Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, Формальные группы Кричевера, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 23–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:47:03

Формальные группы Кричевера*

© 2011. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова

И. М. Кричеверу с восхищением

На основе общей модели Вейерштрасса кубической кривой с параметрами $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$ описан явный вид формальной группы, соответствующей униформизации Тейта этой кривой. Полученная формальная группа названа общей эллиптической формальной группой. Введено и исследовано дифференциальное уравнение на ее экспоненту. В качестве следствия получены результаты об эллиптическом роде Хирцебруха со значениями в $\mathbb{Z}[\mu]$.

Введено понятие универсальной формальной группы Кричевера над кольцом $\mathcal{A}_{\text{КГ}}$, экспонента которой задается функцией Бейкера–Ахиезера $\Phi(t) = \Phi(t; \tau, g_2, g_3)$, где τ — точка на эллиптической кривой с параметрами Вейерштрасса (g_2, g_3) . В качестве следствия получены результаты о роде Кричевера со значениями в кольце $\mathcal{A}_{\text{КГ}} \otimes \mathbb{Q}$ полиномов от четырех переменных. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эллиптическая формальная группа являлась формальной группой Кричевера.

Введена квазипериодическая функция $\Psi(t) = \Psi(t; v, w, \mu)$, логарифмическая производная которой определяет экспоненту общей эллиптической формальной группы, где v и w — точки на эллиптической кривой с параметрами μ . При $w \neq \pm v$ эта функция имеет точки ветвления $t = v$ и $t = -v$, а при $w = \pm v$ она совпадает с $\Phi(t; v, g_2, g_3)$ и становится мероморфной. Получена теорема сложения для функции $\Psi(t)$, согласно которой она является общей собственной функцией дифференциальных операторов порядков 2 и 3 с двоякопериодическими коэффициентами.

Введение

В своих первых работах (70-е годы) И. М. Кричевер получил важные результаты о родах Хирцебруха многообразий, используя формальную группу геометрических кобордизмов (см. [16]). В его работах 80-х годов функция Бейкера–Ахиезера стала мощным инструментом решения задач теории интегрируемых систем (см. [17]). В 1990 г. он доказал, что род Хирцебруха, задаваемый функцией Бейкера–Ахиезера, обладает фундаментальным свойством жесткости для многообразий с S^1 -эквивариантной SU -структурой (см. [18]). Как в теории интегрируемых систем, так и в топологии, ключевым оказалось то, что эта квазипериодическая мероморфная функция имеет в ячейке единственный простой полюс.

В настоящей работе в терминах арифметической униформизации Тейта эллиптической кривой мы описываем явный вид общей эллиптической формальной группы над градуированным кольцом $\mathbb{Z}[\mu]$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$, $\deg \mu_i =$

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00197-а, 11-01-00694-а и Правительства РФ №2010-220-01-077, договор №11.G34.31.0005.

$-2i$ (см. теорему 2.3), и дифференциальные уравнения на ее экспоненту в зависимости от μ (см. §3). В качестве приложения получены результаты по известной задаче целочисленности родов Хирцебруха.

Мы вводим универсальную формальную группу Кричевера (см. §5), экспонента которой определяется функцией Бейкера–Ахиезера (см. §4), описываем явный вид закона сложения этой формальной группы и находим условия на параметры, необходимые и достаточные для того, чтобы эллиптическая формальная группа являлась формальной группой Кричевера. В результате мы получаем эквивариантные эллиптические роды, жесткие на SU -многообразиях, частным случаем которых является знаменитый род, задаваемый эллиптическим синусом.

Экспонента эллиптической формальной группы является абелевой функцией порядка 3 при $\mu_6 \neq 0$ и порядка 2 при $\mu_6 = 0$ (см. следствие 3.2). Ряд результатов нашей работы опирается на тот факт, что экспонента эллиптической формальной группы при $\mu_6 = 0$ задается логарифмической производной функции Бейкера–Ахиезера (см. следствие 4.4). Это послужило мотивировкой для введения более общей функции $\Psi(t; v, w, \mu)$, логарифмическая производная которой задается экспонентой общей эллиптической формальной группы. Здесь v и w — точки на эллиптической кривой с параметрами μ . Функция $\Psi(t; v, w, \mu)$ является квазипериодической с единственным простым полюсом в ячейке и при $w \neq \pm v$ имеет точки ветвления $t = v$ и $t = -v$. Эту функцию мы называли деформированной функцией Бейкера–Ахиезера с параметром деформации $\alpha = \wp'(w)/\wp'(v)$; при $\alpha = \pm 1$ она совпадает с функцией Бейкера–Ахиезера. Функция $\Psi(t; v, w, \mu)$ является решением уравнения Шрёдингера $L_2\Psi = \wp(v)\Psi$ с абелевым потенциалом, которое при $\alpha = \pm 1$ совпадает с классическим уравнением Ламе. Получена теорема сложения для $\Psi(t; v, w, \mu)$ (см. теорему 7.5), согласно которой она является решением уравнения $L_3\Psi = -\wp'(w)\Psi$, где L_3 — оператор 3-го порядка с абелевыми коэффициентами (см. следствие 7.6) и $[L_2, L_3] = (1 - \alpha^2)\varphi L_1$, где оператор L_1 первого порядка определяется факторизацией Дарбу оператора L_2 , а φ — абелева функция (см. следствие 7.7).

§1. Формальные группы и роды Хирцебруха

Пусть A — коммутативное кольцо без кручения. *Коммутативной одномерной формальной группой над A* называется формальный ряд

$$F(u, v) = u + v + \sum_{i>0, j>0} a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} \in A,$$

удовлетворяющий условию ассоциативности $F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w)$.

Общую теорию формальных групп см. в [11].

Пусть $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ — формальные группы над A . *Гомоморфизмом формальных групп $h: F_1 \rightarrow F_2$ над кольцом A* называется формальный ряд $h(u) \in A[[u]]$, где $h(0) = 0$, такой, что $h(F_1(u, v)) = F_2(h(u), h(v))$. Гомоморфизм h называется *изоморфизмом*, если $h'(0)$ — обратимый элемент в кольце A , и *сильным изоморфизмом*, если $h'(0) = 1$.

Для каждой формальной группы $F(u, v) \in A[[u, v]]$ существует сильный изоморфизм f над кольцом $A \otimes \mathbb{Q}$ линейной группы $F_a(u, v) = u + v$ в группу F .

Ряд $f(t) \in A \otimes \mathbb{Q}[[t]]$ однозначно определяется условиями

$$f(t_1 + t_2) = F(f(t_1), f(t_2)), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad (1.1)$$

и называется *экспонентой* формальной группы $F(u, v)$. *Логарифмом* формальной группы F называется формальный ряд $g(u)$, такой, что $g(f(t)) = t$.

Рядом Гурвица над A называется формальный ряд над $A \otimes \mathbb{Q}$ вида

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{u^k}{k!}, \quad \varphi_k \in A.$$

Из (1.1) получаем

$$f'(t) = \frac{\partial}{\partial v} F(f(t), v) \Big|_{v=0}, \quad \frac{1}{g'(u)} = \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \Big|_{v=0}. \quad (1.2)$$

Следовательно, $g'(u)$ и $f'(g(u)) \in A[[u]]$. Таким образом, $g(u)$ и $f(t)$ являются рядами Гурвица над A .

Формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$ над кольцом $\mathcal{A}$ называется *универсальной формальной группой*, если для любой формальной группы $F(u, v)$ над некоторым кольцом A существует единственный гомоморфизм $r: \mathcal{A} \rightarrow A$, такой, что $F(u, v) = u + v + \sum r(\alpha_{i,j}) u^i v^j$. Гомоморфизм r называется *классифицирующим*.

Рассмотрим градуированное кольцо $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\beta_{i,j} : i > 0, j > 0]$, $\deg \beta_{i,j} = -2(i + j - 1)$. Положим $\hat{F}(u, v) = u + v + \sum \beta_{i,j} u^i v^j$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{F}(u, v), w) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^l u^i v^j w^k, \\ \hat{F}(u, \hat{F}(v, w)) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^r u^i v^j w^k, \end{aligned}$$

где $\beta_{i,j,k}^l$ и $\beta_{i,j,k}^r$ — однородные полиномы от $\beta_{i,j}$ и $\deg \beta_{i,j,k}^l = \deg \beta_{i,j,k}^r = -2(i + j + k - 1)$.

Пусть $J \subset \mathcal{U}$ — идеал с образующими $\beta_{i,j,k}^l - \beta_{i,j,k}^r$ (*идеал ассоциативности*). Рассмотрим кольцо $\mathcal{A} = \mathcal{U}/J$ и каноническую проекцию $\pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}$. Положим $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$, где $\alpha_{i,j} = \pi(\beta_{i,j})$. По построению формальная группа $\mathcal{F}(u, v)$ над градуированным кольцом $\mathcal{A}$ является универсальной формальной группой.

По теореме Лазара (см. [19]) $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\alpha_n : n = 1, 2, \dots]$, где $\deg \alpha_n = -2n$.

Пусть $U^*(X)$ — теория комплексных кобордизмов. Тогда $U^*(\text{pt}) = \Omega_U = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{-2n}$ — кольцо кобордизмов стабильно комплексных многообразий. Представителем класса $a \in \Omega_{-2n}$ можно считать гладкое $2n$ -мерное многообразие M^{2n} , лежащее в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ с комплексным нормальным расслоением.

Теорема 1.1 ([20]–[22]). $\Omega_U \simeq \mathbb{Z}[a_n : n = 1, \dots]$, где $\deg a_n = -2n$.

Однозначно выбрать мультипликативные образующие в кольце Ω_U нельзя. Пусть $\tilde{\Omega}_U$ — подкольцо, порожденное элементами отрицательной градуировки, и $\pi: \Omega_U \rightarrow \sum \tilde{\Omega}_{-2n} = \Omega_U / (\tilde{\Omega}_U)^2$ — каноническая проекция. Имеем $\tilde{\Omega}_{-2n} \simeq \mathbb{Z}$. Элемент $a_n \in \Omega_{-2n}$ можно взять в качестве $2n$ -мерного мультипликативного образующего кольца Ω_U тогда и только тогда, когда $\pi(a_n) = \pm t(n)$, где $t(n)$

— наибольший общий делитель чисел $\binom{n+1}{i}$, $i = 1, \dots, n$, т.е. $m(n) = p$, если $n+1 = p^q$ для некоторого простого p , и $m(n) = 1$ в остальных случаях.

