Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Гонсалвес, Д. Ройер, Унитарная эквивалентность представлений алгебры, порожденной графом, и ветвящиеся системы, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 45–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 03:31:09

Унитарная эквивалентность представлений алгебр, ассоциированных с графами, и ветвящиеся системы

© 2011. Д. Гонсалвес, Д. Ройер

В работе рассматриваются представления алгебр, ассоциированных с графами. Мы покажем, что для большого класса счетных графов каждое представление алгебры, ассоциированной с таким графом, в сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно представлению, построенному по ветвящейся системе.

§ 1. Введение

Алгебры, ассоциированные с графами, изучались как с точки зрения чистой алгебры, так и в теории операторов (см., например, [7], [11], [9]). Ветвящиеся системы также возникают в некоторых родственных областях, таких, как теория случайных блужданий, символическая динамика и вычислительные процедуры (см., например, [10], [15], [5], [3], [18]).

Теория представлений алгебр, ассоциированных с графами, во многих отношениях напоминает теорию представлений алгебр Кунца–Кригера; эта теория является важным примером взаимодействия между операторной теорией алгебр, ассоциированных с графами, и другими областями математики. Например, теория представлений C^* -алгебр, ассоциированных с графами, может быть применена к операторам Перрона–Фробениуса динамических систем (см. [7]). Для анализа этих представлений необходимо изучить их свойства. Одна из интересных тем, подлежащих изучению — это унитарная эквивалентность представлений, поскольку при унитарной эквивалентности сохраняется неприводимость.

Если взглянуть на результаты, имеющиеся в теории представлений алгебр Кунца–Кригера, становится ясно, что для C^* -алгебр, ассоциированных с графами, еще предстоит значительная работа. Например, теория представлений алгебр Кунца–Кригера применяется к представлениям алгебры фермионов [1], классификации струнных квантовых теорий поля [2], динамическим системам ([8], [13], [12]), фракталам [14] и теории вейвлетов [4]. Многие из этих связей опираются на изучение неприводимых представлений и их классов унитарной эквивалентности. Естественно ожидать, что при обобщении этих результатов на C^* -алгебры, ассоциированные с графами, исследование унитарной эквивалентности представлений этих алгебр окажется весьма существенным.

Изучение представлений C^* -алгебр, ассоциированных с графами, и связи этих представлений с ветвящимися системами было начато в нашей работе [7]. В этой работе мы покажем, что для большого класса C^* -алгебр, ассоциированных с графами, все представления этих алгебр унитарно эквивалентны представлениям, построенным по ветвящимся системам. Этот класс C^* -алгебр вклю-

чает в себя, среди прочих, алгебру компактных операторов, а также алгебры, связанные с диаграммами Браттели (с обратными направлениями на ребрах). Работа организована так: в §2 мы покажем, что (при некоторых технических предположениях) все представления алгебр, ассоциированных с графами, унитарно эквивалентны представлениям, построенным по ветвящимся системам. Таким образом, нашей следующей целью оказывается отыскание всех графов, к которым применимы результаты §2. Для точных формулировок нам понадобятся некоторые новые понятия и термины, относящиеся к графам; они будут введены в §3. Наконец, в §4 мы приведем достаточные условия на граф, при выполнении которых все представления соответствующей C^* -алгебры унитарно эквивалентны представлениям, построенным по ветвящимся системам. Предварительно мы напомним читателю некоторые основные определения и результаты (более подробное изложение читатель найдет в [7] или в [8]).

Пусть $E = (E^0, E^1, r, s)$ — ориентированный граф; здесь E^0 — множество вершин, E^1 — множество ребер, а отображения $r, s: E^1 \rightarrow E^0$ задают концы и начала ребер. Согласно [16], C^* -алгебра, ассоциированная с графом E , — это универсальная C^* -алгебра $C^*(E)$, порожденная проекторами P_v , $v \in E^0$, и частичными изометриями S_e , $e \in E^1$, с попарно ортогональными областями значений, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

- проекторы P_v попарно ортогональны;
- $S_e^* S_e = P_{r(e)}$ для всех $e \in E^1$;
- $S_e S_e^* \leq P_{s(e)}$ для всех $e \in E^1$;
- $P_v = \sum_{e: s(e)=v} S_e S_e^*$ для каждой вершины v , такой, что $0 < \#\{e : s(e) = v\} < \infty$.

Если A, B — измеримые подмножества данного пространства с мерой (X, μ) , то запись $B \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{\subseteq} A$ означает, что $\mu(B \setminus A) = 0$, а запись $A \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} B$ означает, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\mu(B \setminus A) = 0$. Если даны два отображения $f, g: A \rightarrow X$, то запись $f \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} g$ означает, что $\mu(x \in A : f(x) \neq g(x)) = 0$.

Определение 1.1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $\{R_e\}_{e \in E^1}$, $\{D_v\}_{v \in E^0}$ — семейства измеримых подмножеств множества X , удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $R_e \cap R_d \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} \emptyset$ для любых $d, e \in E^1$, таких, что $d \neq e$;
- (2) $D_u \cap D_v \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} \emptyset$ для любых $u, v \in E^0$, таких, что $u \neq v$;
- (3) $R_e \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{\subseteq} D_{s(e)}$ для любого $e \in E^1$;
- (4) $D_v \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} \bigcup_{e: s(e)=v} R_e$, если $0 < \#\{e \in E^1 : s(e) = v\} < \infty$,
- (5) для любого $e \in E^1$ существует такое отображение $f_e: D_{r(e)} \rightarrow R_e$, что $f_e(D_{r(e)}) \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} R_e$ и существует производная Радона–Никодима Φ_{f_e} меры $\mu \circ f_e$ относительно меры μ (в $D_{r(e)}$), причем $\Phi_{f_e} > 0$ почти наверное по мере μ ;
- (6) для любого f_e из п. (5) существует такое отображение $f_e^{-1}: R_e \rightarrow D_{r(e)}$, что $f_e \circ f_e^{-1} \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} \text{Id}_{R_e}$ и $f_e^{-1} \circ f_e \stackrel{\mu\text{-п.н.}}{=} \text{Id}_{D_{r(e)}}$, и для любого такого f_e^{-1} существует производная Радона–Никодима $\Phi_{f_e^{-1}}$ меры $\mu \circ f_e^{-1}$ относительно меры μ (в R_e).

Измеримое пространство (X, μ) с заданными семействами измеримых подмножеств $\{R_e\}_{e \in E^1}$ и $\{D_v\}_{v \in E^0}$ и отображениями f_e , f_e^{-1} , Φ_{f_e} , $\Phi_{f_e^{-1}}$, указанными выше, называется *E -ветвящейся системой*.

