Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Никишкин, Об оценках решений краевых задач для эллиптических систем в слое, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 60–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:49:59

Об оценках решений краевых задач для эллиптических систем в слое*

© 2011. В. А. Никишкин

*Посвящается памяти моего учителя
Владимира Александровича Кондратьева*

Рассматриваются общие краевые задачи для эллиптических систем в слое, т. е. в области

$$\Pi = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in (a, b)\}, \quad -\infty < a < b < +\infty, n \geq 3.$$

Предполагается выполненным условие Лопатинского. Установлены теоремы о разрешимости, получены оценки решений.

Общие краевые задачи для эллиптических систем в областях с гладкой границей рассматривались, в частности, в работах [9]–[12].

Фундаментальная статья В. А. Кондратьева [13] положила начало исследованиям эллиптических краевых задач в областях, границы которых содержат особенности — углы, конические точки, ребра и т. п. Общая теория краевых задач для эллиптических систем в таких областях содержится в [8].

В работе [2] рассматриваются решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{i} \frac{du}{dt} - Au = f,$$

где $u(t)$ — функции со значениями в некотором банаховом пространстве, и изучается поведение решений при $t \rightarrow +\infty$. Основные предположения этой работы касаются области регулярности в комплексной λ -плоскости резольвенты

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

оператора A . Получена экспоненциальная асимптотика решений. В частности, изучена область регулярности резольвенты и получена экспоненциальная асимптотика решений эллиптических краевых задач в цилиндрических областях.

Постановка задачи. Введем обозначения $D_\mu = -i \partial / \partial x_\mu$ ($\mu = 1, \dots, n$), $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$, $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = a\}$, $\Gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = b\}$.

В области Π рассмотрим систему уравнений

$$A(D_1, \dots, D_n)w(x) = \tilde{f}(x) \quad (x \in \Pi). \quad (1)$$

*Исследования поддержаны РФФИ, грант 08-01-00819-а, и Министерством образования и науки, грант АВП РНП 2.1.1/7161.

Здесь w и $\tilde{f}$ — векторы-столбцы высоты N , а A — квадратная матрица порядка N , состоящая из линейных дифференциальных операторов с постоянными комплексными коэффициентами. Через k обозначим наивысший порядок операторов, входящих в $A(D_1, \dots, D_n)$. В дальнейшем будет предполагаться, что Nk четно.

На границе $\Gamma^\pm$ ставятся условия

$$B_\nu^\pm(D_1, \dots, D_n)w(x)|_{x \in \Gamma^\pm} = \tilde{g}_\nu^\pm(x') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2). \quad (2)$$

Здесь $B_\nu^\pm(D_1, \dots, D_n)$ — строки длины N , состоящие из линейных дифференциальных операторов с постоянными комплексными коэффициентами. Через $m_\nu^\pm$ ($m_\nu^\pm < k$) обозначим наивысший порядок операторов в строке.

При замене D_j на ξ_j ($j = 1, \dots, n$) операторы A и $B_\nu^\pm$ переходят в полиномиальные матрицу $A(\xi)$ и строки $B_\nu^\pm(\xi)$. Обозначим через $A_0(\xi)$ и $B_{\nu 0}^\pm(\xi)$ главные части матрицы $A(\xi)$ и строк $B_\nu^\pm(\xi)$, составленные из однородных полиномов степеней k и $m_\nu^\pm$.

Рассмотрим прямое произведение N пространств Соболева $H^s(\Pi)$ с нормой

$$\|v\|_s = \|v\|_{s, \Pi} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b \left(\sum_{q+t=0}^s |\zeta|^{2t} |D_n^q Fv|^2 \right) d\zeta dx_n \right)^{1/2},$$

где Fv — преобразование Фурье по x' , задаваемое формулой

$$Fv = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\zeta x'} v dx'.$$

Рассмотрим также прямые произведения $Nk/2$ пространств $H^s(\Gamma^\pm)$ для дробных s с нормой

$$\|v\|_s = \|v\|_{s, \Gamma^\pm} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\zeta|^{2s}) |Fv|^2 d\zeta \right)^{1/2}.$$

Обозначим эти пространства тоже через $H^s(\Pi)$ и $H^s(\Gamma^\pm)$. Квадрат нормы вектора из H^s равен сумме квадратов норм его компонент.

Матрица A является эллиптической ($\det A_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) и правильной, т. е. уравнение $\det A_0(\xi', \lambda) = 0$ относительно λ имеет (при ненулевых ξ') $Nk/2$ решений в верхней полуплоскости и столько же в нижней.

