Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Об эйлеровых характеристиках многообразий особенностей волновых фронтов, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 09:12:56

and Analytic Functions, Operator Theory Adv. Appl., vol. 202, 2010, 321–336. [7] A. Yu. Karlovich, <http://arxiv.org/abs/1002.4813v1>. [8] V. Kokilashvili, S. Samko, Proc. A. Razmadze Math. Inst., **131** (2003), 61–78. [9] V. Kokilashvili, S. Samko, Proc. A. Razmadze Math. Inst., **138** (2005), 106–110. [10] V. Kokilashvili, V. Paataashvili, S. Samko, in: Operator Theory Adv. Appl., vol. 170 (dedicated to 70th birthday of Prof. I. B. Simonenko), Birkhäuser, Basel, 2007, 167–186. [11] V. Kokilashvili, N. Samko, S. Samko, Math. Nachr., **280**:9–10 (2007), 1145–1156. [12] В. С. Рабинович, Изв. РАН, сер. матем., **60**:6 (1996), 169–200. [13] V. Rabinovich, S. Samko, Integral Equations and Operator Theory, **60**:4 (2008), 507–537. [14] И. Б. Симоненко, Чинь Нгок Минь, *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость*, Изд-во Ростовского ун-та, 1986. [15] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**:3 (1965), 567–586; **29**:4 (1965), 757–782. [16] I. M. Spitkovsky, J. Funct. Anal., **105**:1 (1992), 129–143.

Национальный политехнический институт Мексики,
e-mail: vladimir.rabinovich@gmail.com

Поступило в редакцию
28 апреля 2010 г.

Университет Алгарве, Португалия
e-mail: ssamko@ualg.pt

УДК 515.16

Об эйлеровых характеристиках многообразий особенностей волновых фронтов*

© 2012. В. Д. СЕДЫХ

Все понятия и факты теории особенностей лежандровых отображений [1], которые мы здесь используем, кратко изложены в нашей предыдущей заметке [5].

Пусть B — гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n , E — гладкое $(2n-1)$ -мерное многообразие, снабженное контактной структурой, и $\rho: E \rightarrow B$ — лежандрово расслоение. Рассмотрим гладкое компактное (без края) лежандрово подмногообразие L в E и лежандрово отображение $f = \rho \circ i: L \rightarrow B$, где $i: L \rightarrow E$ — тождественное вложение. Образ $\mathcal{F} = f(L)$ отображения f называется (волновым) фронтом. Мы будем говорить, что утверждение, касающееся лежандровых отображений или их фронтов, справедливо для отображения f или фронта $\mathcal{F}$ общего положения, если оно имеет место для вложений i из некоторого открытого всюду плотного подмножества в пространстве всех вложений $i: L \rightarrow E$ (в C^∞ -топологии).

При $n \leq 6$ особенности отображения f общего положения лежандрово эквивалентны особенностям в нуле отображения

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\bar{t}, \bar{q}) \mapsto \left(-S(\bar{t}, \bar{q}) + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), \bar{q} \right),$$

где $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\bar{q} = (q_{k+1}, \dots, q_{n-1})$, а $S = S(\bar{t}, \bar{q})$ — гладкая функция одного из следующих типов (μ целое):

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00388.

$$\begin{aligned}
A_\mu : \quad S &= S(t_1, \bar{q}) = t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1}t_1^{\mu-1} + \cdots + q_2t_1^2, & 1 \leq \mu \leq n, \\
D_\mu^\pm : \quad S &= S(t_1, t_2, \bar{q}) = t_1^2t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1}t_2^{\mu-2} + \cdots + q_3t_2^2, & 4 \leq \mu \leq n, \\
E_6 : \quad S &= S(t_1, t_2, \bar{q}) = t_1^3 + t_2^4 + q_5t_1t_2^2 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2, & \mu = 6 \leq n
\end{aligned}$$

(см. [1]). Число μ называется коразмерностью особенности. Если μ нечетное, то особенности типов D_μ^+ и D_μ^- лежандрово эквивалентны (обозначаются через D_μ). Лежандровы особенности остальных типов попарно лежандрово не эквивалентны.

Пусть $\mathbb{S}$ — свободная абелева мультипликативная полугруппа, образующими которой служат символы A_μ ($\mu = 1, 2, \dots$), D_{2+2k}^- , D_{2+2k}^+ , D_{3+2k} ($k = 1, 2, \dots$), E_6 . Рассмотрим произвольный неединичный элемент $\mathcal{A} = X_1 \cdots X_p \in \mathbb{S}$, где $X_1, \dots, X_p$ — любой набор образующих полугруппы $\mathbb{S}$. Фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность типа $\mathcal{A}$ в точке $y \in B$, если: 1) $f^{-1}(y)$ состоит из p попарно различных точек; 2) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$, такой, что f имеет в этих точках особенности типов $X_1, \dots, X_p$ соответственно. Сумма коразмерностей особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется коразмерностью особенности типа $\mathcal{A}$ и обозначается через $\text{codim } \mathcal{A}$.