Теорема 1.2 [7]. Пусть (X, μ) есть E -ветвящаяся система. Тогда существует такой $*$ -гомоморфизм $\pi: C^*(E) \rightarrow B(L^2(X, \mu))$, что

$$\pi(S_e)\phi = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{1/2} \cdot \phi \circ f_e^{-1} \quad \text{и} \quad \pi(P_v)\phi = \chi_{D_v}\phi$$

для любых $e \in E^1$ и $v \in E^0$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые графы счетны, т. е. множество вершин E^0 и множество ребер E^1 счетны.

§2. Унитарная эквивалентность представлений

В этом параграфе мы покажем, что при некоторых технических предположениях все представления C^* -алгебры, ассоциированной с графом, унитарно эквивалентны представлениям, построенным по ветвящимся системам. Для этой цели нам понадобится записать сначала соотношения, которые задают C^* -алгебру, ассоциированную с графом, при помощи соотношений между начальными и конечными подпространствами частичных изометрических операторов, задающих алгебру.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $\pi: C^*(E) \rightarrow B(H)$ — представление алгебры $C^*(E)$, ассоциированной с графом. Тогда семейства $\{\pi(S_e)\pi(S_e)^*\}_{e \in E^1}$, $\{\pi(S_e)^*\pi(S_e)\}_{e \in E^1}$, $\{\pi(P_v)\}_{v \in E^0}$ состоят из проекторов, принадлежащих алгебре $B(H)$. Положим $H_e = \pi(S_e)\pi(S_e)^*(H)$ для каждого ребра $e \in E^1$, а для каждой вершины $v \in E^0$ положим $H_v = \pi(P_v)(H)$; это замкнутые подпространства в H . Из соотношений, которые определяют алгебру $C^*(E)$, получаем

- (1) $H_e \cap H_f = 0$ для любых $e, f \in E^1$, таких, что $e \neq f$;
- (2) $H_u \cap H_v = 0$ для любых $u, v \in E^0$, таких, что $u \neq v$;
- (3) отображение $\pi(S_e): H_{r(e)} \rightarrow H_e$ изометрично и сюръективно;
- (4) если $\#\{s^{-1}(v)\} > 0$, то $H_v = (\bigoplus_{e:s(e)=v} H_e) \oplus V_v$, где V_v есть подпространство в H_v ; если $0 < \#\{s^{-1}(v)\} < \infty$, то $H_v = \bigoplus_{e:s(e)=v} H_e$;
- (5) $H = (\bigoplus_{v \in E^0} H_v) \oplus V$, где V — гильбертово пространство.

Для любого $e \in E^1$ выберем ортонормированный базис (Шаудера) B_e в H_e . Так как пространство H сепарабельно, то множество B_e конечно либо счетно. В подпространствах H_v , где $v \in E^0$, выберем базис следующим образом.

- Если $\#\{s^{-1}(v)\} = \infty$, то $H_v = (\bigoplus_{e:s(e)=v} H_e) \oplus V_v$; выберем ортонормированный базис B_v в H_v так, что если $e \in s^{-1}(v)$, то $B_e \subseteq B_v$. Если $0 < \#\{s^{-1}(v)\} < \infty$, то положим $B_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$.

- Если $\#\{s^{-1}(v)\} = 0$, то возьмем произвольный ортонормированный базис B_v в пространстве H_v .

Наконец, выберем ортонормированный базис B в H так, чтобы $B_v \subseteq B$ для любой вершины $v \in E^0$. Заметим, что такой базис существует, ибо $H = (\bigoplus_{v \in E^0} H_v) \oplus V$; кроме того, множество B счетно, ибо счетны оба множества E^0 и E^1 .

Чтобы доказать унитарную эквивалентность представления алгебры, ассоциированной с графом, с представлением, построенным по ветвящейся системе, мы должны предположить, что унитарный оператор $\pi(S_e): H_{r(e)} \rightarrow H_e$ переводит базис пространства $H_{r(e)}$ в базис пространства H_e . Более точно, мы должны

требовать, чтобы

$$\pi(S_e)(B_{r(e)}) = B_e \quad \text{для любого } e \in E^1. \quad (B2B)$$

Заметим, что условие (B2B) равносильно тому, что $\pi(S_e)^*(B_e) = B_{r(e)}$ для любого $e \in E^1$.

Мы можем теперь доказать следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть $\pi: C^*(E) \rightarrow B(H)$ есть $*$ -представление алгебры $C^*(E)$ и пространство H сепарабельно. Выберем ортонормированный базис $B = \{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ в H , как это делалось выше, и предположим, что этот базис удовлетворяет условию (B2B). Тогда представление π унитарно эквивалентно представлению $\tilde{\pi}: C^*(E) \rightarrow B(l^2(\mathbb{N}))$, где $\tilde{\pi}$ построено по E -ветвящейся системе.

Доказательство. Пусть $l^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ для любого } n \in \mathbb{N} \text{ и } \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\}$; пусть $\{d^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — канонический базис в $l^2(\mathbb{N})$. Определим оператор $U: H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, полагая $U(h_j) = d^j$; этот оператор унитарен. Теперь мы определим E -ветвящуюся систему (X, μ) . Для этого положим $X = \mathbb{N}$ и обозначим через μ считающую меру на $\mathbb{N}$. Для любого ребра $e \in E^1$ положим

$$R_e = \{j \in \mathbb{N} : h_j \in B_e\},$$

и для каждой вершины $v \in E^0$ положим

$$D_v = \{j \in \mathbb{N} : h_j \in B_v\}.$$

Чтобы проверить, что пространство (X, μ) с семействами $\{D_v\}_{v \in E^0}$ и $\{R_e\}_{e \in E^1}$ образует E -ветвящуюся систему, мы должны проверить выполнение условий из определения 1.1. Так как $H_e \cap H_f = 0$, то $R_e \cap R_f = \emptyset$ при $e \neq f$. Аналогичным образом, $D_u \cap D_v = \emptyset$. Условия (3) и (4) выполняются в силу выбора базиса $B = \{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Нам остается лишь выбрать для любого $e \in E^1$ отображение $f_e: D_{r(e)} \rightarrow R_e$, как описано в определении 1.1.

Для фиксированного $e \in E^1$ определим f_e следующим образом. Если $j_0 \in D_{r(e)}$, то $h_{j_0} \in H_{r(e)}$ и в силу условия (B2B) $\pi(S_e)(h_{j_0}) = h_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in \mathbb{N}$. Заметим, что $i_0 \in R_e$ в силу условия $h_{i_0} \in H_e$. Тогда положим $f_e(j_0) = i_0$; таким образом, отображение $f_e: D_{r(e)} \rightarrow R_e$ есть биекция. (Оно сюръективно в силу того, что $\pi(S_e)(B_{r(e)}) = B_e$.)

