Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, Критерий безусловной базисности собственных векторов конечномерных возмущений вольтерровых операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 86–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 10:23:58

Критерий безусловной базисности собственных векторов конечномерных возмущений вольтерровых операторов*

© 2011. Г. М. ГУБРЕЕВ, А. А. ТАРАСЕНКО

Работа посвящается замечательному математику Б. С. Павлову в связи с его юбилеем. Оставляя в стороне другие области математики, отметим, что его вклад в теорию безусловных базисов из собственных векторов различных классов несамосопряженных операторов общеизвестен.

1. Обозначим через $\Omega^{(\text{exp})}$ класс операторов B в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \text{Ker } B^* = \{0\}$; 2) оператор B^{-1} генерирует полугруппу $\exp\{iB^{-1}t\}$, $t > 0$, класса C_0 ; 3) целая оператор-функция $(I - zB)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип роста.

Отметим, что антидиссипативные операторы B (т.е. такие, что $(B - B^*)/i \leq 0$), удовлетворяющие условиям 1) и 3), а также все операторы, подобные им, принадлежат $\Omega^{(\text{exp})}$.

В работе изучаются конечномерные возмущения K операторов $B \in \Omega^{(\text{exp})}$, т.е. операторы, задаваемые формулой

$$Kh = Bh + \sum_{k=1}^n (h, f_k) g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $\{f_k\}_1^n$, $\{g_k\}_1^n$ — линейно независимые системы векторов пространства $\mathfrak{H}$. В этой заметке, которая является продолжением работы [1], получен критерий безусловной базисности собственных векторов специальных возмущений вида (1) (w -возмущений).

Каждому оператору K отнесем целую м.-ф. (матрицу-функцию) Φ с элементами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z((I - zB)^{-1}g_j, f_k), \quad 1 \leq k, j \leq n. \quad (2)$$

Множество $\Lambda = \{\lambda_k\}$ корней функции $\det \Phi(z)$ совпадает с фредгольмовым спектром $F(K) := \{\mu_k^{-1} : \mu_k \in \sigma(K), \mu_k \neq 0\}$ оператора K . Для каждого $\lambda_k \in \Lambda$ введем обозначение $N_k = \text{Ker } \Phi(\lambda_k)$. Собственному числу λ_k^{-1} оператора K отвечает собственное подпространство

$$\mathfrak{N}_{\lambda_k} = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j (I - \lambda_k B)^{-1} g_j : c = \text{col}(c_j)_1^n, c \in N_k \right\}. \quad (3)$$

Очевидно, что $\dim \mathfrak{N}_{\lambda_k} = n - \text{rank } \Phi(\lambda_k)$. Таким образом, в дальнейшем речь идет о безусловной базисности собственных векторов и собственных подпространств вида (3).

---

*Первый автор получал поддержку в рамках госбюджетной темы Украины, номер 0110U002257.

Через $\mathcal{M}_n^2$ обозначается множество почти всюду положительных на вещественной оси $(n \times n)$ -матричных весов $w^2(x)$, удовлетворяющих (A_2) -условию Макенхаупта [2]

$$\sup_{\Delta} \|(M(w^{-2}))^{1/2}(M(w^2))^{1/2}\| < \infty, \quad M(w^{\pm 2}) := |\Delta|^{-1} \int_{\Delta} w^{\pm 2}(x) dx,$$

где Δ — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $|\Delta|$ — его длина. По оператору B и векторам $\{g_k\}_1^n$ построим строку

$$\mathcal{B}(z, h) = \text{row}((I - zB)^{-1}g_k, h)_{k=1}^n, \quad h \in \mathfrak{H}, z \in \mathbb{C}.$$

Определение. Будем говорить, что K есть w -возмущение оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$ ранга n , если существует вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, такой, что $\|\mathcal{B}(x, h)w^{-1}(x)\|$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ для каждого $h \in \mathfrak{H}$ и справедлива оценка снизу

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}(x, h)w^{-1}(x)\|^2 dx, \quad h \in \mathfrak{H},$$

с некоторой константой $m > 0$.

В дальнейшем изучаются только w -возмущения оператора B вида (1). Приведем соображения, которые оправдывают такое предположение. Во-первых, в случае $n = 1$ справедлив следующий результат.