Если $n \leq 6$, то фронт $\mathcal{F}$ общего положения имеет особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, таких, что $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$, во всех своих точках. Множество $\mathcal{A}\mathcal{F}$ точек, в которых $\mathcal{F}$ имеет особенность типа $\mathcal{A}$, является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в B . Эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}\mathcal{F})$ многообразия $\mathcal{A}\mathcal{F}$ (альтернированная сумма чисел Бетти группы гомологий с компактными носителями) обозначается далее через $\chi(\mathcal{A})$.

Теорема 1. Для любого компактного фронта $\mathcal{F}$ общего положения в гладком многообразии размерности $n \leq 6$ справедливы следующие утверждения.

1) Если n нечетное, то

$$\begin{aligned}
\chi(A_2) &= \chi(A_3) + \chi(A_2A_1) - \frac{5}{2}\chi(D_5) - \chi(D_4^+A_1) - 3\chi(D_4^-A_1) - 2\chi(A_5) \\
&\quad - 2\chi(A_4A_1) - \frac{3}{2}\chi(A_3A_2) - 2\chi(A_3A_1^2) - 2\chi(A_2^2A_1) - 2\chi(A_2A_1^3), \\
\chi(A_1^2) &= \frac{1}{2}\chi(A_3) + \chi(A_2A_1) + 3\chi(A_1^3) - \frac{7}{2}\chi(D_5) - \frac{1}{2}\chi(D_4^+A_1) - \frac{19}{2}\chi(D_4^-A_1) \\
&\quad - 2\chi(A_5) - \frac{7}{2}\chi(A_4A_1) - \frac{5}{2}\chi(A_3A_2) - \frac{11}{2}\chi(A_3A_1^2) - 4\chi(A_2^2A_1) \\
&\quad - 9\chi(A_2A_1^3) - 20\chi(A_1^5),
\end{aligned}$$

$$\chi(D_4^+) = \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(D_4^+A_1),$$

$$\chi(D_4^-) = \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(D_4^-A_1),$$

$$\chi(A_4) = \chi(D_5) + \chi(A_5) + \chi(A_4A_1),$$

$$\begin{aligned}
\chi(A_3A_1) &= \chi(D_5) + \chi(D_4^+A_1) + 3\chi(D_4^-A_1) + \chi(A_5) + \chi(A_4A_1) + \chi(A_3A_2) \\
&\quad + 2\chi(A_3A_1^2),
\end{aligned}$$

$$\chi(A_2^2) = \frac{1}{2}\chi(A_5) + \chi(A_3A_2) + \chi(A_2^2A_1),$$

$$\chi(A_2A_1^2) = \frac{1}{2}\chi(D_5) + \chi(A_4A_1) + \frac{1}{2}\chi(A_3A_2) + \chi(A_3A_1^2) + 2\chi(A_2^2A_1) + 3\chi(A_2A_1^3),$$

$$\chi(A_1^4) = \chi(D_4^-A_1) + \frac{1}{2}\chi(A_3A_1^2) + \chi(A_2A_1^3) + 5\chi(A_1^5).$$

Эйлера характеристика $\chi(\mathcal{F})$ фронта $\mathcal{F}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}) = & \chi(A_1) - \frac{1}{2}[\chi(A_3) + 2\chi(A_2A_1) + 4\chi(A_1^3)] + \frac{1}{2}[7\chi(D_5) + \chi(D_4^+A_1) \\ & + 17\chi(D_4^-A_1) + 5\chi(A_5) + 7\chi(A_4A_1) + 5\chi(A_3A_2) \\ & + 10\chi(A_3A_1^2) + 8\chi(A_2^2A_1) + 16\chi(A_2A_1^3) + 32\chi(A_1^5)].\end{aligned}$$