Заметим, что в данном случае μ есть считающая мера; поэтому производные Радона–Никодима задаются формулами $\Phi_{f_e}(x) = 1$ для любого $x \in D_{r(e)}$ и $\Phi_{f_e^{-1}}(x) = 1$ для любого $x \in R_e$. Так как (X, μ) есть E -ветвящаяся система, то в силу теоремы 1.2 существует такой $*$ -гомоморфизм $\tilde{\pi}: C^*(E) \rightarrow B(L^2(X, \mu)) = B(l^2(\mathbb{N}))$, что для любого $c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ выполняется равенство $\tilde{\pi}(S_e)c = ((\tilde{\pi}(S_e)c)_j)_{j \in \mathbb{N}}$, где

$$(\tilde{\pi}(S_e)c)_j = [j \in R_e]c_{f_e^{-1}(j)}$$

(здесь $[j \in R_e] = 1$, если $j \in R_e$, и $[j \in R_e] = 0$, если $j \notin R_e$). Далее, по теореме 1.2 для любой вершины $v \in E^0$ имеем $\tilde{\pi}(P_v)c = ((\tilde{\pi}(P_v)c)_j)_{j \in \mathbb{N}}$, где

$$(\tilde{\pi}(P_v)c)_j = [j \in D_v]c_j.$$

Для доказательства унитарной эквивалентности представлений π и $\tilde{\pi}$ мы должны показать, что $U^*\tilde{\pi}(S_e)U = \pi(S_e)$ для любого ребра $e \in E^1$ и $U^*\tilde{\pi}(P_v)U = \pi(P_v)$ для любой вершины $v \in E^0$.

Сначала покажем, что $U^*\tilde{\pi}(S_e)U = \pi(S_e)$ для любого $e \in E^1$. С этой целью зафиксируем элемент $e \in E^1$ и возьмем вектор h_k из базиса B в H . Тогда

$$\tilde{\pi}(S_e)U(h_k) = \tilde{\pi}(s_e)(d^k) = ((\tilde{\pi}(s_e)d^k)_j)_{j \in \mathbb{N}} = ([j \in R_e]d_{f_e^{-1}(j)}^k)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Заметим, что $[j \in R_e]d_{f_e^{-1}(j)}^k = 1$ тогда и только тогда, когда $j \in R_e$ и $f_e^{-1}(j) = k$, или (что равносильно) когда $k \in D_{r(e)}$ и $f_e(k) = j$. Таким образом, если $h_k \notin B_{r(e)}$, то $\tilde{\pi}(S_e)(d^k) = 0$ и $\pi(S_e)(h_k) = 0$, откуда следует, что $\pi(S_e)(h_k) = 0 = U^*\pi(S_e)U(h_k)$. Если $h_k \in B_{r(e)}$, то $\pi(S_e)(h_k) = h_{i_0}$ для некоторого i_0 (согласно $(B2B)$) и, таким образом, $f_e(k) = i_0$. В этом случае $[j \in R_e]d_{f_e^{-1}(j)}^k = 1$ тогда и только тогда, когда $j = i_0$, а значит, $\tilde{\pi}(S_e)d^k = d^{i_0}$. Поэтому в данном случае

$$U^*\tilde{\pi}(S_e)U(h_k) = U^*\tilde{\pi}(S_e)d^k = U^*d^{i_0} = h_{i_0} = \pi(S_e)(h_k).$$

Таким образом, $U^*\tilde{\pi}(S_e)U(h_k) = \pi(S_e)(h_k)$ для любого вектора $h_k \in B$. Из этого вытекает, что $U^*\tilde{\pi}(S_e)U = \pi(S_e)$.

Осталось показать, что $U^*\tilde{\pi}(P_v)U = \pi(P_v)$ для любого $v \in E^0$. Выберем элемент $v \in E^0$. Тогда $\pi(P_v)(h_k) = [h_k \in B_v]h_k$ и $\tilde{\pi}(P_v)d^k = [k \in D_v]d^k$ для вектора $h_k \in B$. Следовательно,

$$U^*\tilde{\pi}(P_v)U(h_k) = U^*\tilde{\pi}(P_v)(d^k) = [k \in D_v]U^*(d^k) = [k \in D_v]h_k = \pi(P_v)(h_k).$$

Отсюда вытекает, что $\pi(P_v) = U^*\tilde{\pi}(P_v)U$, а потому представления π и $\tilde{\pi}$ унитарно эквивалентны, что и требовалось доказать. $\square$

В качестве следствия теоремы 2.1 мы докажем ниже, что любая реализация алгебры компактных операторов в пространстве $l_2(\mathbb{N})$ унитарно эквивалентна реализации, построенной по E -ветвящейся системе. Этот результат представляет интерес, ибо, как известно, существует связь между реализациями пространств компактных операторов и теорией приближений, см. [6].

Пример 2.2. Любая реализация алгебры компактных операторов в $l_2(\mathbb{N})$ унитарно эквивалентна реализации, построенной по E -ветвящейся системе.

Напомним, что C^* -алгебра компактных операторов может рассматриваться как алгебра, ассоциированная с графом

Пусть теперь E есть указанный граф, и пусть $\pi: C^*(E) \rightarrow B(H)$ — представление ассоциированной с этим графом C^* -алгебры. Чтобы доказать, что это представление унитарно эквивалентно представлению, построенному по E -ветвящейся системе, достаточно проверить (согласно теореме 2.1), что существует базис в H , удовлетворяющий условию $(B2B)$. С этой целью положим $H_{v_n} := \pi(P_{v_n})(H)$ и $H_{e_n} := \pi(S_{e_n})\pi(S_{e_n})^*(H)$. Выберем ортонормированный базис B_{v_0} в H_{v_0} и по индукции положим $B_{e_n} := B_{v_{n-1}}$ для всех $n \geq 1$ (B_{e_n} составляет базис в H_{e_n}) и $B_{v_n} := \pi(S_{e_n})^*(B_{e_n})$ (B_{v_n} составляет базис в H_{v_n}); аналогично, для всех $n \geq 0$ положим $B_{e_{-n}} := \pi(S_{e_{-n}})(B_{v_{-n}})$ ($B_{e_{-n}}$ составляет базис в $H_{e_{-n}}$), а также $B_{v_{-(n-1)}} := B_{e_{-n}}$ ($B_{v_{-(n-1)}}$ составляет базис в $H_{v_{-(n-1)}}$). Построенный таким образом базис удовлетворяет условию $(B2B)$, и, следовательно, по теореме 2.1 представление π унитарно эквивалентно представлению, построенному по E -ветвящейся системе.

