x) \neq \emptyset$. Для любого положительного t существует последовательность чисел $t_j = 2^j/p_j$, где $p_j \in \mathbb{N}$, сходящаяся к t . Из непрерывности отображения φ следует, что $t_j^{-1}\varphi(t_jx) \rightarrow t^{-1}\varphi(tx)$. Применяя (3) для $n = p_j$, $v = t_jx$, получаем

$$\varphi'_\infty(x) \leq 2^{-j}\varphi(2^jx) = 2^{-j}\varphi(p_j t_jx) \leq p_j 2^{-j}\varphi(t_jx) = t_j^{-1}\varphi(t_jx).$$

Таким образом, $\varphi'_\infty(x) \leq t_j^{-1}\varphi(t_jx)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $\varphi'_\infty(x) \leq t^{-1}\varphi(tx)$. Данное неравенство верно при любом $t \in (0, +\infty)$, поэтому $\varphi'_\infty(x) \leq \varphi_\infty(x)$. Итак, $\varphi_\infty = \varphi'_\infty$. В частности, для любого x образ $\varphi_\infty(x)$ — непустой выпуклый компакт. Однородность отображения φ_∞ очевидна, докажем субаддитивность. Для произвольного $y \in \varphi_\infty(x_1 + x_2)$ и любого $k \geq 0$ имеем

$$y \in 2^{-k}\varphi(2^kx_1 + 2^kx_2) \leq 2^{-k}(\varphi(2^kx_1) + \varphi(2^kx_2)).$$

Следовательно, существуют $y_i(k) \in 2^{-k}\varphi(2^kx_i)$, $i = 1, 2$, такие, что $y = y_1(k) + y_2(k)$. Так как $2^{-k}\varphi(2^kx_i) \leq \varphi(x_i)$, то $y_i(k) \in \varphi(x_i)$. В частности, все точки $y_1(k)$, $k \geq 0$, лежат в компакте $\varphi(x_1)$. Поэтому последовательность $\{y_1(k)\}$ имеет частичный предел $\tilde{y}_1$. Все члены этой последовательности, кроме конечного числа, лежат в компакте $2^{-n}\varphi(2^nx_1)$, поэтому $\tilde{y}_1 \in 2^{-n}\varphi(2^nx_1)$ при любом n , следовательно, $\tilde{y}_1 \in \varphi'_\infty(x_1) = \varphi_\infty(x_1)$. Так как точка $\tilde{y}_2 = y - \tilde{y}_1$ — частичный предел последовательности $\{y - y_1(k)\}_{k \geq 0}$ и $y - y_1(k) = y_2(k) \in 2^{-k}\varphi(2^kx_2)$, то $\tilde{y}_2 \in \varphi_\infty(x_2)$. Таким образом, для любого $y \in \varphi_\infty(x_1 + x_2)$ существуют $\tilde{y}_1 \in \varphi_\infty(x_1)$, $\tilde{y}_2 \in \varphi_\infty(x_2)$, такие, что $y = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$. Следовательно, $\varphi_\infty(x_1 + x_2) \leq \varphi_\infty(x_1) + \varphi_\infty(x_2)$. Таким образом, φ_∞ субаддитивно. Доказательство непрерывности отображения φ_∞ элементарно, и мы его опускаем. $\square$

Доказательство леммы 1. Докажем сначала это утверждение для обычной числовой функции φ со значениями в $\mathbb{R}$. Ее кусочно линейное продолжение будет выпуклым в достаточно малой окрестности любой точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. В самом деле, если x не лежит на лучах r_i , то φ линейна в малой окрестности этой точки x , если же $x \in r_i$, то выпуклость в ее малой окрестности следует из неравенства $\varphi(x_i) \leq \alpha_i\varphi(x_{i-1}) + \beta_i\varphi(x_{i+1})$. Таким образом, функция φ локально выпукла и, следовательно, выпукла на $\mathbb{R}^2$.