Условие 1 (условие Лопатинского). Введем две локальные системы координат с началом в точках a и b соответственно и осью y , направленной внутрь отрезка $[a, b]$. Рассмотрим пространство решений системы

$$A_0\left(\xi', -i\frac{d}{dy}\right)v(\xi', y) = 0, \quad y > 0,$$

стремящихся к нулю при $y \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными. Условие заключается в том, что в этом пространстве система имеет единственное решение (равное нулю), удовлетворяющее начальному условию

$$B_{0\nu}^+\left(\xi', -i\frac{d}{dy}\right)v(\xi', y)\Big|_{y=0} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2)$$

(соответственно

$$B_{0\nu}^-\left(\xi', -i\frac{d}{dy}\right)v(\xi', y)\Big|_{y=0} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2).$$

Обозначим через $M(\gamma, p)$ плоскость в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ параметров ξ' , задаваемую соотношениями

$$\operatorname{Im} \xi_j = p_j, \quad p_j = \text{const} \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad \sum_{j=1}^{n-1} (p_j)^2 = \gamma^2, \quad \gamma = \text{const}.$$

Предполагается также, что выполнено следующее

Условие 2. Задача

$$A(\xi', D_n)u(\xi', x_n) = 0, \quad (3)$$

$$B_\nu^+(\xi', D_n)u(\xi', x_n)|_{x_n=a} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2), \quad (4)$$

$$B_\nu^-(\xi', D_n)u(\xi', x_n)|_{x_n=b} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2) \quad (5)$$

имеет только тривиальное решение для $\xi' \in M(\gamma, p)$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Пусть $\gamma \geq 0$, $l \geq k$, и пусть в задаче (1)–(2) $A(D_1, \dots, D_n)$ — правильная эллиптическая система операторов, причем выполнены условия 1 и 2. Тогда для любых функций $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}_\nu^+(x')$, $\tilde{g}_\nu^-(x')$, таких, что $V_\gamma(x')\tilde{f} \in H^{l-k}(\Pi)$, $V_\gamma(x')\tilde{g}_\nu^+ \in H^{l-m_\nu^+-1/2}(\Gamma^+)$, $V_\gamma(x')\tilde{g}_\nu^- \in H^{l-m_\nu^--1/2}(\Gamma^-)$, существует одно и только одно решение $w(x)$ задачи (1)–(2), такое, что $V_\gamma(x')w \in H^l(\Pi)$. При этом имеет место оценка

$$\|V_\gamma w\|_l \leq C \left(\|V_\gamma \tilde{f}\|_{l-k} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|V_\gamma \tilde{g}_\nu^+\|_{l-m_\nu^+-1/2} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|V_\gamma \tilde{g}_\nu^-\|_{l-m_\nu^--1/2} \right), \quad (6)$$

где $V_\gamma(x') = (\gamma|x'|)^{(3-n)/2} I_{(n-3)/2}(\gamma|x'|)$, $I_s(z)$ — модифицированная функция Бесселя [14], а константа C не зависит от w , $\tilde{f}$, $\tilde{g}_\nu^+$, $\tilde{g}_\nu^-$.

Для доказательства теоремы 1 потребуются теорема 2, доказательство которой с небольшими изменениями аналогично доказательству соответствующих утверждений для систем с одним параметром в работе [1].

Теорема 2. Пусть $l \geq k$ и $A(\xi', D_n)$ — правильная матрица, состоящая из дифференциальных операторов с постоянными комплексными коэффициентами, такая, что $\det A_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Для задачи (3)–(5) выполнено условие Лопатинского. Тогда при $|\xi'| \geq \xi_0$ (где ξ_0 — достаточно большое положительное число) для любой функции $f \in H^{l-k}(a, b)$ и любых $g_\nu^+(\xi')$, $g_\nu^-(\xi')$ ($\nu = 1, \dots, Nk/2$) существует одно и только одно решение задачи

$$A(\xi', D_n)u(\xi', x_n) = f(\xi', x_n), \quad (7)$$

$$B_\nu^+(\xi', D_n)u(\xi', x_n)|_{x_n=a} = g_\nu^+(\xi') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2), \quad (8)$$

$$B_\nu^-(\xi', D_n)u(\xi', x_n)|_{x_n=b} = g_\nu^-(\xi') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2), \quad (9)$$

принадлежащее $H^l(a, b)$. При этом имеет место оценка

$$\|u\|_l + |\xi'|^l \|u\|_0 \leq C \left(\|f\|_{l-k} + |\xi'|^{l-k} \|f\|_0 + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} (1 + |\xi'|^{l-m_\nu^+ - 1/2}) |g_\nu^+| + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} (1 + |\xi'|^{l-m_\nu^- - 1/2}) |g_\nu^-| \right), \quad (10)$$

где константа C не зависит от u, f, g_ν, ξ' , но зависит от ξ_0 .