Выбор образующих в кольце Ω_U , представители которых обладают специальными свойствами, дает возможность получать важные результаты о кобордизмах многообразий.

Рассмотрим n -мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с однородными координатами $(x_0 : \dots : x_n)$. Многообразие Милнора $H_{i,j}$ определяется следующим образом:

$$H_{i,j} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : \sum_{k=0}^{\min(i,j)} x_k y_k = 0 \right\}.$$

Пространство тривиального расслоения $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^{j+1} \rightarrow \mathbb{C}P^i$, $i \leq j$, разлагается в сумму $\eta_i \oplus \eta_{i,j}^\perp$, где η_i — одномерное расслоение, слоем которого над $v \in \mathbb{C}P^i$ является прямая L_v в $\mathbb{C}^{i+1} \subset \mathbb{C}^{j+1}$, соответствующая точке v , а $\eta_{i,j}^\perp$ есть j -мерное расслоение, слой которого над v является ортогональным дополнением к L_v в $\mathbb{C}^{j+1}$. Многообразие $H_{i,j}$ является *пространством проективизации* расслоения $\eta_{i,j}^\perp$, т.е. имеет место расслоение $\pi: H_{i,j} \rightarrow \mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

В [22] для доказательства изоморфизма $\Omega_U \simeq \mathbb{Z}[a_n, n = 1, \dots]$ были использованы классы кобордизмов $a_n = \sum \gamma_{i,j} [H_{i,j}]$, где $\sum \gamma_{i,j} \binom{n+1}{i} = m(n)$, причем суммирование ведется по i, j , таким, что $i+j = n+1$, $i = 1, \dots, n$.

В докладе [12] была сформулирована теорема Милнора о том, что в каждом классе кобордизмов $a \in \Omega_{-2n}$ можно в качестве представителя выбрать алгебраическое (в общем случае приводимое) многообразие. В доказательстве этой теоремы (см. [28]) используются многообразия $H_{i,j}$. Отметим также и другой выбор мультипликативных образующих a_n , представителями которых являются торические многообразия (см. [4]). Это позволило доказать, что в каждом классе кобордизмов $a \in \Omega_{-2n}$ можно в качестве представителя выбрать квазиторическое многообразие (см. [5]).

Пусть $c_1(\eta) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — первый класс Черна универсального комплексного линейного расслоения $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Тогда ряд $c_1(\eta_1 \otimes \eta_2) = \mathcal{F}_U(u, v) \in \Omega_U[[u, v]]$ задает *формальную группу геометрических кобордизмов* (С. П. Новиков, А. С. Мищенко, см. [23]).

Логарифм $g_U(u)$ формальной группы $\mathcal{F}_U(u, v)$ (ряд Мищенко [23]) имеет вид

$$g_U(u) = u + \sum [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

С. П. Новиковым (см. [23]) на основе формальной группы геометрических кобордизмов был предложен эффективный метод решения задачи описания инвариантов класса кобордизмов многообразия с действием группы в терминах инвариантов действия этой группы на нормальных расслоениях к многообразиям неподвижных точек. Он и его ученики вскоре после этого получили ряд важных результатов в этом направлении (см. обзор [2]).

Квиллен [26] опубликовал фундаментальное наблюдение, что кольцевой гомотоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \Omega_U$, классифицирующий формальную группу $\mathcal{F}_U(u, v)$, является изоморфизмом. Таким образом, формальная группа геометрических кобордизмов была отождествлена с универсальной формальной группой $\mathcal{F}(u, v)$.

Эта работа привела к приложениям результатов теории формальных групп в алгебраической топологии.

Лемма 1.2 (см. [1]). *Закон сложения для универсальной формальной группы задается формулой*

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{H(u, v)}{\mathbb{C}P(u)\mathbb{C}P(v)},$$

где

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \sum_{i+j \geq 1} [H_{i,j}] u^i v^j \\ &= u\mathbb{C}P(u) + v\mathbb{C}P(v) - [\mathbb{C}P^1]uv(1 - \mathbb{C}P(u) - \mathbb{C}P(v)) + \sum_{i \geq 2, j \geq 2} [H_{i,j}] u^i v^j, \\ \mathbb{C}P(u) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] u^n. \end{aligned}$$

Следствие 1.3. *Закону сложения можно придать следующий вид:*

$$\mathcal{F}(u, v) = ub(v) + vb(u) - b_1 uv(b(u) + b(v) - b(u)b(v)) + b(u)b(v) \sum_{i \geq 2, j \geq 2} [H_{i,j}] u^i v^j,$$

где $b(u)\mathbb{C}P(u) = 1$ и $b(u) = 1 + \sum b_i u^i$.

Пусть $f(t) = t + \sum_{k \geq 1} f_k t^{k+1}$, где $f_k \in A \otimes \mathbb{Q}$. Положим

$$L_f = L_f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \prod_{i=1}^n \frac{t_i}{f(t_i)},$$

где σ_k есть k -я элементарная симметрическая функция от $t_1, \dots, t_n$, $n \geq k$.

Род Хирцебруха $L_f(M^{2n})$ стабильно комплексного многообразия M^{2n} с касательными классами Черна $c_k = c_k(\tau(M^{2n}))$ и фундаментальным циклом $\langle M^{2n} \rangle$ вычисляется по формуле $L_f(M^{2n}) = (L_f(c_1, \dots, c_n), \langle M^{2n} \rangle)$. Он задает кольцевой гомоморфизм $L_f: \Omega_U \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$, называемый родом Хирцебруха. Впервые аналог этого результата появился в [13] для ориентированных многообразий M^{4n} и их классов Понтрягина.

Род Хирцебруха называется A -целочисленным, если он задает кольцевой гомоморфизм $\Omega_U \rightarrow A$.

Множество формальных групп над A взаимно однозначно соответствует множеству кольцевых гомоморфизмов $\Omega_U \rightarrow A$. При этом формальная группа F классифицируется A -целочисленным родом Хирцебруха $L_f: \Omega_U \rightarrow A$, где $f(t)$ — экспонента этой группы.

Формальная группа $F(u, v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j$ над градуированным кольцом $A = \sum A_{-2n}$ называется *градуированной*, если $\deg a_{i,j} = -2(i + j - 1)$. Множество градуированных формальных групп над $A = \sum A_{-2n}$ взаимно однозначно соответствует множеству кольцевых гомоморфизмов $\Omega_U \rightarrow A$, сохраняющих градуировку.

Положим $g_f(u) = u + \sum L_f(\mathbb{C}P^n) \frac{u^{n+1}}{n+1}$. Тогда $g_f(f(t)) \equiv t$ (см. [24]). Логарифм универсальной формальной группы задается рядом Гурвица над Ω_U . Следовательно, для того чтобы род L_f был A -целочисленным, необходимо, чтобы он задавался рядом Гурвица $f(t)$ над A . Но далеко не каждый ряд Гурвица $f(t)$ над A задает A -целочисленный род Хирцебруха L_f .

Важность задачи построения A -целочисленных родов Хирцебруха в терминах рядов Гурвица $f(t)$ связана с известной теоремой Атьи–Зингера и ее обобщениями, описывающими индекс дифференциальных операторов на многообразиях как значения родов Хирцебруха на них.

§2. Эллиптические формальные группы

В этом параграфе мы используем результаты теории эллиптических кривых (см., например, [15]). Кубическая кривая общего вида в проективном пространстве задается однородным уравнением

$$c_{xxx}X^3 + c_{xxy}X^2Y + c_{xyy}XY^2 + c_{yyy}Y^3 + c_{xxz}X^2Z + c_{xyz}XYZ + c_{yyz}Y^2Z + c_{xzz}XZ^2 + c_{yzz}YZ^2 + c_{zzz}Z^3 = 0.$$

Кривая задана в общей модели Вейерштрасса, если выполнены следующие условия:

- (1) точка $(0:1:0)$ лежит на этой кривой;
- (2) точка $(0:1:0)$ неособая;
- (3) в точке $(0:1:0)$ бесконечно удаленная прямая $L(X:Y:Z) = Z$ касается рассматриваемой кривой;
- (4) точка $(0:1:0)$ является точкой перегиба этой кривой.

Из этих условий вытекает, что $c_{xxy} = 0$, $c_{xyy} = 0$, $c_{yyy} = 0$, $c_{yyz} \neq 0$ и $c_{xxx} \neq 0$. Кубическая кривая в общей модели Вейерштрасса задается уравнением

$$c_{xxx}X^3 + c_{xxz}X^2Z + c_{xyz}XYZ + c_{xzz}XZ^2 + c_{yyz}Y^2Z + c_{yzz}YZ^2 + c_{zzz}Z^3 = 0.$$

Любую неособую кубическую кривую, имеющую точку перегиба, можно проективным преобразованием перевести в кривую указанного выше вида. Более того, для нормировки можно положить $c_{xxx} = 1$ и $c_{yyz} = -1$. В результате мы получим *общую модель Вейерштрасса эллиптической кривой* (будем обозначать ее через $\mathcal{V}_\mu$). В координатах $(X:Y:Z)$ она задается уравнением

$$Y^2Z + \mu_1XYZ + \mu_3YZ^2 = X^3 + \mu_2X^2Z + \mu_4XZ^2 + \mu_6Z^3, \quad (2.1)$$

зависящим от параметров $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$. Кривая $\mathcal{V}_\mu$ однородна относительно градуировки $\deg X = -4$, $\deg Y = -6$, $\deg Z = 0$, $\deg \mu_i = -2i$.