§3. Некоторые понятия и результаты теории графов

В этом параграфе мы введем некоторые понятия из теории графов; эти понятия понадобятся нам в следующем параграфе (где мы укажем набор алгебр, ассоциированных с графами, к которым применимы результаты предыдущего параграфа).

Начнем с определения, относящегося к неориентированным путям в графе.

Определение 3.1. Пусть $E = (E^0, E^1, r, s)$ — граф. Введем следующие понятия.

(1) Вершина u смежна с ребром e (или ребро e смежно с вершиной u), если $r(e) = u$ либо $s(e) = u$.

(2) Две вершины $u \neq v$ смежны, если существует ребро e , смежное с вершиной u и вершиной v .

(3) Два ребра $e \neq f$ смежны, если существует такая вершина u , что u и e смежны и u и f также смежны.

(4) Путь, соединяющий вершины $u, v \in E^0$, — это такая пара последовательностей $(u_0 u_1 \dots u_n; e_1 \dots e_n)$ вершин u_i и ребер e_j , что ребро e_i смежно с вершинами u_{i-1} и u_i для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, $u = u_0$, $v = u_n$ и $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$.

(5) Цикл — это такой путь $(u_0 \dots u_n; e_1 \dots e_n)$, что $u_0 = u_n$.

(6) Граф E является P -простым, если для любых вершин $u, v \in r(E^1) \cup s(E^1)$, таких, что $u \neq v$, существует не более одного пути, соединяющего u и v , и, кроме того, не существует ребра $e \in E^1$, для которого $r(e) = s(e)$.

Заметим, что P -простота графа равносильна тому, что он не содержит циклов и не существует $e \in E^1$, для которого $r(e) = s(e)$.

Определение 3.2. Пусть дан граф $E = (E^0, E^1, r, s)$. Будем говорить, что подмножество Z множества E^0 связно, если для любых двух вершин $u, v \in Z$ существует путь, соединяющий u и v . Будем называть связное множество Z максимальным при выполнении следующего условия: если для вершины $v \in E^0$ существует путь, соединяющий v и u , где $u \in Z$, то $v \in Z$.

Заметим, что если подмножество $Z \subseteq E^0$ связно, то $Z \subseteq r(E^1) \cup s(E^1)$. Далее, если граф E является P -простым, то связность множества $Z \subseteq E^0$ означает, что для любой пары различных вершин $u, v \in Z$ существует ровно один путь, соединяющий вершины u и v .

Ясно, что для данного графа $E = (E^0, E^1, r, s)$ множество E^0 может оказаться несвязным; однако множество E^0 является дизъюнктивным объединением максимальных связных подмножеств и подмножества «изолированных» вершин, т. е. вершин, не принадлежащих множеству $r(E^1) \cup s(E^1)$.

Чтобы получить одно максимальное связное подмножество Z_v , зафиксируем некоторую вершину $v \in r(E^1) \cup s(E^1)$ и положим

$$Z_v := \{v\} \cup \{u \in E^0 : \text{существует путь, соединяющий } u \text{ и } v\}.$$

Используя лемму Цорна, можем написать

$$E^0 = \left(\bigcup_{i \in \Delta} Z_i \right) \dot{\cup} R,$$

где каждое Z_i — максимальное связное подмножество множества E^0 и $R = E^0 \setminus r(E^1) \cup s(E^1)$ — множество изолированных вершин.

Так как каждое Z_i есть максимальное связное множество, то $r^{-1}(Z_i) \cup s^{-1}(Z_i) = r^{-1}(Z_i) = s^{-1}(Z_i)$ и, таким образом, $(r^{-1}(Z_i) \cup s^{-1}(Z_i), Z_i, r_i, s_i)$ есть подграф графа E , где отображения r_i, s_i являются ограничениями отображений r и s .

Таким образом, если исключить множество R , то граф E есть дизъюнктное объединение подграфов $(r^{-1}(Z_i) \cup s^{-1}(Z_i), Z_i, r_i, s_i)$, где каждое Z_i есть максимальное связное множество.

Прежде, чем привести некоторые примеры, дадим еще одно определение:

Определение 3.3. Вершина $v \in E^0$ называется *экстремальной вершиной* графа E , если $\# \{r^{-1}(v) \cup s^{-1}(v)\} = 1$ и не существует такого ребра $e \in E^1$, что $r(e) = v = s(e)$. Если вершина v экстремальна, то единственное ребро, смежное вершине v , называется *экстремальным ребром*.

Другими словами, вершина v есть экстремальная вершина графа E , если она смежна ровно с одной вершиной и при этом не существует ребра e , для которого $r(e) = v = s(e)$. Заметим, что граф может и не иметь экстремальных вершин. Например, следующий граф

(с ним ассоциирована алгебра компактных операторов) не имеет экстремальных вершин.

Ниже мы опишем процедуру, которая позволит классифицировать ребра и вершины графа с точки зрения того, «насколько они экстремальны». Такая классификация окажется важной для дальнейшего.

Зафиксируем граф E и предположим, что он имеет хотя бы одну экстремальную вершину. Пусть X_1 — множество экстремальных вершин графа E и Y_1 — множество его экстремальных ребер. Вершины из X_1 и ребра из Y_1 назовем соответственно вершинами уровня 1 и ребрами уровня 1. Рассмотрим теперь граф $\mathbb{E}_1 = (E^1 \setminus Y_1, E^0 \setminus X_1, r, s)$, где через r, s мы обозначили (несколько вольно обращаясь с обозначениями) ограничения $r|_{E^1 \setminus Y_1}, s|_{E^1 \setminus Y_1} : E^1 \setminus Y_1 \rightarrow E^0 \setminus X_1$ отображений r, s .

Пусть, далее, X_2, Y_2 означают соответственно множества экстремальных вершин (в предположении, что существует хотя бы одна такая вершина) и множества экстремальных ребер графа $\mathbb{E}_1$. Элементы множеств X_2 и Y_2 назовем вершинами уровня 2 и ребрами уровня 2 графа E соответственно.

Определим теперь граф $\mathbb{E}_2$ следующим образом: $\mathbb{E}_2 = (E^1 \setminus (Y_1 \cup Y_2), E^0 \setminus (X_1 \cup X_2), r, s)$. Здесь (снова допуская некоторую вольность) мы обозначили через r и s ограничения отображений r, s на $E^1 \setminus (Y_1 \cup Y_2)$.