Замечание 1 [2]. Подставим в операторы (7)–(9) $e^{i\theta_j} \xi_j$ вместо ξ_j ($j = 1, \dots, n-1$). Тогда если θ_j или $\pi - \theta_j$ ($j = 1, \dots, n-1$) вещественны и достаточно малы, то для полученных операторов по-прежнему будут выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, утверждение теоремы 2 верно, если $|\xi'| \geq \xi_0$, $|\arg(\pm \xi_j)| \leq \delta$ (где $j = 1, \dots, n-1$, ξ_0 — достаточно большое положительное число, а δ достаточно мало).

Замечание 2. Рассмотрим операторную вектор-функцию

$$U(\xi') = (A(\xi', D_n), B_\nu^+(\xi', D_n), B_\nu^-(\xi', D_n)),$$

которая действует из $H^l(a, b)$ в $H^{l-k}(a, b) \times \mathbb{R}^{Nk}$. По теореме 2 и замечанию 1, если $|\xi'| \geq \xi_0$, $|\arg(\pm \xi_j)| \leq \delta$ (где $j = 1, \dots, n-1$, ξ_0 — достаточно большое положительное число, а δ достаточно мало), то существует ограниченный оператор $R(\xi')$ (резольвента задачи (7)–(9)), который действует из $H^{l-k}(a, b) \times \mathbb{R}^{Nk}$ в $H^l(a, b)$, такой, что

$$U(\xi')R(\xi') = E.$$

Обозначим через

$$y_\eta(\xi', x_n) = (y_{1\eta}(\xi', x_n), \dots, y_{N\eta}(\xi', x_n)) \quad (\eta = 1, \dots, Nk) \quad (11)$$

фундаментальную систему решений системы (3), определенную начальными условиями $y_\eta^{(\mu-1)}(\xi', 0) = \delta_{\mu, \eta}$ ($\mu = 1, \dots, k$), в которых при каждом η только одно из чисел $\delta_{\mu, \eta}$ равно 1, а остальные равны 0.

Коэффициенты оператора в (3) являются полиномами от параметров ξ' , поэтому из [3] (гл. 1, §8, задача 7) следует, что функции из фундаментальной системы решений (11) для любого фиксированного $x_n \in [a, b]$ являются целыми аналитическими функциями параметров ξ' . Обозначим через $Y(\xi', x_n) = (y_\eta^{(\mu-1)}(\xi', x_n))$ матрицу этой фундаментальной системы.

Для функции $f(\xi', x_n)$, не равной нулю тождественно, определим частное решение $u_0(\xi', x_n)$ системы (7) по формуле

$$u_0(\xi', x_n) = Y(\xi', x_n) \int_a^{x_n} Y^{-1}(\xi', t) f(\xi', t) dt. \quad (12)$$

Таким образом, решение $u(\xi', x_n)$ задачи (7)–(9) можно записать в виде $u = u_0 + u_1$, где $u_1(\xi', x_n)$ удовлетворяет системе

$$A(\xi', D_n)u_1(\xi', x_n) = 0, \quad (13)$$

$$B_\nu^+(\xi', D_n)(u_1(\xi', x_n) + u_0(\xi', x_n))|_{x_n=a} = g_\nu^+(\xi') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2), \quad (14)$$

$$B_\nu^-(\xi', D_n)(u_1(\xi', x_n) + u_0(\xi', x_n))|_{x_n=b} = g_\nu^-(\xi') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2). \quad (15)$$

Для $u_1(\xi', x_n)$ справедливо представление

$$u_1(\xi', x_n) = \sum_{\eta=1}^{Nk} C_\eta(\xi') y_\eta(\xi', x_n); \quad (16)$$

здесь $C_\eta(\xi')$ определяются после подстановки (16) в (13)–(15). Решение будет единственным тогда и только тогда, когда определитель системы для $C_\eta(\xi')$

$$\begin{vmatrix} B_1^+ y_1(a) & \dots & B_1^+ y_{Nk}(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_{Nk/2}^+ y_1(a) & \dots & B_{Nk/2}^+ y_{Nk}(a) \\ B_1^- y_1(b) & \dots & B_1^- y_{Nk}(b) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_{Nk/2}^- y_1(b) & \dots & B_{Nk/2}^- y_{Nk}(b) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель также является целой аналитической функцией параметров ξ' (отличной от тождественного нуля).