Пример 2.1. Рассмотрим кривую Хессе (см. [27])

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = 3dXYZ, \quad (2.2)$$

где $d \neq 1$. Она обладает большой группой симметрии. Преобразование

$$(X:Y:Z) \rightarrow (-dX - cY + aZ : cY : cX + bZ),$$

где $c = 3(a + bd)/(d^3 - 1)$, a и b таковы, что $a + bd \neq 0$, приводит кривую Хессе к виду (2.1), где

$$\begin{aligned} \mu_1 &= d, \quad \mu_2 = -\frac{d^2a + b}{a + bd}, \quad \mu_3 = -\frac{1}{3} \frac{a(d^3 - 1)}{a + bd}, \\ \mu_4 &= \frac{1}{3} \frac{(d^3 - 1)(da^2 - b^2)}{(a + bd)^2}, \quad \mu_6 = -\frac{1}{27} \frac{(d^3 - 1)^2(a^3 + b^3)}{(a + bd)^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем двумерное семейство кривых с многообразием параметров μ , где $\mu_1 \neq 0$, задаваемым уравнениями

$$3\mu_3 = 1 + \mu_1\mu_2, \quad 3\mu_4 = -(\mu_1 - \mu_2^2), \quad 27\mu_6 = -(\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2 + 1 - \mu_2^3). \quad (2.3)$$

В градуированных координатах $\{\xi_1, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6\}$, где $\deg \xi_1 = -2$, $\deg \mu_i = -2i$, уравнения принимают вид

$$3\mu_3 = \xi_1^3 + \mu_1\mu_2, \quad 3\mu_4 = -\xi_1^3\mu_1 + \mu_2^2, \quad 27\mu_6 = -\xi_1^3(\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2 + \xi_1^3) + \mu_2^3. \quad (2.4)$$

В карте $\{\mu_1 \neq 0\}$ при $\xi_1 = 0$ получаем многообразие, заданное уравнениями $3\mu_3 = \mu_1\mu_2$, $3\mu_4 = \mu_2^2$, $27\mu_6 = \mu_2^3$. $\square$

Положим

$$c_2 = \mu_1^2 + 4\mu_2, \quad c_4 = \mu_1\mu_3 + 2\mu_4, \quad c_6 = \mu_3^2 + 4\mu_6.$$

Линейной заменой координат

$$Q_\mu: (X:Y:Z) \mapsto (X + \frac{1}{12}c_2Z:2Y + \mu_1X + \mu_3Z:Z)$$

кривая $\mathcal{V}_\mu$ переводится в стандартную эллиптическую кривую Вейерштрасса $\mathcal{V}_g$, задаваемую в однородных координатах $(X:Y:Z)$ уравнением

$$Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3,$$

где

$$g_2(\mu) = \frac{1}{12}c_2^2 - 2c_4, \quad g_3(\mu) = \frac{1}{6}c_2c_4 - (\frac{1}{6}c_2)^3 - c_6, \quad \deg g_i = -4i.$$

Введем кольцо $E = \mathbb{Z}[\mu]$. Рассмотрим канонические карты:

В карте $\{Z \neq 0\}$ с координатами $x = X/Z$ и $y = Y/Z$ уравнение эллиптической кривой (2.1) принимает вид

$$y^2 + \mu_1xy + \mu_3y = x^3 + \mu_2x^2 + \mu_4x + \mu_6, \quad (2.5)$$

однородный относительно градуировки $\deg x = -4$, $\deg y = -6$. Эта кривая допускает классическую униформизацию при помощи $\wp$ -функций Вейерштрасса.

В карте $\{Y \neq 0\}$ с координатами $u = -X/Y$ и $s = -Z/Y$ уравнение эллиптической кривой (2.1) принимает вид

$$s = u^3 + \mu_1us + \mu_2u^2s + \mu_3s^2 + \mu_4us^2 + \mu_6s^3. \quad (2.6)$$

Обозначим эту кривую через V_μ . Здесь u и s — арифметические параметры Тейта (см. [29]). Они получили такое название, так как в окрестности $u = 0$ координата s задается рядом $s(u) \in E[[u]]$ и, таким образом, u является униформирующей координатой на кривой (2.6). Положим $\deg u = 2$, тогда $\deg s(u) = 6$.

В карте $\{X \neq 0\}$ с координатами $v = Y/X$ и $w = Z/X$ уравнение эллиптической кривой (2.1) принимает вид

$$vw(v + \mu_1 + \mu_3w) = 1 + \mu_2w + \mu_4w^2 + \mu_6w^3,$$

однородный относительно градуировки $\deg v = -2$, $\deg w = 4$.

Положим

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\mu_2 - \frac{1}{4}\mu_1^2, \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \mu_4 + \frac{1}{2}\mu_1\mu_3, \quad r_1r_2r_3 = -\mu_6 - \frac{1}{4}\mu_3.$$

Тогда уравнение (2.5) принимает вид $(2y + \mu_1x + \mu_3)^2 = 4(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

Дискриминант кривой $\mathcal{V}_\mu$ задается формулой

$$\Delta(\mu) = 16(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2.$$

Пример 2.2. Для кривой Хессе (2.2) имеем

$$g_2(\mu) = \frac{1}{12}d(d^3 + 8), \quad g_3(\mu) = -\frac{1}{216}(d^6 - 20d^3 - 8), \quad \Delta = \frac{1}{27}(d^3 - 1)^3. \quad \square$$

Геометрическая групповая структура на эллиптической кривой $\mathcal{V}_\mu$ (см. (2.1)) задается следующим условием: если точки P_1, P_2, P_3 лежат на пересечении некоторой прямой с данной кривой, то $P_1 + P_2 + P_3 = 0$. Фиксируем нуль геометрической групповой структуры в точке $O = (0:1:0)$. Тогда в полученной группе из соотношений $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ и $P_3 + \overline{P}_3 + O = 0$ вытекает $P_1 + P_2 = \overline{P}_3$.

Геометрическая групповая структура на якобианах плоских алгебраических кривых рода больше 1 описана в [9]. В случае гиперэллиптической кривой это описание столь же эффективно, как и приведенное выше.

Пусть $(u, s(u)), (v, s(v)), (w, s(w))$ и $(\bar{w}, s(\bar{w}))$ — координаты точек P_1, P_2, P_3 и $\overline{P}_3$ в карте $\{Y \neq 0\}$. Классическая геометрическая групповая структура на эллиптической кривой в координатах $(u, s(u))$ определяет формальную группу $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ над E , которую мы будем называть *общей эллиптической формальной группой*. Она задается уравнением $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v) = \bar{w}$.

Теорема 2.3. Закон сложения $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ имеет вид

$$\left(u + v - uv \frac{(\mu_1 + \mu_3 t) + (\mu_4 + 2\mu_6 t)k}{(1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2)} \right) \frac{(1 + \mu_2 t + \mu_4 t^2 + \mu_6 t^3)}{(1 + \mu_2 n + \mu_4 n^2 + \mu_6 n^3)(1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2)}, \quad (2.7)$$

где $(u, s(u)) \in V_\mu$ (см. (2.6)) и

$$t = \frac{s(u) - s(v)}{u - v}, \quad k = \frac{us(v) - vs(u)}{u - v}, \quad n = t + uv \frac{(1 + \mu_2 t + \mu_4 t^2 + \mu_6 t^3)}{(1 - \mu_3 k - \mu_6 k^2)}.$$

Следствие 2.4. $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v) \in E[[u, v]]$.

Пример 2.5. Сложение на кривой Хессе задает формальную группу $F_{\text{He}}(u, v)$ над $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}][\mu_1, \mu_2]$. В градуированных координатах (ξ_1, μ_1, μ_2) мы получаем формальную группу над $\mathbb{Z}[\hat{\xi}_1, \mu_1, \hat{\mu}_2]$, где $\xi_1 = 3\hat{\xi}_1$, $\mu_2 = 3\hat{\mu}_2$. $\square$

Следствие 2.6. Формальная группа $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ определяет пятипараметрический E -целочисленный род Хирцебруха, который будем называть общим эллиптическим родом L_{El} .

Определение 2.7. Формальную группу над кольцом A будем называть *эллиптической* и обозначать через $F_{\text{El}}(u, v)$, если классифицирующий ее кольцевой гомоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow A$ разлагается в композицию $\mathcal{A} \rightarrow E \rightarrow A$.

Далее, для эллиптической формальной группы над кольцом A будем обозначать теми же символами μ_i элементы кольца A , являющиеся образами элементов μ_i из кольца E .

Результаты об эллиптических формальных группах см. в [8].

Следствие 2.8. Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, 0, 0)$. Тогда

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{(u + v)(1 - \mu_3 k) - \mu_1 uv - \mu_3 uv t}{(1 - \mu_3 k)(1 + \mu_2 uv - \mu_3 k)}. \quad (2.8)$$

Следствие 2.9. Пусть $\mu = (0, \mu_2, 0, \mu_4, \mu_6)$. Тогда

$$F_{\text{El}}(u, v) = u + v + k \frac{(\mu_2 + 2\mu_4 t + 3\mu_6 t^2)}{(1 + \mu_2 t + \mu_4 t^2 + \mu_6 t^3)}.$$

Доказательство следствий 2.8 и 2.9 см. в [7].

Опишем общий эллиптический формальный групповой закон по модулю идеала разложимых элементов кольца E . В качестве следствия мы получим важную информацию о кольце коэффициентов общей эллиптической формальной группы. Пусть $\hat{E} = E/(\tilde{E})^2$, где $\tilde{E} = \text{Ker}(E \rightarrow \mathbb{Z}: \mu_i \mapsto 0)$. Согласно формуле (2.6), над кольцом $\hat{E}$ мы имеем $s = u^3 + \mu_1 u^4 + \mu_2 u^5 + \mu_3 u^6 + \mu_4 u^7 + \mu_6 u^9$. Используя формулу (2.7), получаем над кольцом $\hat{E}$ равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{El}}(u, v) = & u + v - uv[\mu_1 + \mu_2(u + v) + \mu_3(2u^2 + 3uv + 2v^2) \\ & + 2\mu_4(u + v)(u^2 + uv + v^2) + 3\mu_6(u + v)(u^2 + uv + v^2)^2]. \end{aligned}$$

Пусть E_F — подкольцо в E , порожденное коэффициентами ряда $\mathcal{F}_{\text{El}}$. Обозначим через $\mathbb{Z}_{(p)}$ кольцо целых p -адических чисел и положим $E_{(p)} = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$, а также $(E_F)_{(p)} = E_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$.