Для отображения φ со значениями в $\mathcal{M}(Y)$ и для любого $u \in Y^*$ рассмотрим числовую функцию $g_u(t) = s_{\varphi(t)}(u)$, где $s_K(u) = \sup_{y \in K}(u, y)$ — опорная функция выпуклого компакта $K \in \mathcal{M}(Y)$. Для каждого u опорная функция аддитивна и однородна по K . Кроме того, из второй теоремы отделимости [13, с. 38] следует, что $K_1 \subset K_2$ тогда и только тогда когда $s_{K_1}(u) \leq s_{K_2}(u)$, $u \in Y^*$. Поэтому для любого u числовая функция $g_u(t)$ также дискретно-выпукла, и ее кусочно линейное продолжение выпукло. Для кусочно линейного продолжения φ имеем $s_{\varphi((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)}(u) \leq (1-\lambda)s_{\varphi(\alpha)}(u) + \lambda s_{\varphi(\beta)}(u)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ и $u \in Y^*$, откуда вытекает, что $\varphi((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta) \leq (1-\lambda)\varphi(\alpha) + \lambda\varphi(\beta)$. Следовательно, отображение φ выпукло. $\square$

Доказательство леммы 2 совпадает с доказательством леммы 1. $\square$

Доказательство леммы 3. Рассмотрим для простоты случай, когда расстояния между плоскостями равны. Точка на i -й прямой задается как $a_i x_i + b_i$, где $x_i, b_i \in \mathbb{R}^3$ и $a_i \in \mathbb{R}$ — скалярный параметр, $i = 1, \dots, 5$. Если пять точек лежат на одной прямой, то выполнены три уравнения $a_i x_i + b_i = (a_{i-1} x_{i-1} + b_{i-1} +$

$a_{i+1}x_{i+1} + b_{i+1})/2$ при $i = 2, 3, 4$. Каждый вектор x_i имеет размерность 2, поэтому числа $a_1, \dots, a_5$ удовлетворяют системе из 6 линейных уравнений. Коэффициенты уравнений — полиномы от x_i, b_i . Поскольку существует положение пяти прямых, которые не пересекаются одной прямой, существуют значения x_i, b_i , при которых система невырождена. Следовательно, она невырождена в общем положении, и в этом случае пять прямых не пересекаются одной прямой. $\square$

Автор выражает благодарность двум рецензентам за внимательное чтение и множество ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. D. Ioffe, *Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **266**:1 (1981), 1–56.
- [2] А. М. Рубинов, *Сублинейные операторы и их приложения*, УМН, **32**:4 (1977), 113–174.
- [3] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных соотношений*, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 25, ВИНТИ, М., 1987, 123–197.
- [4] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Многозначные отображения*, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 19, ВИНТИ, М., 1982, 127–230.
- [5] E. Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math., **63**:2 (1956), 361–382.
- [6] V. V. Gorokhovich, *Representations of affine multifunctions by affine selections*, Set-Valued Anal., **16**:2–3 (2008), 185–198.
- [7] А. Я. Заславский, *О существовании линейного селектора суперлинейного многозначного отображения*, Матем. заметки, **29**:4 (1981), 557–566.
- [8] A. Smajdor, *Additive selections of superadditive set-valued functions*, Aequationes Math., **39**:2–3 (1990), 121–128.
- [9] A. Smajdor, W. Smajdor, *Affine selections of convex set-valued functions*, Aequationes Mathematicae, **51** (1996), 12–20.
- [10] D. Popa, *Additive selections of (α, β) -subadditive set-valued maps*, Glas. Mat. Ser. III, **36**:1 (2001), 11–16.
- [11] Z. Páles, *Linear selections for set-valued functions and extension of bilinear forms*, Arch. Math., **62**:5 (1994), 427–432.
- [12] K. Nikodem, Z. Páles, Sz. Wąsowicz, *Multifunctions with selections of convex and concave type*, Math. Pannon., **11**:2 (2000), 249–260.
- [13] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, М., 2000.
- [14] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [15] J. Tabor, D. Yost, *Applications of inverse limits to extensions of operators and approximation of Lipschitz functions*, J. Approx. Theory, **116**:2 (2002), 257–267.
- [16] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Publ., New York–London, 1960.
- [17] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **27** (1941), 222–224.
- [18] Th. M. Rassias, *On the stability of functional equations and a problem of Ulam*, Acta Appl. Math., **62**:1 (2000), 23–130.
- [19] J. Chmielinski, *Report on the 12th ICFEI*, Ann. Acad. Pedagog. Crac. Stud. Math., **7** (2008), 125–159.

- [20] S.-M. Jung, *On the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **204**:1 (1996), 221–226.
- [21] P. Găvruta, *A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **184**:3 (1994), 431–436.
- [22] B. E. Johnson, *Approximately multiplicative maps between Banach algebras*, J. London Math. Soc., Ser. 2, **37**:2 (1988), 294–316.
- [23] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Sci., **14**:3 (1991), 431–434.
- [24] P. Šemrl, *The stability of approximately additive functions*, in: Stability of Mappings of Hyers-Ulam Type (eds. Th. M. Rassias, J. Tabor), Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994, 135–140.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступило в редакцию
12 апреля 2010 г.