Предложение 1. Пусть фредгольмов спектр одномерного возмущения оператора B удовлетворяет условию

$$\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \text{Im } \lambda_k < \infty. \quad (4)$$

Если семейство собственных подпространств оператора K образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то найдется скалярный (A_2) -вес $w^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, относительно которого K есть w -возмущение оператора B ранга 1.

Пусть м.-ф. $W_B(z)$ (порядка n) является характеристической [3] для антидиссипативного оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$, $\text{rank Im } B = n < \infty$. Тогда целая м.-ф. $\Theta_B(z) := W_B^*((\bar{z})^{-1})$ является внутренней в $\mathbb{C}_+$ [4]. Обозначим также через $\mathcal{F}$ множество всех аналитических в окрестности $z = 0$ функций $F(z)$, таких, что $F(0) \neq 0$.

Предложение 2. Пусть в формуле (1) оператор B антидиссипативен, $\text{rank Im } B = n$, g_k ($1 \leq k \leq n$) — произвольные векторы пространства $\mathfrak{H}$, а f_k допускают представления $f_k = F(B^*)u_k$, $1 \leq k \leq n$, $F \in \mathcal{F}$, где $\{u_k\}_1^n$ — некоторый базис подпространства $(\text{Im } B)\mathfrak{H}$. Пусть также при некотором $\delta > 0$ м.-ф. $e^{-i\delta z}\Theta_B(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$ и выполняется условие (4). Тогда если семейство собственных подпространств оператора K образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то найдется вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, относительно которого K есть w -возмущение ранга n оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$.

Существуют и другие случаи, на которых мы не останавливаемся, когда условие быть w -возмущением является необходимым для безусловной базисности собственных подпространств оператора K .

2. Итак, предполагается, что формулой (1) задается w -возмущение оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$. Для каждого веса $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ справедливы факторизации [2]

$$w^2(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} w_+^*(x + i0)w_+(x + i0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} w_-^*(x - i0)w_-(x - i0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где через $w_+(x + i0)$ ($w_-(x - i0)$) обозначены некасательные предельные значения внешней в $\mathbb{C}_+$ м.-ф. $w_+(z)$ (внешней в $\mathbb{C}_-$ м.-ф. $w_-(z)$) [4].

Обозначим через J_n множество целых внутренних в $\mathbb{C}_+$ м.-ф. порядка n . Пусть теперь K есть w -возмущение оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$ ранга n , а a — экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$. Доказывается, что среди всех левых делителей [3] $\tilde{\Theta}$ м.-ф. $e^{iaz}E_n$ существуют такие, что для каждого $h \in \mathfrak{H}$

$$\mathcal{B}(z, h)w_+^{-1}(z)\tilde{\Theta}(z) \in H_+^2(\mathbb{C}^n), \quad (6)$$

где $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ — векторный класс Харди в $\mathbb{C}_+$, а м.-ф. w_+ взята из факторизации (5) веса w^2 , который вместе с $\mathcal{B}(z, h)$ входит в определение w -возмущения. Имеет место

Теорема 1. *В множестве левых делителей $\tilde{\Theta}$ м.-ф. $e^{iaz}E_n$, для которых имеет место включение (6), существует «наименьший» $\Theta \in J_n$ в том смысле, что: 1) каждая м.-ф. $\tilde{\Theta}$ содержит Θ в качестве левого делителя; 2) включение (6) справедливо для $\tilde{\Theta} = \Theta$; 3) $\Theta(0) = E_n$. При выбранном весе $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ внутренняя м.-ф. Θ этими условиями определяется однозначно.*

Таким образом, каждое w -возмущение порождает пару $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, $\Theta \in J_n$. Можно доказать, что верно и обратное утверждение, т.е. каждой такой паре м.-ф. отвечает w -возмущение некоторого оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$. Сформулируем теперь результаты о безусловной базисности собственных векторов w -возмущения K . Теоремы о базисах доказаны нами в предположении, что существует прямая $\mathbb{R} + ib := \{x + ib, x \in \mathbb{R}\}$, $b \in \mathbb{R}$, для которой $\text{dist}\{\Lambda, \mathbb{R} + ib\} > 0$, где $\Lambda = F(K)$. Для упрощения формулировок будем считать, что $b = 0$, т.е.