Следствие 2.10. (1) Композиция отображений $E_F \hookrightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$, где $\mu_i \mapsto \mu_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\mu_i \mapsto 0$, $i = 4, 6$, является эпиморфизмом.

(2) Композиция отображений $(E_F)_{(p)} \hookrightarrow E_{(p)} \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_6]$, где $\mu_i \mapsto \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 6$, и $\mu_4 \mapsto 0$, является эпиморфизмом при $p \neq 3$.

(3) Композиция отображений $(E_F)_{(p)} \hookrightarrow E_{(p)} \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]$, где $\mu_i \mapsto \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $\mu_6 \mapsto 0$, является эпиморфизмом при $p \neq 2$.

В частности, коэффициенты ряда $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ мультипликативно порождают кольцо $E_{(p)}$ для $p \neq 2, 3$.

§3. Эллиптические экспоненты и их дифференциальные уравнения

Пусть $f(t) = f_{\text{El}}(t)$ — экспонента эллиптической формальной группы $F_{\text{El}}(u, v)$ и $g(u)$ — ее логарифм.

Для заданных (g_2, g_3) рассмотрим отображение

$$\mathcal{W}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^2, \quad t \mapsto (\sigma^3(t)\wp(t) : \sigma^3(t)\wp'(t) : \sigma^3(t)). \quad (3.1)$$

Здесь и далее $\wp(t) = \wp(t; g_2, g_3)$, $\zeta(t) = \zeta(t; g_2, g_3)$ и $\sigma(t) = \sigma(t; g_2, g_3)$ — функции Вейерштрасса (см. [30]). Образом отображения $\mathcal{W}$ является кривая $\mathcal{V}_g$.

Относительно стандартного сложения в $\mathbb{C}$ отображение $\mathcal{W}: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_g$ является гомоморфизмом, и при координатной проекции $p_Y: (X:Y:Z) \mapsto (u = -X/Y, s = -Z/Y)$ на карту $\{Y \neq 0\}$ имеем $p_Y \circ \mathcal{W}(0) = p_Y(0:1:0) = (0, 0)$.

Рассмотрим отображение $Q_\mu^{-1} \circ \mathcal{W}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^2: t \mapsto (X:Y:Z)$, где

$$X = \sigma^3(t)(\wp(t) - \frac{1}{12}c_2), \quad Y = \frac{1}{2}\sigma^3(t)(\wp'(t) - \mu_1(\wp(t) - \frac{1}{12}c_2) - \mu_3), \quad Z = \sigma^3(t),$$

и $g_2 = g_2(\mu)$, $g_3 = g_3(\mu)$.

Относительно стандартного сложения на $\mathbb{C}$ отображение $Q_\mu^{-1} \circ \mathcal{W}$ задает гомоморфизм $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_\mu$ и является экспонентой алгебраического сложения на кривой $\mathcal{V}_\mu$.

Следовательно, композиция $p_Y \circ Q_\mu^{-1} \circ \mathcal{W}$ задается формулами

$$u = \frac{-2(\wp(t) - \frac{1}{12}c_2)}{\wp'(t) - \mu_1(\wp(t) - \frac{1}{12}c_2) - \mu_3}, \quad s = \frac{-2}{\wp'(t) - \mu_1(\wp(t) - \frac{1}{12}c_2) - \mu_3}.$$

Относительно стандартного сложения на $\mathbb{C}$ с координатой t это отображение задает экспоненту $f(t) = u$ формальной группы на эллиптической кривой с координатами $(u, s(u))$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Экспонента эллиптической формальной группы $F_{\text{El}}(u, v)$ задается формулой*

$$f_{\text{El}}(t) = -2 \frac{\wp(t) - \frac{1}{12}(4\mu_2 + \mu_1^2)}{\wp'(t) - \mu_1\wp(t) + \frac{1}{12}\mu_1(4\mu_2 + \mu_1^2) - \mu_3},$$

где $\wp(t) = \wp(t; g_2(\mu), g_3(\mu))$.

Следствие 3.2. *Экспонента $f_{\text{El}}(t)$ при $\Delta(\mu) \neq 0$ является абелевой функцией порядка 3, когда $\mu_6 \neq 0$, и порядка 2, когда $\mu_6 = 0$.*

Следствие 3.3. *При $\mu_6 = 0$, получаем*

$$\frac{1}{f_{\text{El}}(t)} = \frac{\mu_1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\wp'(t) - \wp'(\tau)}{\wp(t) - \wp(\tau)},$$

где

$$\wp(\tau) = \wp(\tau; g_2(\mu), g_3(\mu)) = \frac{1}{12}(4\mu_2 + \mu_1^2), \quad \wp'(\tau) = \wp'(\tau; g_2(\mu), g_3(\mu)) = \mu_3. \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) на параметр τ совместна тогда и только тогда, когда $\mu_6 = 0$.

Используя (2.7), получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} F_{\text{El}}(u, v) \right|_{v=0} = 1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2 - 2\mu_3 s - 2\mu_4 u s - 3\mu_6 s^2. \quad (3.3)$$

Пусть $\phi(t) = s(f(t))$. Используя (1.2), мы приходим к системе

$$\begin{cases} f' = 1 - \mu_1 f - \mu_2 f^2 - 2\mu_3 \phi - 2\mu_4 f \phi - 3\mu_6 \phi^2, \\ \phi = f^3 + (\mu_1 f + \mu_2 f^2) \phi + (\mu_3 + \mu_4 f) \phi^2 + \mu_6 \phi^3. \end{cases}$$

Следствие 3.4. *Для $s = u^3 + \mu_1 u s + \mu_2 u^2 s + \mu_3 s^2 + \mu_4 u s^2 + \mu_6 s^3$ имеем*

$$\sum_{n \geq 0} L_f(\mathbb{C}P^n) u^n = (1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2 - 2\mu_3 s - 2\mu_4 u s - 3\mu_6 s^2)^{-1}.$$

Положим $P(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2$ и $Q(u) = \mu_3 + \mu_4 u$.

Теорема 3.5. *Пусть $(\mu_3, \mu_4, \mu_6) \neq (0, 0, 0)$. Тогда $f(t)$ является решением уравнения*

$$\begin{aligned} \mu_6 [f'^3 + 3P(f)f'^2 - 4P(f)^3 + 18P(f)Q(f)f^3 + 27\mu_6 f^6] \\ = -Q(f)^2 [f'^2 - P(f)^2 + 4Q(f)f^3]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть $(\mu_3, \mu_4, \mu_6) = (0, 0, 0)$. Тогда $f(t)$ является решением уравнения

$$f(t)' = P(f(t)). \quad (3.5)$$

Каждое из уравнений (3.4) и (3.5) имеет единственное решение, такое, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Следствие 3.6. *Для $\mu_6 = 0$ и $(\mu_3, \mu_4) \neq (0, 0)$ уравнение (3.4) принимает вид*

$$f'^2 = 1 - 2\mu_1 f + (\mu_1^2 - 2\mu_2) f^2 + (2\mu_1 \mu_2 - 4\mu_3) f^3 + (\mu_2^2 - 4\mu_4) f^4. \quad (3.6)$$

Следствие 3.7. Пусть $\mu = (0, \mu_2, 0, \mu_4, 0)$. Тогда $f(t)$ удовлетворяет уравнению $(f')^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, где $\delta = \mu_2$, $\varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$. То есть $f(t)$ — эллиптический синус $\text{sn}(t)$ и $F_{\text{El}}(u, v) \in \mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4][[u, v]]$ задает классический закон сложения

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}. \quad (3.7)$$

В этом случае род Хирцебруха L_f является эллиптическим родом, введенным Ошаниным в [25].

§4. Род Кривевера

Определение 4.1. Функция Бейкера–Ахиезера $\Phi(t) = \Phi(t; \tau) = \Phi(t; \tau, g_2, g_3)$ задается выражением

$$\Phi(t) = \frac{\sigma(\tau + t)}{\sigma(t)\sigma(\tau)} e^{-\zeta(\tau)t},$$

где $\sigma(t) = \sigma(t; g_2, g_3)$, $\zeta(t) = \zeta(t; g_2, g_3)$.

Она является решением уравнения Ламе

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\wp(t; g_2, g_3) \right) \Phi(t) = \wp(\tau; g_2, g_3) \Phi(t).$$

В окрестности точки $t = 0$ имеет место разложение

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\wp(\tau)t - \frac{1}{6}\wp'(\tau)t^2 + \left(-\frac{1}{8}\wp(\tau)^2 + \frac{1}{40}g_2 \right) t^3 + \dots$$

Пусть $2\omega_k$, $k = 1, 2$, — периоды функции $\wp(t)$. Тогда

$$\Phi(t + 2\omega_k) = \Phi(t) \exp(-2(\zeta(\tau)\omega_k - \eta_k\tau)), \quad \Phi(t; \tau + 2\omega_k) = \Phi(t; \tau).$$

Теорема 4.2 (см. [17]). Имеет место формула сложения для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\Phi(t + q) = \frac{\Phi(t)\Phi'(q) - \Phi'(t)\Phi(q)}{\wp(t) - \wp(q)}.$$

И. М. Кривевер продемонстрировал приложение этой формулы к иерархии Кадомцева–Петвиашвили в [17].

Лемма 4.3 (см. [30]). $(\ln \Phi(t))' = \frac{1}{2} \frac{\wp'(t) - \wp'(\tau)}{\wp(t) - \wp(\tau)}$.

Следствие 4.4. Пусть $\Phi(t) = \Phi(t; \tau, g_2(\mu), g_3(\mu))$. Соотношение

$$\frac{1}{f_{\text{El}}(t)} - \frac{\mu_1}{2} = -(\ln \Phi(t))'$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\mu_6 = 0$, а точка τ задается системой уравнений $\wp(\tau; g_2(\mu), g_3(\mu)) = \frac{1}{12}(4\mu_2 + \mu_1^2)$, $\wp'(\tau; g_2(\mu), g_3(\mu)) = \mu_3$. Условие $\mu_6 = 0$ означает совместность этой системы.