Действуя по индукции, мы определим множества X_n и Y_n как (непустые) множества экстремальных вершин и экстремальных ребер графа $\mathbb{E}_{n-1}$ и назовем элементы множеств X_n и Y_n соответственно вершинами уровня n и ребрами уровня n графа E . Заметим, что вершины уровня n и ребра уровня n графа E — это не что иное, как вершины уровня 1 и ребра уровня 1 (т. е. экстремальные вершины и экстремальные ребра) графа $\mathbb{E}_{n-1}$.

Если на некотором из этих шагов граф $\mathbb{E}_m$ не имеет экстремальных вершин, то не существует экстремальных вершин уровня k ни для какого $k > m$. В этом случае вершины уровня m — это вершины *максимального уровня*.

В качестве примера рассмотрим граф E , изображенный на следующей диаграмме (ниже показаны диаграммы графов $\mathbb{E}_n$ для этого графа):

В этом примере граф $\mathbb{E}_2$ не имеет экстремальных вершин, и, таким образом, в графе E нет вершин и ребер уровня, большего или равного 3. Имеются только вершины уровня 1 и 2. Вершины уровня 1 образуют множество $X_1 = \{v_1, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, \dots\}$ (это множество бесконечно), а вершины максимального уровня образуют множество $X_2 = \{v_5, v_9\}$. Ребра уровня 1 образуют множество $Y_1 = \{e_1, e_6, e_7, e_{10}, e_{11}, \dots\}$, а ребра уровня 2 образуют множество $Y_2 = \{e_5, e_9\}$.

Вообще говоря, множества X_i непусты и попарно не пересекаются. Кроме того, вершина, не входящая в $r(E^1) \cup s(E^1)$, не может входить в какое-либо из множеств X_i , другими словами,

$$\bigcup_{i \in L} X_i \subseteq r(E^1) \cup s(E^1),$$

где $L = \emptyset$, если E не имеет экстремальных вершин, $L = \{1, \dots, m\}$, если E имеет вершины максимального уровня, и $L = \mathbb{N}$, если E имеет экстремальные вершины, но не имеет вершин максимального уровня.

Далее, вообще говоря, неверно, что

$$\bigcup_{i \in L} X_i = r(E^1) \cup s(E^1).$$

Например, если $L = \emptyset$ или E содержит цикл, то написанное выше равенство не выполняется, что мы могли видеть на предыдущем примере. Но в некоторых случаях указанное равенство имеет место, и в этих случаях можно вывести некоторые интересные факты, которые мы опишем в следующем предложении.

Предложение 3.4. Пусть дан граф $E = (E^0, E^1, r, s)$, и пусть X_i — множество его вершин уровня i . Пусть $Z = s(E^1) \cup r(E^1)$.

(1) Для любой вершины v уровня n существует не более одной вершины w , которая смежна с v и имеет уровень, не меньший чем n .

(2) Пусть $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n$ и Z связно. Тогда

- (а) если $v \in X_n$ для некоторого $n < m$, то существует ровно одна вершина w , которая смежна с v и имеет уровень, больший чем n ;
- (б) X_m состоит из двух вершин, и существует ровно одно ребро e , смежное с обеими вершинами.

(3) Пусть $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n \dot{\cup} \{\bar{v}\}$ и Z связно. Тогда

- (а) если $v \in X_n$ для некоторого $n < m$, то существует ровно одна вершина w , которая смежна с v и уровень которой превосходит число n ;
- (б) для любой вершины $v \in X_m$ существует ровно одно ребро, смежное с вершинами v и $\bar{v}$.

(4) Если Z конечно и связно и граф E является P -простым, то $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n$ либо $Z = (\bigcup_{n=1}^m X_n) \dot{\cup} \{\bar{v}\}$.

Доказательство. (1) Пусть $v \in X_n$, и пусть u и w — вершины, уровни которых не меньше числа n , смежные с v . Пусть e_1, e_2 — такие ребра, что ребро e_1 смежно с v и w , а ребро e_2 смежно с v и u . Тогда e_1 и e_2 не входят в число ребер уровня, не превосходящего $n - 1$, а потому принадлежат графу E_{n-1} . Следовательно, v не является экстремальной вершиной графа E_{n-1} ; это означает, что она не является вершиной уровня n .

2) Сначала докажем утверждение (а).

Пусть $n < m$, $u \in X_n$ и $w \in X_m$. Так как Z связно, то существует путь $(u_0 \dots u_p; e_1 \dots e_p)$ (здесь $e_i \neq e_j$), соединяющий вершины u и w . Если $p = 1$, то утверждение (а) доказано. Поэтому положим $p > 1$. Предположим, что уровень вершины u_1 не превосходит числа n , и пусть u_r — одна из вершин наименьшего уровня среди вершин $u_1, \dots, u_p$. Тогда u_r смежна с вершинами u_{r-1} и u_{r+1} , причем уровни этих двух вершин не меньше уровня вершины u_r , что невозможно в силу утверждения (1). Следовательно, уровень вершины u_1 больше чем n .

(б) Пусть u, v и w — вершины из X_m , и пусть $(u_0 \dots u_p; e_1 \dots e_p)$ — путь, ведущий из u в v . Согласно утверждению (1), ни одна из вершин $u_0, \dots, u_p$ не имеет уровня, меньшего числа m (и следовательно, каждая вершина u_i имеет уровень m). Таким образом, если $p \geq 2$, то вершина u_1 смежна с двумя вершинами уровня m , что невозможно в силу п. (1). Итак, $p = 1$ и, таким образом,

вершины u и v смежны. Аналогично, вершины v и w смежны. Таким образом, вершина v смежна с вершинами u и w , что невозможно — опять согласно утверждению (1). Следовательно, множество X_m состоит либо из одной вершины, либо из двух. Предположим, что $X_m = \{u\}$. Тогда любая другая вершина v , смежная с вершиной u , имеет уровень, меньший чем m . Таким образом, каждое ребро, смежное с вершиной u , имеет уровень, меньший чем m . Но тогда в $\mathbb{E}_{m-1}$ нет ребер, смежных с u , а это означает, что u не является экстремальной вершиной графа $\mathbb{E}_{m-1}$, а это равносильно тому, что $u \notin X_m$. Отсюда следует, что множество $X_m = \{u, v\}$ состоит из двух вершин. Так как множество Z связно, то существует путь $(u_0 \dots u_p; e_1 \dots e_p)$, который соединяет u и v , а тогда из утверждения (1) вытекает, что $p = 1$, и, следовательно, вершины u и v смежны. Если допустить, что существуют два ребра, смежных с обеими вершинами u и v , то получаем, что u (а также v) не является экстремальной вершиной графа $\mathbb{E}_{m-1}$ и, таким образом, $u \notin X_m$, что приводит нас к противоречию. Следовательно, имеется ровно одно ребро, смежное с вершинами u и v .