Отсюда следует, что резольвента задачи (7)–(9) $R(\xi')$ является мероморфной функцией, а на множестве $M(\gamma, p)$ она будет аналитической функцией параметров ξ' вследствие условия 2.

Замечание 3. Рассмотрим область, ограниченную поверхностями $M(\gamma, p)$ и $\{\xi' \in \mathbb{C}^n : |\xi'| = \xi_0\}$, где ξ_0 достаточно большое. На границе этой области $R(\xi')$ является аналитической. Из [4, теорема 1, гл. 4, §15] следует аналитичность $R(\xi')$ в цилиндре, ограниченном $M(\gamma, p)$.

Доказательство теоремы 1. Для каждого положительного R рассмотрим срезающую функцию $\sigma_R(x')$, обладающую следующими свойствами [5]:

(1) $0 \leq \sigma_R(x') \leq 1$ для $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\sigma_R(x') = 1$ для $|x'| \leq R$, $\sigma_R(x') = 0$ для $|x'| \geq 2R$;

(2) существует константа C , не зависящая от R , такая, что неравенство $|\partial^\alpha / \partial x'^\alpha \sigma_R(x')| \leq CR^{-|\alpha|}$ выполняется для всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $|\alpha| \leq l$.

Сначала теорема 1 доказывается для $\sigma_R(x') \tilde{f}(x)$, $\sigma_R(x') \tilde{g}_\nu^+(x')$, $\sigma_R(x') \tilde{g}_\nu^-(x')$, затем с использованием оценки (6) осуществляется предельный переход при $R \rightarrow \infty$.

Далее $\sigma_R(x') \tilde{f}(x)$, $\sigma_R(x') \tilde{g}_\nu^+(x')$, $\sigma_R(x') \tilde{g}_\nu^-(x')$ вновь будут обозначаться через $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}_\nu^+(x')$, $\tilde{g}_\nu^-(x')$, и в новых обозначениях пусть $f(\xi', x_n)$, $g_\nu^+(\xi')$ и $g_\nu^-(\xi')$ — преобразование Фурье по x' функций $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}_\nu^+(x')$ и $\tilde{g}_\nu^-(x')$.

Рассмотрим задачу (7)–(9). По теореме 2 и замечанию 1 при $\xi' \in M(\gamma, p)$, таких, что $|\xi'| \geq \xi_0$ (где ξ_0 — достаточно большое положительное число), существует единственное решение задачи (7)–(9), принадлежащее $H^l(a, b)$. При этом имеет место оценка (10), где константа C не зависит от u , f , $g_\nu^\pm$, ξ' , но зависит от ξ_0 .

Из представлений (12), (16) следует, что для $\xi' \in M(\gamma, p)$, таких, что $|\xi'| \leq \xi_0$, решение задачи (7)–(9), лежащее в $H^l(a, b)$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_l \leq C \left(\|f\|_{l-k} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} |g_\nu^+| + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} |g_\nu^-| \right).$$

Отсюда получается оценка (10) для $\xi' \in M(\gamma, p)$, таких, что $|\xi'| \leq \xi_0$.

Заметим, что вместо оценки (10) мы можем применять эквивалентное неравенство

$$\|u\|_l^2 + |\xi'|^{2l} \|u\|_0^2 \leq C \left(\|f\|_{l-k}^2 + |\xi'|^{2l-2k} \|f\|_0^2 + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} (1 + |\xi'|^{2l-2m_\nu^+-1}) |g_\nu^+|^2 + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} (1 + |\xi'|^{2l-2m_\nu^--1}) |g_\nu^-|^2 \right), \quad (17)$$

где C не зависит от p , принадлежащего шару с центром в начале координат радиуса γ .

Рассмотрим функцию

$$w = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{M(\gamma, p)} e^{ix'\xi'} u d \operatorname{Re} \xi'.$$

Для финитных по x' правых частей системы (1)–(2) этот интеграл сходится в среднем (квадратическом) в силу неравенства (17) и условий теоремы 1 и по теореме Планшереля определяет функцию w , такую, что (после применения равенства Парсеваля) для нее справедлива оценка

$$\|e^{-px'} w\|_l^2 \leq C \left(\|e^{-px'} \tilde{f}\|_{l-k}^2 + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|e^{-px'} \tilde{g}_\nu^+\|_{l-m_\nu^+-1/2}^2 + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|e^{-px'} \tilde{g}_\nu^-\|_{l-m_\nu^--1/2}^2 \right), \quad (18)$$

где константа C не зависит от w , $\tilde{f}$, $\tilde{g}_\nu^+$, $\tilde{g}_\nu^-$.