Из теоремы 4.2 и леммы 4.3 получаем

Следствие 4.5. *Формуле сложения можно придать следующий вид:*

$$\frac{\Phi(t+q)}{\Phi(t)\Phi(q)} = -\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(t) & \wp(q) & \wp(\tau) \\ \wp'(t) & \wp'(q) & \wp'(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(t) & \wp(q) & \wp(\tau) \\ \wp(t)^2 & \wp(q)^2 & \wp(\tau)^2 \end{vmatrix}}.$$

В работе [18] Кричевер ввел род Хирцебруха L_f , где

$$f(t) = f_{\text{Kr}}(t) = \frac{\exp((\lambda/2)t)}{\Phi(t)} = \frac{\sigma(t)\sigma(\tau)}{\sigma(\tau+t)} \exp\left(\frac{\lambda}{2}t + \zeta(\tau)t\right),$$

называемый теперь *родом Кричевера*, и доказал, что этот род обладает фундаментальным свойством жесткости на многообразиях с S^1 -эквивариантной SU -структурой.

Следствие 4.6. $\ln(f_{\text{Kr}}(t))' = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \frac{\wp'(t) - \wp'(\tau)}{\wp(t) - \wp(\tau)}.$

Лемма 4.7. *Ряд $f_{\text{Kr}}(t)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4]$, где $a_1 = \lambda/2$, $a_2 = \wp(\tau)$, $a_3 = \wp'(\tau)$, $a_4 = g_2/2$.*

Доказательство утверждения, что ряд $1/\Phi(t)$ является рядом Гурвица над $\mathbb{Z}[a_2, a_3, a_4]$, см. в [7]. Из того, что $\exp((\lambda/2)t)$ является рядом Гурвица над $\mathbb{Z}[a_1]$, и из свойств рядов Гурвица получаем утверждение леммы. $\square$

Имеем

$$f_{\text{Kr}}(t) = t + a_1 t^2 + (a_1^2 + a_2) \frac{t^3}{2} + (a_1^3 + 3a_1 a_2 + a_3) \frac{t^4}{6} + \dots \quad (4.1)$$

Хирцебрух в [14] ввел понятие эллиптического рода уровня N и доказал его жесткость. Кричевер в [18] показал, что эллиптический род уровня N совпадает с родом Кричевера при специальных значениях τ и λ .

Пример 4.8. Эллиптический род уровня N задается функцией $f_{\text{Kr}}(t)$ с параметрами

$$\tau = \frac{2n}{N} \omega_1 + \frac{2m}{N} \omega_2 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{2n}{N} \eta_1 + \frac{2m}{N} \eta_2 - \zeta(\tau), \quad n, m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Действительно,

$$f(t + 2\omega_k) = f(t) \exp\left(\frac{2n}{N}(2\omega_k \eta_1 - 2\eta_k \omega_1) + \frac{2m}{N}(2\omega_k \eta_2 - 2\eta_k \omega_2)\right).$$

Параметры τ и λ подбираются так, чтобы

$$f(t + 2\omega_1) = f(t) \exp\left(-2\pi i \frac{m}{N}\right), \quad f(t + 2\omega_2) = f(t) \exp\left(2\pi i \frac{n}{N}\right).$$

Таким образом, функция $(f(t))^N$ является абелевой и имеет единственный полюс порядка N в точке $t = 0$. $\square$

§5. Формальная группа Кричевера

Нам потребуются следующие два общих результата, доказательства которых получаются прямыми вычислениями.

Лемма 5.1. Пусть ряды $\xi(u) = 1 + \sum \xi_i u^i$, $\nu(u) = 1 + \sum \nu_i u^i$ задают формальную группу вида

$$F(u, v) = \frac{\begin{vmatrix} u^4 & v^4 & 1 \\ u^2 \xi(u) & v^2 \xi(v) & c_2 \\ \xi(u)^2 & \xi(v)^2 & c_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^3 & v^3 & 1 \\ u \xi(u) & v \xi(v) & c_2 \\ \nu(u) & \nu(v) & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (5.1)$$

Тогда существуют ряды $b(u) = 1 + \sum b_i u^i$, где $b_1 = \chi_1$, $b_{2i} = \chi_{2i}$, $b_{2i+1} = 2\chi_{2i+1}$, и $\beta(u) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k+2} u^k$, где $\beta_{2k} = k\chi_{2k}$ и $\beta_{2k+1} = (2k+1)\chi_{2k+1}$, такие, что

$$\xi(u) = -ub(u)(u\beta(u) + b_1) + b(u)^2 + (\xi_2 - b_2)u^2, \quad (5.2)$$

$$\nu(u) = (\xi(u) - c_2 u^2)(b(u) - (2b_1 - \nu_1)u) + c_3 u^3. \quad (5.3)$$

Лемма 5.2. При подстановке в (5.1) рядов $\xi(u)$ и $\nu(u)$ вида (5.2) и (5.3) ряд $F(u, v)$ принимает вид

$$F(u, v) = ub(v) + vb(u) - b'(0)uv + \frac{b(u)\beta(u) - b(v)\beta(v)}{ub(v) - vb(u)} u^2 v^2,$$

где

$$b(u) = (2\xi_1 - \nu_1)u + \frac{\nu(u) - c_3 u^3}{\xi(u) - c_2 u^2}, \quad \beta(u) = \frac{b'(u) - b'(0)}{2u}.$$

Пусть $\mathcal{B} = \mathbb{Z}[\chi_k : k = 1, 2, \dots]$. Рассмотрим ряд

$$F(u, v) = ub(v) + vb(u) - b'(0)uv + \frac{b(u)\beta(u) - b(v)\beta(v)}{ub(v) - vb(u)} u^2 v^2, \quad (5.4)$$

$$\beta(u) = \frac{b'(u) - b'(0)}{2u},$$

над кольцом $\mathcal{B}$, где $b(u) = 1 + \sum b_i u^i$, $b_1 = \chi_1$, $b_{2i} = \chi_{2i}$ и $b_{2i+1} = 2\chi_{2i+1}$. Тогда $\beta(u) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k+2} u^k$, где $\beta_{2k} = k\chi_{2k}$ и $\beta_{2k+1} = (2k+1)\chi_{2k+1}$.

Определение 5.3. Универсальной формальной группой Кричевера $\mathcal{F}_{\text{Kr}}(u, v)$ будем называть формальную группу, задаваемую рядом (5.4) над кольцом $\mathcal{A}_{\text{Kr}} = \mathcal{B}/\mathcal{I}_{\text{Kr}}$, где $\mathcal{I}_{\text{Kr}}$ — идеал ассоциативности.

Определение 5.4. Формальную группу над кольцом A будем называть формальной группой Кричевера и обозначать через $F_{\text{Kr}}(u, v)$, если классифицирующий ее кольцевой гомоморфизм $\Omega_U \rightarrow A$ разлагается в композицию $\Omega_U \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Kr}} \rightarrow A$.

Далее, для формальной группы Кричевера над кольцом A будем обозначать тем же символом χ_i элементы кольца A , являющиеся образами элементов χ_i из кольца $\mathcal{A}_{\text{Kr}}$.

Следствие 5.5. Закон сложения формальной группы Кричевера $F_{\text{Kr}}(u, v)$ над A задается формулой (5.4), где $b(u) = 1 + \sum b_i u^i$, $b_1 = \chi_1$, $b_{2i} = \chi_{2i}$ и $b_{2i+1} = 2\chi_{2i+1}$, $\chi_i \in A$. Кольцо коэффициентов формальной группы Кричевера мультипликативно порождается элементами χ_i .

Основанием для определений 5.3 и 5.4 является следующий результат (ср. [3]):

Теорема 5.6. Экспонентой $f(t)$ формальной группы Кричевера является ряд $f_{\text{Kr}}(t)$.

Доказательство. Разлагая в ряд до третьей степени по t соотношение $f(g(u) + t) = F_{\text{Kr}}(u, f(t))$ и используя формулу $2u\beta(u) = b'(u) - b'(0)$, получаем уравнения

$$f'(g(u)) = b(u), \quad (5.5)$$

$$f''(g(u)) = b(u)(f''(0) + b'(u) - b'(0)), \quad (5.6)$$

$$f'''(g(u)) = -\frac{1}{2}b'''(0)u + (f'''(0) - 3b''(0))b(u) + 3(f''(0) - b'(0))b(u)(b'(u) - b'(0)) + \frac{3}{u}b(u)^2(b'(u) - b'(0)). \quad (5.7)$$

Из (5.5) и тождества $f(g(u)) = u$ следует, что $b(u) = 1/g'(u)$ и $f''(g(u)) = b(u)b'(u)$. Из (5.6) получаем, что $f''(0) = b'(0)$, а из разложения в ряд уравнения (5.5) — что $f'''(0) = b''(0) + b'(0)^2$. Из (5.7), переходя к переменной $t = g(u)$, получаем, что функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$f'''(t)f(t) = Cf(t)^2 + Bf(t)f'(t) + 3f'(t)f''(t) + Af'(t)^2,$$

где $A = -3b'(0)$, $B = (b'(0)^2 - 2b''(0))$, $C = -\frac{1}{2}b'''(0)$. Следовательно, функция $\psi(t) = (\ln f(t))'$ удовлетворяет уравнению $2\psi''(t) = 4\psi(t)^3 + 3A\psi(t)^2 + 2B\psi(t) + C$, откуда вытекает, что

$$\psi'(t)^2 = \psi(t)^4 + A\psi(t)^3 + B\psi(t)^2 + C\psi(t) + D,$$

где D — константа. Следовательно, функция $\phi(t) = 1/\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi'(t)^2 = 1 + A\phi(t) + B\phi(t)^2 + C\phi(t)^3 + D\phi(t)^4.$$

Заметим, что это уравнение совпадает с уравнением (3.6) для $A = -2\mu_1$, $B = \mu_1^2 - 2\mu_2$, $C = 2\mu_1\mu_2 - 4\mu_3$, $D = \mu_2^2 - 4\mu_4$, а из условий $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ следуют условия $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$. Таким образом, по теореме 3.5 и следствиям 3.6, 3.3 получаем

$$(\ln f(t))' = \frac{\mu_1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\wp'(t) - \wp'(\tau)}{\wp(t) - \wp(\tau)}.$$