(3) Утверждение (а) доказывается так же, как утверждение 2(а).

(b) Пусть $u \in X_m$. Тогда вершина u смежна ровно с одним ребром e из $\mathbb{E}_{m-1}$. Пусть v — другая вершина, смежная с ребром e . Так как $e \in \mathbb{E}_{m-1}$, то или $v \in X_m$, или $v = \bar{v}$. Предположим, что $v \in X_m$. Так как $Z \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_{m-1})$ есть связное подмножество графа $\mathbb{E}_{m-1}$, то существует путь из вершины v в $\bar{v}$ (лежащий в $\mathbb{E}_{m-1}$). Таким образом, v смежна с u и еще с одной вершиной (лежащей в $\mathbb{E}_{m-1}$) и, следовательно, $v \notin X_m$; мы пришли к противоречию. Итак, $v = \bar{v}$ и, тем самым, u смежна с $\bar{v}$. Если мы допустим, что имеются два ребра, смежных с u и $\bar{v}$ одновременно, то получим, что u не является экстремальной вершиной в $\mathbb{E}_{m-1}$, другими словами, $u \notin X_m$. Таким образом, для каждой вершины $u \in X_m$ существует ровно одно ребро e , смежное с u и с $\bar{v}$.

(4) Так как граф E конечен и P -прост, то существует хотя бы одна экстремальная вершина v в E (в предположении, что $E^1 \neq \emptyset$), а потому $X_1 \neq \emptyset$. Так как множество Z конечно, то существует некоторая вершина максимального уровня. Пусть X_m — множество вершин максимального уровня.

Предположим, что $Z \neq \bigcup_{n=1}^m X_n$. Так как E является P -простым и Z связно, то $\mathbb{E}_m$ будет P -простым, а множество $Z \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)$ связно (в $\mathbb{E}_m$). Следовательно, так как $\mathbb{E}_m$ не содержит экстремальных вершин (ввиду того, что X_m — множество максимального уровня), каждая вершина из $Z \setminus \bigcup_{n=1}^m X_n$ смежна с двумя ребрами из $\mathbb{E}_m$. Так как Z конечно, то допустив, что $X \setminus \bigcup_{n=1}^m X_n$ содержит более одного элемента, мы получим цикл. Но цикла не может быть в силу P -простоты графа E . Отсюда вытекает, что множество $X \setminus \bigcup_{n=1}^m X_n$ содержит единственный элемент $\bar{v}$.

Замечание 3.5. Согласно предложению 3.4, если E есть P -простой связный граф и множество $r(E^1) \cup s(E^1)$ конечно, то

$$r(E^1) \cup s(E^1) = \bigcup_{n=1}^m X_n$$

или

$$r(E^1) \cup s(E^1) = \left(\bigcup_{n=1}^m X_n \right) \cup \{\bar{v}\}.$$

Однако множество $r(E^1) \cup s(E^1)$ может обладать указанным свойством, даже если оно бесконечно. Рассмотрим, например, следующий граф:

Это связный P -простой граф, но множество $r(E^1) \cup s(E^1)$ (в этом случае оно совпадает с E^0) бесконечно. В данном случае $X_1 = \{v_i : i \geq 1\}$, а это множество бесконечно, и $r(E^1) \cup s(E^1) = X_1 \cup \{v_0\}$.

§4. Графы, для которых представления ассоциированных с ними алгебр эквивалентны представлениям, построенным по ветвящимся системам

Согласно теореме 2.1, представление алгебры, ассоциированной с графом, в сепарабельном гильбертовом пространстве H унитарно эквивалентно представлению, построенному по ветвящейся системе, если в некоторых подпространствах из H (а именно, в подпространствах H_e и H_v) существуют базисы с определенными свойствами. Мы покажем ниже, что при некоторых ограничениях на граф E в H существует базис, требуемый теоремой 2.1. Всюду в этом параграфе мы придерживаемся терминологии предыдущего параграфа.

Теорема 4.1. Пусть $E = (E^0, E^1, r, s)$ — такой граф, что множество $Z = r(E^1) \cup s(E^1)$ связно; предположим, что $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n$ или $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n \cup \{\bar{v}\}$, где множества X_n те же, что в предложении 3.4. Пусть $\pi : C^*(E) \rightarrow B(H)$ есть $*$ -представление, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Для любых $e \in E^1$ и $v \in E^0$ рассмотрим подпространства $H_e := \pi(S_e S_e^*)(H)$ и $H_v := \pi(P_v)(H)$. Тогда существуют такие базисы B_e в H_e и B_v в H_v , что

(1) если $e \in s^{-1}(v)$, то $B_e \subseteq B_v$, и если $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$, то $B_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$;

(2) если $e \in r^{-1}(v)$, то $\pi(S_e)(B_v) = B_e$ (и, таким образом, базисы B_v и B_e удовлетворяют условиям $(B2B)$).

Доказательство. Прежде чем начать доказательство теоремы, сделаем несколько замечаний. Согласно предложению 3.4, каждая вершина $v \in X_n$, где $n < m$, смежна ровно с одной вершиной u уровня, превосходящего n . Если ребро e , смежное с $v \in X_n$ и с u (такое ребро единственно) удовлетворяет условию $r(e) = v$, то мы назовем v *концевой вершиной* множества X_n ; если же $s(e) = v$, то назовем v *начальной вершиной* множества X_n . Если $X = \bigcup_{n=1}^m X_n$, то по предложению 3.4 $X_m = \{u, v\}$ и существует ровно одно ребро e , смежное с u и с v одновременно. Тогда $r(e)$ есть *концевая вершина* и $s(e)$ — *начальная вершина* множества X_m . Если $X = \bigcup_{n=1}^m X_n \cup \{\bar{v}\}$, то по предложению 3.4 для любой вершины $v \in X_m$ существует единственное ребро e , смежное с v и

с $\bar{v}$ одновременно. Если в этом случае $r(e) = v$, то v есть концевая вершина множества X_m , а если $s(e) = v$, то v есть начальная вершина множества X_m .

Доказательство теоремы разобьем на два шага (дважды проведем индукцию по уровням вершин). На первом шаге покажем, что существует базис, удовлетворяющий условиям (1) и (2) для всех концевых вершин. На втором шаге мы модифицируем базис, полученный на первом шаге, таким образом, что условия (1) и (2) будут выполнены для всех вершин.

Шаг 1. Пусть v — вершина уровня 1 и e — то единственное ребро, которое смежно с v . Если v — концевая вершина в X_1 , то выберем базис B_v в H_v и определим базис B_e в H_e , полагая $B_e := \pi(S_e)(B_v)$. Для всех остальных вершин v и ребер e (любого уровня) выберем произвольные базисы B_v и B_e . Таким образом, для базисов B_v , $v \in E^0$, и B_e , $e \in E^1$, справедливо следующее утверждение: для любой концевой вершины $v \in X_1$ выполнены условия (1) и (2). Заметим, что условие (1) выполняется тривиальным образом.