2) Если n четное, то

$$\begin{aligned}\chi(A_1) = & \chi(A_2) + 2\chi(A_1^2) - 5\chi(D_4^-) - 2\chi(A_4) - \frac{5}{2}\chi(A_3A_1) - 2\chi(A_2^2) \\ & - 4\chi(A_2A_1^2) - 8\chi(A_1^4) + 13\chi(E_6) + 7\chi(D_6^+) + 27\chi(D_6^-) + 22\chi(D_5A_1) \\ & + \frac{5}{2}\chi(D_4^+A_2) + \frac{51}{2}\chi(D_4^-A_2) + 5\chi(D_4^+A_1^2) + 51\chi(D_4^-A_1^2) + 9\chi(A_6) \\ & + 14\chi(A_5A_1) + \frac{21}{2}\chi(A_4A_2) + 21\chi(A_4A_1^2) + 10\chi(A_3^2) + \frac{31}{2}\chi(A_3A_2A_1) \\ & + 31\chi(A_3A_1^3) + 12\chi(A_3^2) + 24\chi(A_2^2A_1^2) + 48\chi(A_2A_1^4) + 96\chi(A_1^6), \\ \chi(A_3) = & \chi(D_4^+) + 3\chi(D_4^-) + \chi(A_4) + \chi(A_3A_1) - 3\chi(E_6) - 2\chi(D_6^+) - 7\chi(D_6^-) \\ & - 4\chi(D_5A_1) - \chi(D_4^+A_2) - 3\chi(D_4^-A_2) - 2\chi(D_4^+A_1^2) - 6\chi(D_4^-A_1^2) \\ & - 2\chi(A_6) - 2\chi(A_5A_1) - \chi(A_4A_2) - 2\chi(A_4A_1^2) - \chi(A_3^2) \\ & - \chi(A_3A_2A_1) - 2\chi(A_3A_1^3), \\ \chi(A_2A_1) = & \chi(A_4) + \chi(A_3A_1) + 2\chi(A_2^2) + 2\chi(A_2A_1^2) - 5\chi(E_6) - 3\chi(D_6^+) - 7\chi(D_6^-) \\ & - \frac{11}{2}\chi(D_5A_1) - \chi(D_4^+A_2) - 8\chi(D_4^-A_2) - 2\chi(D_4^+A_1^2) - 6\chi(D_4^-A_1^2) \\ & - 4\chi(A_6) - 5\chi(A_5A_1) - 5\chi(A_4A_2) - 6\chi(A_4A_1^2) - 4\chi(A_3^2) \\ & - \frac{11}{2}\chi(A_3A_2A_1) - 6\chi(A_3A_1^3) - 6\chi(A_2^3) - 8\chi(A_2^2A_1^2) - 8\chi(A_2A_1^4), \\ \chi(A_1^3) = & \chi(D_4^-) + \frac{1}{2}\chi(A_3A_1) + \chi(A_2A_1^2) + 4\chi(A_1^4) - \frac{3}{2}\chi(E_6) - \chi(D_6^+) - 5\chi(D_6^-) \\ & - 5\chi(D_5A_1) - \frac{1}{2}\chi(D_4^+A_2) - \frac{11}{2}\chi(D_4^-A_2) - \chi(D_4^+A_1^2) - 16\chi(D_4^-A_1^2) \\ & - \chi(A_6) - \frac{5}{2}\chi(A_5A_1) - \frac{3}{2}\chi(A_4A_2) - 5\chi(A_4A_1^2) - 2\chi(A_3^2) \\ & - \frac{7}{2}\chi(A_3A_2A_1) - \frac{19}{2}\chi(A_3A_1^3) - 2\chi(A_2^3) - 6\chi(A_2^2A_1^2) - 16\chi(A_2A_1^4) \\ & - 40\chi(A_1^6), \\ \chi(D_5) = & \chi(E_6) + \chi(D_6^+) + \chi(D_6^-) + \chi(D_5A_1), \\ \chi(D_4^+A_1) = & \chi(D_6^+) + \frac{1}{2}\chi(D_5A_1) + \chi(D_4^+A_2) + 2\chi(D_4^+A_1^2), \\ \chi(D_4^-A_1) = & \chi(D_6^-) + \frac{1}{2}\chi(D_5A_1) + \chi(D_4^-A_2) + 2\chi(D_4^-A_1^2), \\ \chi(A_5) = & \chi(E_6) + 2\chi(D_6^-) + \chi(A_6) + \chi(A_5A_1), \\ \chi(A_4A_1) = & \chi(E_6) + \chi(D_5A_1) + \chi(A_6) + \chi(A_5A_1) + \chi(A_4A_2) + 2\chi(A_4A_1^2), \\ \chi(A_3A_2) = & \chi(D_6^+) + \chi(D_6^-) + \chi(D_4^+A_2) + 3\chi(D_4^-A_2) \\ & + \chi(A_6) + \chi(A_4A_2) + 2\chi(A_3^2) + \chi(A_3A_2A_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(A_3 A_1^2) &= \chi(D_6^-) + \chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^+ A_1^2) + 3\chi(D_4^- A_1^2) \\
&\quad + \chi(A_5 A_1) + \chi(A_4 A_1^2) + \chi(A_3^2) + \chi(A_3 A_2 A_1) + 3\chi(A_3 A_1^3), \\
\chi(A_2^2 A_1) &= \frac{1}{2}\chi(E_6) + \frac{1}{2}\chi(A_5 A_1) + \chi(A_4 A_2) + \chi(A_3 A_2 A_1) + 3\chi(A_2^3) + 2\chi(A_2^2 A_1^2), \\
\chi(A_2 A_1^3) &= \frac{1}{2}\chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^- A_2) \\
&\quad + \chi(A_4 A_1^2) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_2 A_1) + \chi(A_3 A_1^3) + 2\chi(A_2^2 A_1^2) + 4\chi(A_2 A_1^4), \\
\chi(A_1^5) &= \chi(D_4^- A_1^2) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_1^3) + \chi(A_2 A_1^4) + 6\chi(A_1^6).
\end{aligned}$$

Эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F})$ фронта $\mathcal{F}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{F}) &= -\chi(A_1^2) + 2\chi(D_4^-) + \chi(A_4) + \chi(A_3 A_1) + \chi(A_2^2) + 2\chi(A_2 A_1^2) + 5\chi(A_1^4) \\
&\quad - 6\chi(E_6) - 3\chi(D_6^+) - 13\chi(D_6^-) - 11\chi(D_5 A_1) - \chi(D_4^+ A_2) - 13\chi(D_4^- A_2) \\
&\quad - 2\chi(D_4^+ A_1^2) - 28\chi(D_4^- A_1^2) - 4\chi(A_6) - 7\chi(A_5 A_1) - 5\chi(A_4 A_2) \\
&\quad - 11\chi(A_4 A_1^2) - 5\chi(A_3^2) - 8\chi(A_3 A_2 A_1) - 17\chi(A_3 A_1^3) - 6\chi(A_2^3) \\
&\quad - 13\chi(A_2^2 A_1^2) - 28\chi(A_2 A_1^4) - 61\chi(A_1^6).
\end{aligned}$$

В случае фронтов, имеющих лишь особенности типов $A_{\mu_1} \dots A_{\mu_p}$ (коранга 1), теорема 1 приводит к формулам, найденным в [3].

Замечание. Аналогично [4] можно показать, что любое линейное соотношение с вещественными коэффициентами между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей волнового фронта, справедливое для всех компактных фронтов общего положения во всех пространствах размерности $n \leq 6$, является вещественной линейной комбинацией соотношений из теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

Теорема 2. Для любого компактного фронта $\mathcal{F}$ общего положения в гладком многообразии размерности $n \leq 6$ и для любого неединичного элемента $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, такого, что $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$,

$$\sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_{\mathcal{F}}) = \begin{cases} 2(-1)^n \chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}), & \text{если } \text{codim } \mathcal{A} \equiv n-1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2}, \end{cases}$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{S}$, таким, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$, а $J_{\mathcal{A}}(X)$ — индекс примыкания особенностей типа X к особенностям типа $\mathcal{A}$.

Эта формула следует из аддитивности эйлеровой характеристики. Индексы $J_{\mathcal{A}}(X)$ вычислены в [5].

Следствие 3. Числа изолированных особенностей типов D_5 , A_5 , $A_3 A_2$ и $A_3 A_1^2$ у любого компактного фронта общего положения в 5-мерном пространстве являются четными. Числа изолированных особенностей типов $D_5 A_1$, $A_3 A_2 A_1$ и $A_3 A_1^3$ у любого компактного фронта общего положения в 6-мерном пространстве являются четными; числа особенностей типов E_6 и $A_5 A_1$ имеют одинаковую четность.

Условия сосуществования особенностей волновых фронтов, указанные в следствии 3, вытекают также из свойств комплекса лежандровых мультиособенностей, построенного в [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
[2] В. А. Васильев, *Лагранжесвы и лежандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000. [3] В. Д. Седых, Функци. анализ и его прил., **37**:2 (2003), 52–64.
[4] В. Д. Седых, Функци. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 73–78. [5] В. Д. Седых, Функци. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 88–91.

РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина
e-mail: vdsedykh@gmail.com

Поступило в редакцию
30 сентября 2009 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 23.12.2011. Подписано к печати 27.01.2012. Формат 70 × 100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,6 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 202 экз. Заказ 2072.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6