Согласно следствию 4.6, если $\lambda = \mu_1$, $g_2 = g_2(\mu)$, $g_3 = g_3(\mu)$ и τ задано совместной системой (3.2), то $(\ln f(t))' = (\ln(f_{\text{Kr}}(t)))'$. Параметры μ определяются из приведенных выше условий, при этом $\mu_6 = 0$. Далее, используя начальные условия $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f_{\text{Kr}}(0) = 0$ и $f'_{\text{Kr}}(0) = 1$, получаем, что $f(t) = f_{\text{Kr}}(t)$. $\square$

Лемма 5.7. *Над кольцом $\mathcal{A}_{\text{Kr}}^{(1)} = \mathcal{A}_{\text{Kr}} / (\widetilde{\mathcal{A}}_{\text{Kr}})^2$, где $\widetilde{\mathcal{A}}_{\text{Kr}} = \ker(\mathcal{A}_{\text{Kr}} \rightarrow \mathbb{Z} : \chi_k \mapsto 0)$, ряд $\mathcal{F}_{\text{Kr}}(u, v)$ имеет вид*

$$u + v + uv \left(\chi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{2k} \left(u^{2k-1} + v^{2k-1} + kuv \frac{u^{2k-2} - v^{2k-2}}{u - v} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{2k+1} \left(2u^{2k} + 2v^{2k} + (2k+1)uv \frac{u^{2k-1} - v^{2k-1}}{u - v} \right) \right).$$

Следствие 5.8. *Гомоморфизм $\lambda_{\text{Kr}} : \Omega_U \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Kr}}$, классифицирующий универсальную формальную группу Кричевера, является эпиморфизмом.*

Из определения формальной группы $F_{\text{Kr}}(u, v)$ получаем

$$\text{Следствие 5.9. } \left. \frac{\partial}{\partial v} F_{\text{Kr}}(u, v) \right|_{v=0} = b(u).$$

Используя лемму 1.2, получаем

Следствие 5.10. *Имеют место равенства*

$$1 + \sum \lambda_{\text{Kr}}(\mathbb{C}P^n) u^n = \frac{1}{b(u)},$$

$$\sum_{i \geq 2, j \geq 2} \lambda_{\text{Kr}}([H_{i,j}]) u^{i-1} v^{j-1} = \left(1 - a(v) - a(u) + \frac{a(u)a(v)}{2} \right) a'(0) + \frac{1}{2} \frac{ua(u)^3 a'(v) - va(v)^3 a'(u)}{a(u)a(v)(ua(u) - va(v))},$$

где $a(u) = 1 + \sum \lambda_{\text{Kr}}(\mathbb{C}P^n) u^n$.

Теорема 5.11. $\mathcal{A}_{\text{Kr}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4]$.

Род Кричевера $L_{\text{Kr}} : \Omega_U \rightarrow \mathbb{Q}[\lambda, \wp(\tau), \wp'(\tau), g_2]$ разлагается в композицию

$$\Omega_U \xrightarrow{\lambda_{\text{Kr}}} \mathcal{A}_{\text{Kr}} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Q}[\lambda, \wp(\tau), \wp'(\tau), g_2],$$

где $\gamma(\chi_1) = \lambda$, $\gamma(\chi_2) = -\frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{3}{2}\wp(v)$, $\gamma(\chi_3) = \frac{1}{24}\lambda^3 - \frac{1}{2}\wp(v)\lambda + \frac{1}{3}\wp'(v)$, $\gamma(\chi_4) = -\frac{9}{128}\lambda^4 + \frac{15}{16}\wp(v)\lambda^2 - \frac{3}{4}\wp'(v)\lambda + \frac{3}{8}\wp(v)^2 - \frac{1}{8}g_2$.

Доказательство следует из леммы 4.7 и формулы (4.1). □

Введем ряд

$$\mathcal{N}(u, v, w) = F(u, v)b(w) + F'_u(u, v)b(u)w - b_1 F(u, v)w + \frac{\frac{1}{2}F''_u(u, v)b^2(u) + F'_u(u, v)ub(u)\beta(u) - F(u, v)b(w)\beta(w)}{F(u, v)b(w) - F'_u(u, v)wb(u)} F(u, v)w^2.$$

Лемма 5.12. *Пусть $F(u, v)$ — формальная группа. Тогда $b(F(u, v)) = F'_u(u, v)b(u)$ и $\mathcal{N}(u, v, w) = F(F(u, v), w)$.*

Доказательство леммы вытекает из общих свойств формальных групп и формулы (5.4). □

Следствие 5.13. *Идеал ассоциативности $\mathcal{J}_{\text{Kr}} = \sum \mathcal{J}_{2k}$, $k \geq 5$, порожден коэффициентами рядов $\mathcal{N}(u, v, w) - \mathcal{N}(w, v, u)$ и $b(F(u, v)) - F'_u(u, v)b(u)$.*

Задача $\mathcal{A}_{\text{Kr}}$. Описать алгебраическую структуру кольца $\mathcal{A}_{\text{Kr}}$.

Для решения задачи $\mathcal{A}_{\text{Kr}}$ необходимо найти образующие в идеале $\mathcal{J}_{\text{Kr}}$ кольца $\mathcal{B}$, порожденном коэффициентами рядов из следствия 5.13.

Пример 5.14. $\mathcal{J}_{10} = \mathbb{Z}$ с образующим $j_{10} = 5\chi_5 + 4\chi_1\chi_4 + 3\chi_1^2\chi_3 + 2\chi_2\chi_3$.

Пример 5.15. $\mathcal{J}_{12} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с образующими $\chi_1 j_{10}$ и $j_{12} = 2\hat{j}_{12}$, где

$$\hat{j}_{12} = \chi_6 + \chi_2\chi_4 + \chi_3^2 - 2\chi_1^2(\chi_4 + \chi_1\chi_3).$$

Следствие 5.16. В группе $\mathcal{A}_{\text{Kr}}$ имеется элемент порядка 2 градуировки 12.

§6. Эллиптические формальные группы Кричевера

Не каждая эллиптическая формальная группа является формальной группой Кричевера.

Задача $\mathcal{A}_{\text{El}}$. Найти условия на параметры μ эллиптической формальной группы $F_{\text{El}}(u, v)$ вида (2.7), необходимые и достаточные для того, чтобы она была формальной группой Кричевера $F_{\text{Kr}}(u, v)$ вида (5.4).

Точнее говоря, задача $\mathcal{A}_{\text{El}}$ состоит в том, чтобы найти такой идеал $J \subset E = \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$, что классифицирующий гомоморфизм $\Omega_U \rightarrow A = E/J$ разлагается в композицию $\Omega_U \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Kr}} \rightarrow A$.

Теорема 6.1. Для того чтобы эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ являлась формальной группой Кричевера $F_{\text{Kr}}(u, v)$, необходимо выполнение следующих условий:

$$\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4 = 0, \quad 2(\mu_3^2 + 3\mu_6) = 0, \quad \mu_1(\mu_3^2 + 3\mu_6) = 0, \quad \mu_3(\mu_1\mu_3 + \mu_4) = 0. \quad (6.1)$$

Доказательство. Имеем $F_{\text{El}}(u, v) = \sum p_{i,j}(\mu)u^i v^j$ и $F_{\text{Kr}}(u, v) = \sum q_{i,j}(\chi)u^i v^j$, где $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots)$. Из равенств $p_{i,j}(\mu) = q_{i,j}(\chi)$, где $i + j \leq 8$, вытекают соотношения $\chi_1 = -\mu_1$, $\chi_2 = -\mu_2$, $\chi_3 = -\mu_3$, $\chi_4 = -2\mu_4 - 2\mu_1\mu_3$, $\chi_5 = -\mu_1^2\mu_3 - \mu_1\mu_4 - \mu_2\mu_3$, $\chi_6 = -4\mu_1\mu_3\mu_2 - 2\mu_1^2\mu_4 - 2\mu_3^2 - 3\mu_6 - 2\mu_2\mu_4 - 2\mu_1^3\mu_3$, $\chi_7 = -3\mu_1\mu_3^2 - 3\mu_1^2\mu_2\mu_3 - 3\mu_1\mu_6 - \mu_2^2\mu_3 - \mu_1^4\mu_3 - 2\mu_1\mu_2\mu_4 - \mu_1^3\mu_4 - 2\mu_3\mu_4$ и соотношения (6.1). $\square$

Теорема 6.2. Пусть A — кольцо без делителей нуля. Эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ над A является формальной группой Кричевера $F_{\text{Kr}}(u, v)$ тогда и только тогда, когда

$$\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4 = 0, \quad \mu_3^2 + 3\mu_6 = 0, \quad \mu_3(\mu_1\mu_3 + \mu_4) = 0. \quad (6.2)$$

Доказательство. Пусть выполняются соотношения (6.2). Тогда

$$\begin{aligned} \mu_6 &= 0 && \text{в случае } \mu_1 = 0, \mu_3 = 0, \\ \mu_2 &= 0, \quad \mu_3^2 = -3\mu_6, \quad \mu_4 = 0 && \text{в случае } \mu_1 = 0, \mu_3 \neq 0, \\ \mu_4 &= 0, \quad \mu_6 = 0 && \text{в случае } \mu_1 \neq 0, \mu_3 = 0, \\ \mu_2 &= -\mu_1^2, \quad \mu_4 = -\mu_1\mu_3, \quad -3\mu_6 = \mu_3^2 && \text{в случае } \mu_1 \neq 0, \mu_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы будет вытекать из следующих лемм, которые представляют самостоятельный интерес.

Лемма 6.3. В случае $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$, $\mu_6 = 0$ эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ над $\mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4]$ является формальной группой Кричевера.

Доказательство. В рассматриваемом случае $s(u) = u^3 + \mu_2 u^2 s(u) + \mu_4 u s(u)^2$. Положим $\delta = \mu_2$, $\varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$. Тогда

$$s(u) = \frac{1 - \mu_2 u^2 - \sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{2\mu_4 u}$$

и (см. (3.7))

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}.$$

Имеем $b(u) = \sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}$, следовательно, $\beta(u)b(u) = -\delta + \varepsilon u^2$. Таким образом,

$$F_{\text{Kr}}(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} - v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}},$$

что является другой формой записи выражения (3.7), т. е. $F_{\text{El}}(u, v) = F_{\text{Kr}}(u, v)$. $\square$

Лемма 6.4. В случае $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_4 = 0$ и $\mu_3^2 = -3\mu_6$ эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ над $\mathbb{Z}[\mu_3, \mu_6]/(\mu_3^2 + 3\mu_6)$ является формальной группой Кричевера.