Чтобы провести индукцию (по N), возьмем число $N \leq m-1$ и предположим, что существуют базисы $\tilde{B}_v$, $v \in E^0$, и $\tilde{B}_e$, $e \in E^1$, такие, что для всех концевых вершин $v \in X_k$, удовлетворяющих условию $k \leq N$, выполнены условия (1) и (2).

Чтобы завершить доказательство, мы должны показать, что существуют базисы $\bar{B}_v$, $v \in E^0$, и $\bar{B}_e$, $e \in E^1$, такие, что условия (1) и (2) выполнены для любой концевой вершины $v \in X_k$, удовлетворяющей условию $k \leq N+1$.

Итак, для любой концевой вершины $v \in X_{N+1}$ проделаем следующее: если $s^{-1}(v) = \emptyset$, то положим $B_v := \tilde{B}_v$, если $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$, положим $B_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} \tilde{B}_e$, а если $|s^{-1}(v)| = \infty$, то выберем такой базис B_v в H_v , что $\tilde{B}_e \subseteq B_v$ для любого $e \in s^{-1}(v)$. Этим способом мы получаем базис B_v для каждой концевой вершины v из X_{N+1} . Кроме того, для любой концевой вершины v из X_{N+1} и для каждого ребра $e \in r^{-1}(v)$ определим B_e равенством $B_e := \pi(S_e)(B_v)$. Наконец, для всех других вершин и ребер (произвольного уровня) положим $B_v := \tilde{B}_v$ и $B_e := \tilde{B}_e$.

Итак, базисы B_v , $v \in E^0$, и B_e , $e \in E^1$, обладают следующим свойством: если взять концевую вершину $v \in X_k$, где $k \leq N+1$, то условия (1) и (2) выполняются. Отсюда, рассуждая по индукции, получаем, что существуют базисы $\bar{B}_v$, $v \in E^0$, и $\bar{B}_e$, $e \in E^1$, со следующим свойством: если v — концевая вершина произвольного уровня, то условия (1) и (2) выполняются.

Шаг 2. Сейчас мы покажем, что построенные выше базисы можно модифицировать так, что получатся базисы со свойствами (1) и (2). С этой целью мы сначала модифицируем указанные базисы для начальных вершин из X_m , а затем покажем, каким образом переопределить базисы для начальных вершин низшего уровня (посредством индукции).

Итак, пусть μ — начальная вершина из X_m (если $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n$) или $\mu = \bar{v}$ (если $Z = \bigcup_{n=1}^m X_n \cup \{\bar{v}\}$). Определим базис B_μ следующим образом: если $0 < |s^{-1}(\mu)| < \infty$, положим $B_\mu := \bigcup_{f \in s^{-1}(\mu)} \bar{B}_f$, если $|s^{-1}(\mu)| = \infty$, определим B_μ так, что $\bar{B}_f \subseteq B_\mu$ при $f \in s^{-1}(\mu)$, а если $s^{-1}(\mu) = \emptyset$, положим $B_\mu := \bar{B}_\mu$.

Для любого ребра $e \in r^{-1}(\mu)$ положим $B_e := \pi(S_e)(B_\mu)$.

Для каждой начальной вершины w из X_m (здесь мы предполагаем, что $\mu = \bar{v}$) определим f_0 как ребро, смежное с w и с $\bar{v}$. Заметим, что $f_0 \in s^{-1}(w)$ и $f_0 \in r^{-1}(\bar{v})$, так как w — начальная вершина из X_m . Если $|s^{-1}(w)| < \infty$, то

положим (по определению) $B_w := B_{f_0} \cup \bigcup_{e \in s^{-1}(w) \setminus \{f_0\}} \overline{B_e}$; если же $|s^{-1}(w)| = \infty$, то выберем B_w так, что $B_{f_0}, \overline{B_e} \subseteq B_w$ для каждого ребра $e \in s^{-1}(w) \setminus \{f_0\}$.

Наконец, для всех остальных ребер e и вершин v положим $B_e := \overline{B_e}$ и $B_v := \overline{B_v}$.

Итак, базисы $B_v, v \in E^0, B_e, e \in E^1$, таковы, что для любой концевой вершины v произвольного уровня выполняются условия (1) и (2); кроме того, для любой начальной вершины w из X_m (а также для вершины $\bar{v}$) условия (1) и (2) выполняются. В частности, условия (1) и (2) выполняются для любой вершины из X_m (и, таким образом, мы произвели шаг 2 для X_m).

Предположим теперь, что существуют такие базисы $\tilde{B}_v, v \in E^0$, и $\tilde{B}_v, v \in E^1$, что условия (1) и (2) выполнены для каждой концевой вершины (произвольного уровня) и для всех вершин уровня, не меньшего, чем $m - N$ (включая вершину $\bar{v}$), где $m - N \geq 2$.

Мы должны показать, что существует такие базисы $B_v, v \in E^0$, и $B_e, v \in E^1$, что условия (1) и (2) выполнены для любой концевой вершины (произвольного уровня) и для всех вершин уровня, не меньшего чем $m - (N + 1)$. Для этого мы должны определить подходящие базисы B_v и B_e для начальных вершин v из $X_{m-(N+1)}$ и ребер $e \in r^{-1}(X_{m-(N+1)})$.

Пусть v — начальная вершина из $X_{m-(N+1)}$. Если $|s^{-1}(v)| < \infty$, положим $B_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} \tilde{B}_v$, а если $|s^{-1}(v)| = \infty$, определим B_v таким образом, что $\tilde{B}_f \subseteq B_v$ для каждого ребра из $f \in s^{-1}(v)$. Для каждого $e \in r^{-1}(v)$ положим $B_e := \pi(S_e)(B_{r(e)})$. Для всех остальных вершин и ребер (произвольного уровня) положим $B_u := \tilde{B}_u$ и $B_f := \tilde{B}_f$.

Итак, мы получили такие базисы $B_v, v \in E^0$, и $B_e, e \in E^1$, что выполнены условия (1) и (2) для любой концевой вершины (произвольного уровня), а также для всех вершин уровня, не меньшего числа $m - (N + 1)$; таким образом, мы доказали, что существуют базисы $B_v, v \in E^0$, и $B_e, e \in E^1$, удовлетворяющие условиям (1) и (2), что и требовалось.