Вследствие замечания 3 можно утверждать, что w не зависит от p , если p принадлежит сфере E_γ радиуса γ с центром в начале координат. Действительно, пусть $p_1^{(1)}$ и $p_1^{(2)}$ — две точки на E_γ . Соединим их ломаной, целиком лежащей в шаре, ограниченном сферой E_γ , каждое звено которой параллельно одной из координатных осей, и рассмотрим любое из этих звеньев. Не ограничивая общности, можем считать, что меняется только первая координата на отрезке $[p_1^{(1)}, p_1^{(2)}]$. Положим

$$w_1 = \int_{-\infty+ip_2^{(1)}}^{\infty+ip_2^{(1)}} \cdots \int_{-\infty+ip_{n-1}^{(1)}}^{\infty+ip_{n-1}^{(1)}} e^{i(x_2\xi_2+\cdots+x_{n-1}\xi_{n-1})} u(\xi', x_n) d \operatorname{Re} \xi_2 \cdots d \operatorname{Re} \xi_{n-1}.$$

По формуле Коши для $L > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{-L+ip_1^{(1)}}^{L+ip_1^{(1)}} e^{ix_1\xi_1} w_1 d \operatorname{Re} \xi_1 &= i \int_{-L+ip_1^{(1)}}^{-L+ip_1^{(2)}} e^{ix_1\xi_1} w_1 d \operatorname{Im} \xi_1 \\ &\quad + i \int_{-L+ip_1^{(2)}}^{L+ip_1^{(2)}} e^{ix_1\xi_1} w_1 d \operatorname{Re} \xi_1 + i \int_{L+ip_1^{(2)}}^{L+ip_1^{(1)}} e^{ix_1\xi_1} w_1 d \operatorname{Im} \xi_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Следуя работе [6, теорема 2.2], покажем, что первый и третий интегралы в правой части равенства (19) стремятся к нулю по некоторой последовательности значений $L \rightarrow +\infty$. Из теорем вложения и оценки (17) следует оценка модуля

$u(\xi', x_n)$, откуда и получаем требуемое утверждение, так как только наличие зависимости от x_n отличает этот случай от рассмотренного в доказательстве теоремы 2.2 в [6].

Проинтегрируем неравенство (18) по переменным $(p_1, \dots, p_{n-1})$ по сфере E_γ . Зависимость от $(p_1, \dots, p_{n-1})$ есть только в экспоненте, поэтому нам достаточно вычислить интеграл

$$\int_{E_\gamma} e^{-p_1 x_1 - \dots - p_{n-1} x_{n-1}} dp_1 \dots dp_{n-1}.$$

Нетрудно показать, что этот интеграл зависит только от $|x'|$. Сравнивая разложение в ряд рассматриваемого интеграла с разложением в ряд модифицированной функции Бесселя, получаем, что этот интеграл равен

$$2\pi^{(n-1)/2} \gamma^{n-1} (\gamma|x'|)^{(3-n)/2} I_{(n-3)/2}(\gamma|x'|);$$

здесь $I_s(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Опишем теперь подробнее предельный переход для решений задачи (1)–(2) с финитными правыми частями $\sigma_R(x')\tilde{f}(x)$, $\sigma_R(x')\tilde{g}_\nu^+(x')$, $\sigma_R(x')\tilde{g}_\nu^-(x')$ при $R \rightarrow \infty$. Выберем последовательность $R_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Соответствующая последовательность решений задачи (1)–(2) w_{R_s} является фундаментальной в рассматриваемых пространствах $H^l(\Pi)$ с весом $V_\gamma(x')$, что следует из оценки (6). Отсюда получаем существование предела — функции w , такой, что $V_\gamma(x')w \in H^l(\Pi)$. Используя слабую сходимость, получаем, что w является решением задачи (1)–(2). Единственность решения задачи (1)–(2) в рассматриваемых пространствах следует из оценки (6).

Теорема 1 доказана.