Доказательство. Положим $r(u) = 1 - \mu_3 s(u)$. Ряд $F_{\text{El}}(u, v)$ принимает вид

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u^2 r(v) - v^2 r(u)}{ur(v)^2 - vr(u)^2}.$$

Из уравнения $s(u) = u^3 + \mu_3 s(u)^2 + \mu_6 s(u)^3$ находим, что $r(u) = \sqrt[3]{1 - 3\mu_3 u^3}$. Имеем $b(u) = r(u)^2$, следовательно, $b(u) = (1 - \mu_3 s(u))^2$. Полученные выражения дают тождество $F_{\text{El}}(u, v) = F_{\text{Kr}}(u, v)$. $\square$

Лемма 6.5. В случае $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 0$, $\mu_6 = 0$ эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ над $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2]$ является формальной группой Кричевера.

Доказательство. Ряд $F_{\text{El}}(u, v)$ принимает следующий вид:

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u + v - \mu_1 uv}{1 + \mu_2 uv}.$$

Имеем $s(u) = u^3 + \mu_1 u s(u) + \mu_2 u^2 s(u)$, т. е. $s(u)(1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2) = u^3$, и $b(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2$. Следовательно, $\beta(u) = -\mu_2$. Полученные выражения дают тождество $F_{\text{El}}(u, v) = F_{\text{Kr}}(u, v)$. $\square$

Лемма 6.6. В случае $\mu_2 = -\mu_1^2$, $\mu_4 = -\mu_1 \mu_3$ и $\mu_3^2 = -3\mu_6$ эллиптическая формальная группа $F_{\text{El}}(u, v)$ над $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \mu_6]/(\mu_3^2 + 3\mu_6)$ является формальной группой Кричевера.

Доказательство. Имеем

$$s(u) = u^3 + \mu_1 u s(u) - \mu_1^2 u^2 s(u) + \mu_3 s(u)^2 - \mu_1 \mu_3 u s(u)^2 + \mu_6 s(u)^3. \quad (6.3)$$

Следовательно, $b(u) = \rho^2(u) + \mu_1 u$, где $\rho(u) = 1 - \mu_1 u - \mu_3 s(u)$. Таким образом, $\beta(u) = \frac{1}{u}(\rho(u)\rho'(u) + \mu_1)$. Из (6.3) следует, что $\rho^3 + 3\mu_1 u \rho - (1 - (\mu_1^3 + 3\mu_3)u^3) = 0$. Полученные выражения дают тождество $F_{\text{El}}(u, v) = F_{\text{Kr}}(u, v)$. $\square$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. $\square$

Следствие 6.7. *Экспоненты эллиптических формальных групп над кольцом A из теоремы 6.2 задают роды Хирцебруха, которые на многообразии с S^1 -эквивариантной SU -структурой являются жесткими.*

Доказательство вытекает из теоремы Кричевера (см. [18]) о жесткости рода Кричевера на многообразиях, о которых идет речь в следствии. $\square$

В условиях теоремы 6.2 экспонента эллиптической формальной группы совпадает с экспонентой соответствующей формальной группы Кричевера. Пусть $(\tau, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \lambda)$ — параметры ряда $f_{\text{Kr}}(t)$, т. е.

$$f_{\text{Kr}}(t) = \frac{\sigma(t; \hat{g}_2, \hat{g}_3) \sigma(\tau; \hat{g}_2, \hat{g}_3)}{\sigma(t + \tau; \hat{g}_2, \hat{g}_3)} \exp \left(\left(\frac{\lambda}{2} + \zeta(\tau) \right) t \right).$$

Следствие 6.8. *Параметры $(\tau, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \lambda)$ и параметры $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$ соответствующей эллиптической формальной группы связаны соотношениями $\lambda = -\mu_1$, $\wp(\tau; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \frac{1}{12}(\mu_1^2 - 8\mu_2)$, $\wp'(\tau; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \mu_1\mu_2 - 3\mu_3$, $\hat{g}_2 = 16\mu_4 - 2\mu_1\mu_3 + \frac{1}{12}(4\mu_2 + \mu_1^2)^2$, $\hat{g}_3 = \frac{14}{3}\mu_2\mu_3\mu_1 - 9\mu_3^2 - \frac{4}{3}\mu_1^2\mu_4 - \frac{1}{216}(4\mu_2 + \mu_1^2)^3 + \frac{1}{6}\mu_3\mu_1^3 + \frac{32}{3}\mu_2\mu_4$.*

Указанные соотношения между параметрами эллиптической формальной группы и формальной группы Кричевера задают отображение эллиптической кривой с параметрами μ в кривую с параметрами $(\hat{g}_2, \hat{g}_3)$. В общем случае $(\hat{g}_2, \hat{g}_3) \neq (g_2(\mu), g_3(\mu))$.

Пример 6.9. Если $\mu = (0, \mu_2, 0, \mu_4, 0)$, то $(g_2(\mu), g_3(\mu)) = (\frac{4}{3}\mu_2^2 - 4\mu_4, -\mu_2(2\mu_2^2 - 9\mu_4))$, $\Delta = 2^4\mu_4^2(\mu_2^2 - 4\mu_4)$, $(\hat{g}_2, \hat{g}_3) = (\frac{4}{3}\mu_2^2 + 16\mu_4, -\frac{8}{27}\mu_2(\mu_2^2 - 36\mu_4))$, $\hat{\Delta} = 2^8\mu_4(\mu_2^2 - 4\mu_4)^2$.

Пример 6.10. Если $\mu = (0, 0, 3\xi_3, 0, -3\xi_3^2)$, то $(g_2(\mu), g_3(\mu)) = (0, 3\xi_3^2)$, $(\hat{g}_2, \hat{g}_3) = (0, -3^4\xi_3^2)$.

Пример 6.11. Если $\mu = (\mu_1, \mu_2, 0, 0, 0)$, то $(\hat{g}_2, \hat{g}_3) = (g_2(\mu), g_3(\mu))$, $\Delta = 0$.

В случае, когда формальная группа Кричевера является эллиптической формальной группой, из формулы (3.3) и следствия 5.9 получаем $b(u) = (1 - \mu_1 u - \mu_2 u^2) - 2(\mu_3 + \mu_4 u)s(u) - 3\mu_6 s(u)^2$, где $s(u)$ задано уравнением (2.6). Положим

$$\phi_{k,l} = \frac{u^k s(v)^l - v^k s(u)^l}{u - v}.$$

Следствие 6.12. *В условиях теоремы 6.2 эллиптическая формальная группа на Кричевера задается рядом*

$$F(u, v) = \frac{u + v - \mu_1 uv - \mu_3 \phi_{2,1}}{1 + (\mu_2 - \mu_4 \phi_{0,1})uv - \mu_3 (2\phi_{1,1} - \mu_3 \phi_{1,2})}.$$

Эллиптическая формальная группа (2.8) в условиях теоремы 6.2 не является формальной группой Кричевера при $\mu_3 \neq 0$. Другое доказательство этого факта можно получить непосредственно, проверив, что эквивариантный род Хирцебруха, задаваемый экспонентой этой группы, не является жестким. Для этого достаточно вычислить значение такого рода на SU -многообразии S^6 с каноническим действием тора T^2 .

§7. Деформированная функция Бейкера–Ахиезера

Пусть $f_{\text{El}}(t)$ — экспонента общей эллиптической формальной группы $F_{\text{El}}(u, v)$. Тогда

$$\frac{1}{f_{\text{El}}(t)} = \phi(t; v, w, \mu) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(t) + \wp'(w)}{\wp(t) - \wp(v)} + \frac{\mu_1}{2}, \quad (7.1)$$

где $\wp(t) = \wp(t; g_2(\mu), g_3(\mu))$, $\wp'(w) = -\mu_3$, $\wp(v) = \frac{1}{12}(4\mu_2 + \mu_1^2)$.

Деформированной функцией Бейкера–Ахиезера $\Psi(t; v, w, \mu)$ будем называть решение уравнения

$$\Psi'(t) + \phi(t)\Psi(t) = 0, \quad (7.2)$$

которое в окрестности точки $t = 0$ имеет вид $\Psi(t) = 1/t + (\text{регулярная функция})$.

Лемма 7.1. Деформированная функция Бейкера–Ахиезера задается формулой

$$\Psi(t) = \frac{\sigma(t+v)^{(1-\alpha)/2} \sigma(v-t)^{(1+\alpha)/2}}{\sigma(t)\sigma(v)} \exp\left(\left(-\frac{\mu_1}{2} + \alpha\zeta(v)\right)t\right), \quad \text{где } \alpha = \frac{\wp'(w)}{\wp'(v)}. \quad (7.3)$$

Доказательство. Предположим, что $\Psi(t)$ задана формулой (7.3). Тогда

$$-\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = \frac{\mu_1}{2} - \frac{1}{2}((1-\alpha)\zeta(t+v) - (1+\alpha)\zeta(v-t) - 2\zeta(t) + 2\alpha\zeta(v)).$$

Так как $\zeta(t+v) - \zeta(v-t) - 2\zeta(t) = \wp'(t)/(\wp(t) - \wp(v))$ (см. [30]) и $\alpha\wp'(v) = \wp'(w)$, то уравнение (7.2) имеет место для $\phi(t; v, w, \mu)$ из (7.1). $\square$

Следствие 7.2. Если $\alpha = -1$, то $\Psi(t; v, w, \mu) = e^{-\mu_1 t/2} \Phi(t; v, g_2(\mu), g_3(\mu))$. Если $\alpha = 1$, то $\Psi(t; v, w, \mu) = e^{-\mu_1 t/2} \Phi(t; -v, g_2(\mu), g_3(\mu))$.