$$\text{dist}(\Lambda, \mathbb{R}) > 0, \quad \Lambda_{\pm} := \Lambda \cap \mathbb{C}_{\pm}. \quad (7)$$

Далее, если оператору K отвечает пара w^2 , Θ , то имеют место факторизации

$$\Phi(z)w_+^{-1}(z)\Theta(z) = W_+(z)V_+(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (8)$$

$$\Phi(z)w_-^{-1}(z) = W_-(z)V_-(z), \quad z \in \mathbb{C}_- \quad (9)$$

где м.-ф. $\Phi(z)$ определяется формулой (2), $w_{\pm}$ входят в факторизацию (5), $W_{\pm}$ — внешние м.-ф. в областях $\mathbb{C}_{\pm}$ соответственно, а $V_{\pm}$ — внутренние в $\mathbb{C}_{\pm}$ м.-ф. Мы предполагаем также, что

$$\text{rank } \Phi(\lambda_k) = n - 1, \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad (10)$$

т.е. собственные подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_k}$ одномерны. И, наконец, через c_k , d_k обозначим векторы из $\mathbb{C}^n$, которые удовлетворяют системам уравнений

$$\Phi(\lambda_k)c_k = 0, \quad \Phi^*(\lambda_k)d_k = 0.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть K — произвольное w -возмущение ранга n оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$, которому отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, $\Theta \in J_n$. Пусть фредгольмов*

спектр Λ оператора K удовлетворяет условию (7), а также имеют место равенства (10). Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $W^2(x) := \Phi(x)w^{-2}(x)\Phi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет (A_2) -условию Макенхаупта;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = -iSp(\Theta'(0))$, $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = 0$;
- 3) справедливы неравенства

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda_+} \frac{(\operatorname{Im} \lambda_k) |(\Phi'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|\Theta^{-1}(\lambda_k)w_+(\lambda_k)c_k\| \|W_+^*(\lambda_k)d_k\|} > 0, \quad \inf_{\lambda_k \in \Lambda_-} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k| |(\Phi'(\lambda_k)c_k, d_k)|}{\|w_-(\lambda_k)c_k\| \|W_-^*(\lambda_k)d_k\|} > 0.$$

Тогда семейство собственных векторов оператора K образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$.

Обратно, если при некотором $\delta > 0$ м.-ф. $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то в случае безусловной базисности собственных векторов оператора K выполняются условия 1)–3).

Доказательство теоремы 2 основано на развитии подхода к исследованию конечномерных возмущений вольтерровых операторов, которое изложено в работе [1]¹⁾. Из этой статьи заимствовано понятие w -возмущения, а также соответствие таким возмущениям пары м.-ф. w^2 , Θ (теорема 1).

Объясним кратко смысл каждого из условий 1)–3) теоремы 2. Доказывается, что если выполнено условие 1), то оператор K подобен ортогональной сумме $K_+ \oplus (-K_-)$, где $K_{\pm}$ — некоторые диссипативные операторы с фредгольмовыми спектрами Λ_+ и $-\Lambda_- := \{-\lambda_k, \lambda_k \in \Lambda_-\}$ соответственно, причем $\operatorname{rank} \operatorname{Im} K_{\pm} \leq n$. Вместе условия 1)–2) влекут за собой полноту семейств собственных векторов операторов $K_{\pm}$ в соответствующих пространствах. Отсюда выводится, что при наличии условий 1)–2) оператор K обладает наследственной полнотой [6]. И, наконец, условие 3) равносильно тому, что системы собственных векторов операторов $K_{\pm}$ равномерно минимальны. В силу теоремы Трейля [7] эти системы образуют безусловные базисы пространств, в которых действуют операторы $K_{\pm}$. Отсюда вытекает, что из условий 1)–3) следует базисность собственных векторов w -возмущения K .

Отметим, что из условия 3) следует, что каждая из последовательностей $\Lambda_{\pm}$ есть объединение не более чем n подмножеств, каждое из которых удовлетворяет условию Карлесона [5]. Если $n = 1$, то условие 3) равносильно тому, что обе последовательности $\Lambda_{\pm}$ удовлетворяют условию Карлесона.