Теорема 3. Пусть $\gamma_2 \geq \gamma \geq \gamma_1 \geq 0$, $l \geq k$, и пусть в задаче (1)–(2) $A(D_1, \dots, D_n)$ — правильная эллиптическая матрица операторов, причем выполнены условия 1 и 2 для всех таких γ . Если $V_{\gamma_1}(x')w \in H^l(\Pi)$, $V_{\gamma_2}(x')\tilde{f} \in H^{l-k}(\Pi)$, $V_{\gamma_2}(x')\tilde{g}_\nu^+ \in H^{l-m_\nu^+-1/2}(\Gamma^+)$, $V_{\gamma_2}(x')\tilde{g}_\nu^- \in H^{l-m_\nu^--1/2}(\Gamma^-)$, то $V_{\gamma_2}(x')w \in H^l(\Pi)$. При этом имеет место оценка

$$\|V_{\gamma_2}w\|_l \leq C \left(\|V_{\gamma_2}\tilde{f}\|_{l-k} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|V_{\gamma_2}\tilde{g}_\nu^+\|_{l-m_\nu^+-1/2} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|V_{\gamma_2}\tilde{g}_\nu^-\|_{l-m_\nu^--1/2} \right),$$

где константа C не зависит от w , $\tilde{f}$, $\tilde{g}_\nu^+$, $\tilde{g}_\nu^-$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 из [6].

Теорема 4. Пусть $\gamma \geq 0$, $l \geq k$, и пусть в задаче (1)–(2) $A(D_1, \dots, D_n)$ — правильная эллиптическая система операторов, причем выполнены условия 1 и 2. Тогда для любых функций $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}_\nu^+(x')$, $\tilde{g}_\nu^-(x')$, таких, что $e^{\gamma|x'|}\tilde{f} \in H^{l-2m}(\Pi)$, $e^{\gamma|x'}\tilde{g}_\nu^+ \in H^{l-m_\nu^+-1/2}(\Gamma^+)$, $e^{\gamma|x'}\tilde{g}_\nu^- \in H^{l-m_\nu^--1/2}(\Gamma^-)$, существует одно и только одно решение $w(x)$ задачи (1)–(2), такое, что $e^{\gamma|x'|}w \in H^l(\Pi)$. При этом имеет место оценка

$$\|e^{\gamma|x'|}w\|_l \leq C \left(\|e^{\gamma|x'}\tilde{f}\|_{l-k} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|e^{\gamma|x'}\tilde{g}_\nu^+\|_{l-m_\nu^+-1/2} + \sum_{\nu=1}^{Nk/2} \|e^{\gamma|x'}\tilde{g}_\nu^-\|_{l-m_\nu^--1/2} \right),$$

где константа C не зависит от w , $\tilde{f}$, $\tilde{g}_\nu^+$, $\tilde{g}_\nu^-$.

Доказательство. Произведем в задаче (1)–(2) замену искомых функций w , положив $w(x) = v(x)\varphi(x')$, где $\varphi(x') = (1 + \varepsilon|x'|)^{(2-n)/4}$. Используя формулу Лейбница, можем написать

$$A(v(x)\varphi(x')) = \varphi(x')Av(x) + \dots, \quad B_\nu^\pm(v(x)\varphi(x')) = \varphi(x')B_\nu^\pm v(x) + \dots,$$

где в членах, замененных многоточием, $\varphi(x')$ дифференцируется хотя бы один раз.

Умножим полученные уравнения и граничные условия для v на $(\varphi(x'))^{-1}$. Тогда для v получим задачу

$$Av(x) + \varepsilon\tilde{A}(x)v(x) = (\varphi(x'))^{-1}\tilde{f}(x) \quad (x \in \Pi), \quad (20)$$

$$B_\nu^\pm v(x) + \varepsilon\tilde{B}(x)_\nu^\pm v(x)|_{x \in \Gamma^\pm} = (\varphi(x'))^{-1}\tilde{g}_\nu^\pm(x') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2), \quad (21)$$

где $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$ — операторы с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, а правые части системы (20)–(21) удовлетворяют условиям теоремы 1. При достаточно малом ε левые части соотношений определяют оператор с переменными коэффициентами, мало отличающийся по норме от обратимого оператора задачи (1)–(2) в теореме 1. Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 4.