Если задан граф E , то, согласно замечанию, сделанному после определения 3.2, множество E^0 можно представить как дизъюнктивное объединение

$$E^0 = \left(\bigcup_{i \in \Delta} Z_i \right) \dot{\cup} R,$$

где Δ — множество индексов, R — множество изолированных вершин и каждое множество Z_i связно. Из сказанного получаем

Следствие 4.2. Пусть дан граф $E = (E^0, E^1, r, s)$; тогда

$$E^0 = \left(\bigcup_{i \in \Delta} Z_i \right) \dot{\cup} R.$$

Предположим, что $Z_i = \bigcup_{n=1}^{m_i} X_n$ или $Z_i = \bigcup_{n=1}^{m_i} X_n \cup \{\bar{v}_i\}$ для каждого $i \in \Delta$, где множества X_n описаны в предложении 3.4. Тогда каждое представление $\pi: C^*(E) \rightarrow B(H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, унитарно эквивалентно представлению, построенному по E -ветвящейся системе.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 4.1, примененной к каждому графу $(s^{-1}(Z_i) \cup r^{-1}(Z_i), Z_i, r_i, s_i)$, где $s_i, r_i: s^{-1}(Z_i) \cup r^{-1}(Z_i) \rightarrow Z_i$ — ограничения отображений r, s , и из теоремы 2.1.

Пример 4.3. Каждое представление C^* -алгебры, ассоциированное со следующим графом E :

унитарно эквивалентно представлению, построенному по E -ветвящейся системе (так как E удовлетворяет условиям следствия 4.2).

Заметим, что класс C^* -алгебр, ассоциированных с графами, для которых мы можем указать базис, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1, существенно шире, чем класс, описанный в теореме 4.1. Например, граф, указанный в примере 2.2, не удовлетворяет условиям теоремы 4.1, но удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Далее, для любой диаграммы Браттели с обращенными направлениями на ребрах (где, таким образом, первая вершина есть сток) мы можем применить технику, аналогичную той, которая представлена в примере 2.2, и этим способом определить базис, удовлетворяющий условиям теоремы 4.1. Мы воздержимся от более подробного изложения, но надеемся, что читатель сумеет приложить приведенные идеи к этому случаю.

Еще одно из возможных применений последней теоремы связано с исследованием неприводимых представлений. Так как отношение унитарной эквивалентности сохраняет неприводимость, то для выяснения неприводимости представления C^* -алгебры $C^*(E)$ (для графа E , удовлетворяющего условиям следствия 4.2) достаточно выяснить, неприводимо ли представление, индуцированное графом E (следуя доказательству теоремы 2.1). Здесь возникает такой вопрос: при каких ограничениях на E -ветвящуюся систему соответствующее представление алгебры, ассоциированной с графом, будет неприводимо? Это открытый вопрос, к которому мы намерены вернуться в будущем.

В заключение сформулируем следующий вопрос: верна ли теорема 4.2 в общем случае? Другими словами, верно ли, что любое представление алгебры, ассоциированной с графом, эквивалентно представлению, построенному по некоторой ветвящейся системе?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Abe, K. Kawamura, *Recursive fermion system in Cuntz algebra. I. Embeddings of fermion algebra into Cuntz algebra*, Comm. Math. Phys., **228**:1 (2002), 85–101.
- [2] M. Abe, K. Kawamura, *Pseudo Cuntz algebra and recursive FP ghost system in string theory*, Internat. J. Modern Phys., **A18**:4 (2003), 607–625.
- [3] T. Bojdecki, L. G. Gorostiza, A. Talarczyk, *Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems. I. Long-range dependence*, Stochastic Process. Appl., **116**:1 (2006), 1–18.

- [4] O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen, *A connection between multiresolution wavelet theory of scale N and representations of the Cuntz algebra O_N* , in: *Operator Algebras and Quantum Field Theory* (Rome, 1996), Int. Press, Cambridge, MA, 1997, 151–163.
- [5] A. Devulder, *The speed of a branching system of random walks in random environment*, *Statist. Probab. Lett.*, **77**:18 (2007), 1712–1721.
- [6] G. Gierz, *Representation of spaces of compact operators and applications to the approximation property*, *Arch. Math.*, **30**:1 (1978), 622–628.
- [7] D. Gonçalves, D. Royer, *Graph algebras as subalgebras of the bounded operators in $L_2(\mathbb{R})$* , представлено к публикации; <http://arxiv.org/abs/0908.1055v1>.
- [8] D. Gonçalves, D. Royer, *Perron–Frobenius operators and representations of the Cuntz–Krieger algebras for infinite matrices*, *J. Math. Anal. Appl.*, **351** (2009), 811–818.
- [9] D. Gonçalves, D. Royer, *On the representations of Leavitt path algebras*, *J. Algebra*, **333** (2011), 258–272; <http://arxiv.org/abs/1006.2797v1>.
- [10] K. J. Hochberg, A. Greven, *On the use of the Laplace functional for two-level branching systems*, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **55**:2 (2009), 165–172.
- [11] T. Katsura, A. Sims, M. Tomforde, *Realization of AF-algebras as graph algebras, Exel–Laca algebras, and ultragraph algebras*, *J. Funct. Anal.*, **257**:5 (2009), 1589–1620.
- [12] K. Kawamura, *Representations of the Cuntz algebra O_2 arising from complex quadratic transformations—Annular basis of $L_2(C)$* , preprint RIMS, 2003, No. 1418.
- [13] K. Kawamura, *Three representations of the Cuntz algebra O_2 by a pair of operators arising from a $\mathbb{Z}^2$ -graded dynamical system*, preprint RIMS, 2003, No. 1415.
- [14] K. Kawamura, O. Suzuki, *Construction of orthonormal basis on self-similar sets by generalized permutative representations of the Cuntz algebras*, preprint RIMS, 2003, No. 1408.
- [15] J. A. López-Mimbela, A. Murillo-Salas, *Laws of large numbers for the occupation time of an age-dependent critical binary branching system*, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **6** (2009), 115–131.
- [16] N. J. Fowler, M. Laca, I. Raeburn, *The C^* -algebras of infinite graphs*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:8 (2000), 2319–2327.
- [17] T. Poomsa-ard, *Identities in universal graph algebras*, *Int. Math. Forum*, **4**:33–36 (2009), 1715–1722.
- [18] B. Salinier, R. Strandh, *Efficient simulation of forward-branching systems with constructor systems*, *J. Symbolic Comput.*, **22**:4 (1996), 381–399.

Departamento de Matematica,
Universidade Federal de Santa Catarina, Brazil
e-mail: daemig@gmail.com

Departamento de Matematica,
Universidade Federal de Santa Catarina, Brazil
e-mail: royer@mtm.ufsc.br

Поступило в редакцию
11 января 2010 г.