В случае произвольного $n > 1$ непосредственная проверка условия 3) сопряжена с техническими трудностями, однако положение в известной мере спасает теорема Никольского–Павлова [8] о сериях Карлесона. В пространстве $\mathbb{C}^n$ рассмотрим подпространства $L_k^+ = \Theta^{-1}(\lambda_k)w_+(\lambda_k)N_k$, $\lambda_k \in \Lambda_+$, и $L_k^- = w_-(\lambda_k)N_k$, $\lambda_k \in \Lambda_-$, где $N_k = \operatorname{Ker} \Phi(\lambda_k)$, а м.-ф. Θ , $w_{\pm}$ входят в факторизации (8), (9). Отметим, что мы не предполагаем здесь, что собственные подпространства одномерны. Последовательность $\{\nu_k\} \subseteq \Lambda_+$ называется серией Карлесона, если она удовлетворяет условию Карлесона и существует предел $P = \lim_{|\nu_k| \rightarrow \infty} P_k$, где

¹⁾Подробное изложение результатов из [1] будет опубликовано в журнале «Известия РАН», 2011, №2.

P_k — ортопроектор на соответствующее числу ν_k подпространство L_k^+ . Предположим, что последовательность Λ_+ является объединением попарно не пересекающихся серий Λ_+^j ($1 \leq j \leq k$), а P_j — предельный проектор вдоль Λ_+^j . Серии Λ_+^j называются асимптотически независимыми, если подпространства $P_j \mathbb{C}^n$ ($1 \leq j \leq k$) линейно независимы. Аналогичные понятия относятся также к последовательности Λ_- из $\mathbb{C}_-$. Из результатов работы [8] выводится следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для w -возмущения K имеет место условие (7). Если выполняются условия 1)–2) теоремы 2 и последовательности $\Lambda_\pm$ являются объединениями асимптотически независимых серий Карлесона, то семейство собственных подпространств оператора K образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 2.

1. Если положить в формуле (1)

$$\mathfrak{H} = L_2(0, a), \quad (Bh)(t) = -i \int_t^a h(s) ds, \quad (11)$$

$n = 1$, $g(t) \equiv 1$, то оператор K есть w -возмущение, которому отвечает пара $\Theta(z) = e^{iaz}$, $w^2(x) \equiv 1$. В этом случае в теореме 2 речь идет о базисности семейств экспонент в $L_2(0, a)$. Впервые эта теорема доказана Павловым [9].

2. Если $\mathfrak{H} = L_2([0, a], \mathbb{C}^n)$, а оператор B на каждую координату действует по формуле (11), то теорема 2, примененная к специальному w -возмущению с м.-ф. $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$, $w^2(x) \equiv E_n$, дает критерий базисности векторных экспонент, который находит многочисленные применения в задачах управления системами с распределенными параметрами. В случае $\Lambda_+ = \emptyset$ теорема 2 для указанных Θ , w^2 доказана в [10].

3. Задача Джрбашяна [11] о базисности в $L_2(0, a)$ линейных комбинаций функций Миттаг-Леффлера первого порядка роста решается применением теоремы 2 к оператору K , у которого оператор B задается формулой (11) и $g_k(t) = \Gamma^{-1}(\alpha_k)(a - t)^{\alpha_k - 1}$, $1/2 < \alpha_k < 3/2$, $1 \leq k \leq n$. Этому случаю отвечает м.-ф. $\Theta(z) = \exp\{iaz P_n\}$, где P_n — матрица порядка n , все элементы которой равны $1/n$, и вес $w^2(x) = \text{diag}\{|x|^{2(1-\alpha_k)}\}$.

4. К теореме 2 в случае, когда Θ — произвольная м.-ф. из J_n , $w^2(x) \equiv E_n$, сводится изучение базисности собственных функций краевой задачи $y'(x, \lambda) = i\lambda \mathcal{H}(x)y(x, \lambda)$, $y(0, \lambda) = Ay(a, \lambda)$, где м.-ф. $\mathcal{H}(x)$ больше или равна 0 п.в. на $[0, a]$ и A — обратимая матрица. К этому же случаю теоремы 2 сводится исследование спектральных свойств операторов $cB + dB^*$, где $c, d \in \mathbb{C}$, B — диссипативный вольтерров оператор, $\text{rank Im } B < \infty$.