Переменные коэффициенты. Рассмотрим теперь задачу

$$A(x, D_1, \dots, D_n)w(x) = \tilde{f}(x) \quad (x \in \Pi), \quad (22)$$

$$B_\nu^\pm(x, D_1, \dots, D_n)w(x)|_{x \in \Gamma^\pm} = \tilde{g}_\nu^\pm(x') \quad (\nu = 1, \dots, Nk/2) \quad (23)$$

с переменными бесконечно дифференцируемыми в $\bar{\Pi}$ коэффициентами. Будем предполагать, что в каждой точке $x \in \bar{\Pi}$ выполнено условие правильной эллиптичности, а в каждой точке $x \in \Gamma^\pm$ — условие Лопатинского. Предположим также выполненным условие равномерной по $x_n \in [a, b]$ стабилизации коэффициентов на бесконечности:

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} A(x, D_1, \dots, D_n) = A(D_1, \dots, D_n), \quad (24)$$

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} B_\nu^\pm(x, D_1, \dots, D_n) = B_\nu^\pm(D_1, \dots, D_n). \quad (25)$$

Здесь $A(D_1, \dots, D_n)$, $B_\nu^\pm(D_1, \dots, D_n)$ — операторы задачи (1)–(2).

Используем определение нормально разрешимого оператора, данное в работе [15] на с. 51.

Теорема 5. Пусть для задачи (22)–(23) выполнены все перечисленные предположения, а для задачи (1)–(2) выполнены предположения теоремы 1 или теоремы 4. Тогда задача (22)–(23) нормально разрешима в тех же пространствах.

Доказательство. Задача (22)–(23) является частным случаем задач, рассматриваемых в теореме 20.1.2 из [7]. В окрестности бесконечности $|x'| > R$, где R достаточно большое, применим условия стабилизации коэффициентов (24), (25) и теорему 1 или 4. Теорема 5 доказана.

Оценки модуля решения. Пусть $Q_r \times [a, b]$ — цилиндр радиуса $r > 1$. Положим $\tilde{G}_0 = Q_2 \times [a, b]$, $G_0 = Q_3 \times [a, b]$, $\tilde{G}_s = (Q_{2+s} \setminus Q_{s+1}) \times [a, b]$ и $G_s = (Q_{s+3} \setminus Q_s) \times [a, b]$ ($s = 1, 2, \dots$).

Теорема 6. Пусть $\gamma_1 > \gamma > 0$, и пусть в задаче (1)–(2) $A(D_1, \dots, D_n)$ — правильная эллиптическая система операторов, причем выполнены условия 1 и 2. Пусть $|\tilde{f}(x)| \leq K_0 e^{-\gamma_1|x'|}$ при $x \in \bar{\Pi}$, $\tilde{g}_\nu^+(x') \equiv \tilde{g}_\nu^-(x') \equiv 0$. Тогда для решения $w(x)$ задачи (1)–(2) имеет место оценка

$$|w(x)| \leq CK_0 e^{-\gamma|x'|} \quad (x \in \bar{\Pi}),$$

где константа C не зависит от w и $\tilde{f}$.

Доказательство. По теореме 1.7 из [8] (неравенство (1.11)) для $p > 1$ получаем

$$\|w\|_{W_p^k(\tilde{G}_s)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L_p(G_s)} + \|w\|_{L_2(G_s)}) \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

где W_p^k — пространства, порожденные L_p -нормой (W_p^k при $p = 2$ совпадают с пространствами Соболева)

$$\|w\|_{W_p^k(\tilde{G}_s)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha w\|_{L_p(\tilde{G}_s)})^p \right)^{1/p},$$

а константа C не зависит от $\tilde{f}(x)$, w и s ($s = 0, 1, 2, \dots$). Отсюда и из теореме вложения следует непрерывность $w(x)$ в $\bar{\Pi}$ и оценка

$$|w(x)| \leq C(\|\tilde{f}\|_{L_p(G_s)} + \|w\|_{L_2(G_s)}) \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

где константа C не зависит от w и s . Умножим неравенство (26) на $e^{\gamma|x'|}$. Увеличив константу C , отсюда получаем

$$|e^{\gamma|x'|} w(x)| \leq C(\|e^{\gamma|x'|} \tilde{f}\|_{L_p(G_s)} + \|e^{\gamma|x'|} w\|_{L_2(G_s)}) \quad (x \in \tilde{G}_s, s = 0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

где C не зависит от w и s .

Из оценок (27) и теоремы 4 следует утверждение теоремы 6.

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для линейной системы теории упругости в слое $\Pi = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x' \in \mathbb{R}^2, x_3 \in (0, \pi)\}$:

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} w) = \tilde{f} \quad (x \in \Pi), \quad (28)$$

$$w_{\Gamma \pm} = 0, \quad (29)$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$ — вектор смещения, а $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ — плотность внешних сил, приложенных к слою. Постоянные λ и μ удовлетворяют условию $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

Система (3) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) u_1 \right) - (\lambda + \mu) \left(\xi_1^2 u_1 + \xi_1 \xi_2 u_2 + i \xi_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = f_1, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) u_2 \right) - (\lambda + \mu) \left(\xi_1 \xi_2 u_1 + \xi_2^2 u_2 + i \xi_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = f_2, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2) u_3 \right) - (\lambda + \mu) \left(i \xi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + i \xi_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = f_3. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть $\xi_1 = \operatorname{Re} \xi_1 + i p_1$, $\xi_2 = \operatorname{Re} \xi_2 + i p_2$.

Получим априорную оценку для $u \in W_2^2(0, \pi)$ и $f \in L_2(0, \pi)$. Оценим сначала первые производные функции u . Для этого умножим обе части системы (30)

скалярно на $\bar{u}$, проинтегрируем по $[0, \pi]$ и применим формулу интегрирования по частям в интегралах, содержащих вторые производные функции u и первые производные функций u_1, u_2 . В итоге получим равенство

$$-\int_0^\pi f \bar{u} dx_3 = \mu \left(\int_0^\pi |\operatorname{grad} u|^2 dx_3 + ((\operatorname{Re} \xi_1)^2 + (\operatorname{Re} \xi_2)^2 - p_1^2 - p_2^2) \int_0^\pi |u|^2 dx_3 \right) + \mu \left(i(p_1 \operatorname{Re} \xi_1 + p_2 \operatorname{Re} \xi_2) \int_0^\pi |u|^2 dx_3 \right) + (\lambda + \mu) \left(\int_0^\pi |\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + i u_3'|^2 dx_3 \right).$$

Для $p_1^2 + p_2^2 < 1$ в вещественной части этого равенства применим оценки

$$\left| \int_0^\pi \operatorname{Re}(f \bar{u}) dx_3 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi |u|^2 dx_3 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi |f|^2 dx_3 \quad (\varepsilon > 0),$$

$$\int_0^\pi |u|^2 dx_3 \leq \int_0^\pi |\operatorname{grad} u|^2 dx_3$$

и получим

$$\int_0^\pi |\operatorname{grad} u|^2 dx_3 + (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \int_0^\pi |u|^2 dx_3 \leq C_1 \int_0^\pi |f|^2 dx_3. \quad (31)$$

Перенесем в системе (30) все слагаемые, не содержащие вторых производных функции u , в правую часть. Теперь нетрудно проверить, что для ограниченных по модулю ξ_1, ξ_2 и $p_1^2 + p_2^2 < 1$ выполняется неравенство

$$\|u\|_2^2 \leq C(\|f\|_0^2 + \|u\|_1^2).$$

Отсюда и из (31) следует априорная оценка

$$\|u\|_2 + (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \|u\|_0 \leq C_2 \|f\|_0$$

для ограниченных по модулю ξ_1, ξ_2 и $p_1^2 + p_2^2 < 1$.

С учетом замечания 1 и неравенства (10) априорная оценка справедлива для всех ξ_1 и ξ_2 , удовлетворяющих условию $p_1^2 + p_2^2 < 1$. Таким образом, для $0 \leq \gamma < 1$ к системе (28)–(29) применимы теоремы 1, 4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, **19:3** (1964), 53–161.
- [2] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math., **16:2** (1963), 121–239.
- [3] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Издательство ЛКИ, М., 2007.
- [4] Б. А. Фукс, *Теория аналитических функций многих комплексных переменных*, ОГИЗ, М., 1948.
- [5] L. Nirenberg, H. F. Walker, *The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$* , J. Math. Anal. Appl., **42:2** (1973), 271–301.
- [6] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях*, в сб.: Труды ММО, т. 15, Изд-во МГУ, М., 1966, 400–452.
- [7] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.
- [8] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.

- [9] М. С. Агранович, А. С. Дынин, *Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области*, ДАН, **146**:3 (1962), 511–514.
- [10] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 35–92.
- [11] M. Schechter, *Systems of partial differential equations in a half-space*, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 423–434.
- [12] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [13] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, в сб.: Труды ММО, т. 16, Изд-во МГУ, М., 1967, 219–292.
- [14] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции*, Наука, М., 1977.
- [15] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов*, УМН, **12**:2(74) (1957), 43–118.

Институт компьютерных технологий МЭСИ
e-mail: valnikishkin@yandex.ru

Поступило в редакцию
1 марта 2010 г.