5. Теорема 2 с произвольными $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ применяется для решения специальных задач интерполяции целыми функциями из весовых векторных классов Харди. Этому будет посвящена отдельная публикация.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, Функц. анализ и его прил., **42**:3 (2008), 85–89.
 [2] S. Treil, A. Volberg, J. Funct. Anal., **143**:2 (1997), 269–308. [3] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Наука, М., 1969. [4] Б.

Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970. [5] Д. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, 1984. [6] Н. К. Никольский, в кн.: *Теория операторов в функциональных пространствах*, Наука, Новосибирск, 1977, 240–282. [7] С. Р. Трейль, ДАН СССР, **288**:2 (1986), 308–312. [8] Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, Изв. АН СССР, **34**:1 (1970), 90–133. [9] Б. С. Павлов, ДАН СССР, **247**:1 (1979), 37–40. [10] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of Exponentials*, Cambridge Univ. Press, 1995. [11] М. М. Джрбашян, Изв. АН Арм. ССР, **5**:2 (1970), 71–96.

Полтавский национальный технический университет
e-mail: gubreev@yandex.ru

Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo, Mexico
e-mail: anauaeh@yahoo.com

Поступило в редакцию
13 сентября 2010 г.

УДК 517.5

Некоторые фазы осциллирующих интегралов*

© 2011. В. Н. КАРПУШКИН

Впервые приводится пример, когда верна гипотеза В. И. Арнольда о том, что справедливы равномерные оценки осциллирующих интегралов с максимальным показателем особенности и неверна его же гипотеза о полунепрерывности показателя особенности. Получена верхняя грубая оценка числа Милнора, при котором неверна последняя гипотеза. Соответствующий ей контрпример проще известного контрпримера А. Н. Варченко к гипотезе Арнольда о полунепрерывности показателя особенности. Это дает основание надеяться на то, что коразмерность и число Милнора, при которых гипотеза о полунепрерывности показателя особенности неверна, будут уменьшены.

Формулировка результатов. Осциллирующим интегралом $I(\tau, Q, \varphi)$ с фазой Q и амплитудой φ называется интеграл по $\mathbb{R}^n$ от $\varphi \exp(i\tau Q)$. Здесь $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dQ(\mathbb{O}) = 0$, Q аналитична в $\mathbb{O}$, φ — гладкая функция, такая, что $\varphi(\mathbb{O}) \neq 0$ и φ обращается в 0 вне достаточно малой окрестности точки $\mathbb{O}$, τ — большой вещественный параметр. Тогда $I(\tau, Q, \varphi)$ убывает при $\tau \rightarrow +\infty$ как $\tau^\beta \ln^p(\tau)$, где β — отрицательное рациональное число, p — целое число, $0 \leq p \leq n-1$, см. [3], [4]. Здесь β — показатель осцилляции ($\beta + n/2$ — показатель особенности, см. [3], [4]), а p — его кратность. Пара чисел (β, p) называется типом асимптотики осциллирующего интеграла с фазой Q .

Пусть $V(\delta, Q, c, A, \psi)$ — объем с фазой Q — интеграл от ψ по множеству $\{x \in A : c - \delta < Q(x) < c + \delta\}$, где A — достаточно малая окрестность точки $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Если $\beta > -1$, ψ — гладкая функция и $Q(\mathbb{O}) = c$, то объем при $\delta \rightarrow 0$ убывает как $\delta^{-\beta} \ln^p(\delta)$, где (β, p) — тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой Q , см. [3], [4].

Пусть $f_\delta = (\delta x_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$, $f = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$, $k > 1$ целое.

Пусть D_d — полицилиндр в $\mathbb{C}^3$ радиуса d с центром в $\mathbb{O} \in \mathbb{C}^3$. Пусть $V_d(\epsilon)$ — множество отображений $Q: (\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathbb{R})$, таких, что модуль каждого из них в D_d меньше ϵ и они аналитичны в D_d .

*Работа поддержана грантом НШ-8462.2010.1.