Из следствия 4.4 вытекает

Следствие 7.3. Функция $\Psi(t)$ совпадает с функцией Бейкера–Ахиезера для некоторого τ при $\mu_1 = 0$, $\mu_6 = 0$.

Следствие 7.4. Ряд $1/\Psi(t)$ совпадает с рядом $f_{\text{Kr}}(t)$ для некоторого τ при $\mu_6 = 0$ и $\lambda = \mu_1$.

Род Хирцебруха, соответствующий ряду $1/\Psi(t)$, называется общим родом Кричевера (см. [6]).

$$\text{Положим } \mathcal{D}(t, q, v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(t) & \wp(q) & \wp(v) \\ \wp'(t) & \wp'(q) & \wp'(v) \end{vmatrix}.$$

Теорема 7.5. Функция $\Psi(t)$ однозначно, с точностью до множителя $e^{\lambda t}$, определяется формулой сложения

$$\Psi(t+q) = \frac{\begin{vmatrix} \Psi(t) & \Psi(q) \\ \Psi'(t) & \Psi'(q) \end{vmatrix}}{\wp(t) - \wp(q)} \times \frac{\mathcal{D}(t, q, v)^{(1-\alpha)/2} \mathcal{D}(t, q, -v)^{(1+\alpha)/2}}{\frac{1-\alpha}{2} \mathcal{D}(t, q, v) + \frac{1+\alpha}{2} \mathcal{D}(t, q, -v)} \quad (7.4)$$

при начальном условии $\Psi(t) = 1/t + (\text{регулярная функция})$ в окрестности $t = 0$.

Доказательство. Используя (7.2) и (7.3), получаем

$$\begin{aligned} & 2(\wp(t) - \wp(v))(\wp(q) - \wp(v)) \frac{\Psi(t)\Psi'(q) - \Psi(q)\Psi'(t)}{\Psi(t+q)} \\ &= \left(\frac{\sigma(t+v)\sigma(q+v)\sigma(t+q)}{\sigma(t)\sigma(v)\sigma(q)\sigma(t+q+v)} \right)^{(1-\alpha)/2} \left(\frac{\sigma(v-t)\sigma(v-q)\sigma(t+q)}{\sigma(t)\sigma(v)\sigma(q)\sigma(v-t-q)} \right)^{(1+\alpha)/2} \\ & \quad \times \left(\frac{1-\alpha}{2} \mathcal{D}(t, q, v) + \frac{1+\alpha}{2} \mathcal{D}(t, q, -v) \right). \end{aligned}$$

Имеет место тождество

$$\frac{\sigma(t)\sigma(\pm v)\sigma(q)\sigma(t+q\pm v)}{\sigma(t\pm v)\sigma(q\pm v)\sigma(t+q)} = \frac{\mathcal{D}(t, q, \pm v)}{2(\wp(t) - \wp(v))(\wp(q) - \wp(v))(\wp(t) - \wp(q))},$$

так как левая и правая его части двоякопериодичны по t и по q и их полюсы совпадают. Комбинируя полученные выражения, приходим к формуле (7.4). Доказательство того, что формула (7.4) однозначно определяет функцию $\Psi(t)$, см. в [10]. $\square$

Пусть $\alpha = \pm 1$ либо $\wp'(v) = 0$. Тогда формула сложения (7.4) переходит в формулу сложения для эллиптической функции Бейкера–Ахиезера (см. следствие 4.5).

Свойства деформированной функции Бейкера–Ахиезера описаны в [10]. Здесь отметим лишь, что разложение в ряд функции $\Psi(t)e^{\mu_1 t/2}$ в окрестности точки $t = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \wp(v)t + \frac{1}{6} \wp'(w)t^2 + \left(\frac{1}{40} g_2(\mu) - \frac{1}{8} \wp(v)^2 \right) t^3 + \dots \quad (7.5)$$

Следствие 7.6. Функция $\Psi(t; v, w, \mu)$ при $\mu_1 = 0$ является собственной функцией операторов

$$L_2 = \partial^2 - U, \quad L_3 = 2\partial^3 - 3U\partial - 3\wp'(t) - \frac{1-\alpha^2}{8} \frac{\wp'(v)^2(9\wp'(t) + \alpha\wp'(v))}{(\wp(t) - \wp(v))^3},$$

где

$$U = 2\wp(t) - \frac{\wp'(v)^2 - \wp'(w)^2}{4(\wp(t) - \wp(v))^2},$$

с собственными значениями $\wp(v)$ и $-\wp'(w)$ соответственно.

Доказательство следует из разложения в ряд по q формулы (7.4) и из формулы (7.5). $\square$

Положим $L_1^+ = L_1 = \partial + \phi(t)$ и $L_1^- = \partial - \phi(t)$, где $\phi(t) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(t) + \wp'(w)}{\wp(t) - \wp(v)}$.

Следствие 7.7. $L_2 = L_1^- L_1^+$ и $[L_2, L_3] = -\frac{1}{4}(1-\alpha^2)\wp'(v)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} \right) L_1$, где $\mathcal{F} = \frac{3\wp'(t) + \wp'(w)}{(\wp(t) - \wp(v))^3}$ и $(1-\alpha^2)\wp'(v)^2 = \wp'(v)^2 - \wp'(w)^2$.

Положим $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_6]$, где $a_1 = \mu_1/2$, $a_2 = \wp(v)$, $a_3 = \alpha\wp'(v)$, $a_4 = g_2/2$, $a_6 = g_3$. С учетом соотношения $\wp'(v)^2 = 4\wp(v)^3 - g_2\wp(v) - g_3$, из [7] следует

Лемма 7.8. Ряд $1/\Psi(t)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathcal{Z}$.

Деформированная функция Бейкера–Ахиезера дает следующий аналог эллиптического рода уровня N .

Пример 7.9. Рассмотрим функцию $f_\Psi(t) = 1/\Psi(t; v, w, \mu)$. Имеем

$$f_\Psi(t + 2\omega_k) = f_\Psi(t) \exp(-2\alpha\zeta(v)\omega_k + 2\alpha\eta_k v) \exp(\mu_1\omega_k).$$

Положим $\mu_1/2 = \alpha\zeta(v) + 2(n/N)\eta_1 + 2(m/N)\eta_2$ и $-\alpha v = 2(n/N)\omega_1 + 2(m/N)\omega_2$, где $n, m = 0, 1, \dots, N-1$:

$$f_\Psi(t + 2\omega_k) = f_\Psi(t) \exp\left(\frac{2n}{N}(2\eta_1\omega_k - 2\omega_1\eta_k) + \frac{2m}{N}(2\eta_2\omega_k - 2\omega_2\eta_k)\right).$$

Значит, $f_\Psi(t + 2\omega_1) = f_\Psi(t) \exp(-2\pi i m/N)$, $f_\Psi(t + 2\omega_2) = f_\Psi(t) \exp(2\pi i n/N)$. Следовательно, функция $(f_\Psi(t))^N$ двоякопериодична.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. М. Бухштабер, *Характер Чженя–Дольда в кобордизмах*, I, Матем. сб., **83**:4 (1970), 575–595.
- [2] В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков, *Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии*, УМН, **26**:2 (1971), 131–154.
- [3] В. М. Бухштабер, *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы*, УМН, **45**:3 (1990), 185–186.
- [4] В. М. Бухштабер, Н. Рай, *Торические многообразия и комплексные кобордизмы*, УМН, **53**:2 (1998), 139–140.
- [5] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Moscow Math. J., **7**:2 (2007), 219–242; <http://arxiv.org/abs/math/0609346>.
- [6] В. М. Бухштабер, *Общий род Кричевера*, УМН, **65**:5(395) (2010), 187–188.
- [7] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, *Elliptic formal group laws, integral Hirzebruch genera and Krichever genera*, <http://arxiv.org/abs/1010.0944>.
- [8] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, *Addition theorems, formal group laws and integrable systems*, in: XXIX Workshop on Geometrical Methods in Physics, AIP Conference Proceedings, vol. 1307, 2010, 33–43.
- [9] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых*, в сб.: Нелинейная динамика, Труды МИАН, т. 251, Наука, М., 2005, 54–126.
- [10] Е. Ю. Бунькова, *Теорема сложения для деформированной функции Бейкера–Агизера*, УМН, **65**:6(396) (2010), 183–184.
- [11] M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
- [12] Ф. Хирцебрух, *Комплексные многообразия*, в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958, Физматгиз, М., 1962, 138–157.
- [13] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, 1973.
- [14] F. Hirzebruch, *Elliptic genera of level N for complex manifolds*, Preprint MPI 88-24.
- [15] Э. Кнэпп, *Эллиптические кривые*, Факториал Пресс, М., 2004.
- [16] И. М. Кричевер, *Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха*, Изв. АН СССР, сер. матем., **38**:6 (1974), 1289–1304.
- [17] И. М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомотцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функц. анализ и его прил., **14**:4 (1980), 45–54.
- [18] И. М. Кричевер, *Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Агизера*, Матем. заметки, **47**:2 (1990), 34–45.
- [19] M. Lazard, *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 251–274.

- [20] J. Milnor, *On the cobordism ring Ω_* and complex analogue, Part I*, Amer. J. Math., **82**:3 (1960), 505–521.
- [21] С. П. Новиков, *О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома*, ДАН СССР, **132**:5 (1960), 1031–1034.
- [22] С. П. Новиков, *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб., **57(99)**:4 (1962), 407–442.
- [23] С. П. Новиков, *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов*, Изв. АН СССР, сер. матем., **31**:4 (1967), 855–951.
- [24] С. П. Новиков, *Операторы Адамса и неподвижные точки*, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**:6 (1968), 1245–1263.
- [25] S. Ochanine, *Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques*, Topology, **26**:2 (1987), 143–151.
- [26] D. Quillen, *On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **75**:6 (1969), 1293–1298. [Имеется перевод: Д. Квиллен, *О формальных группах в теориях неориентированных и унитарных кобордизмов*, Раздел 7 в книге «Кобордизмы и их приложения», Топологическая библиотека, том I, Москва–Ижевск, 2005.]
- [27] N. P. Smart, *The Hessian form of an elliptic curve*, in: CHES 2001, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2162, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 118–125.
- [28] Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера)*, Мир, М., 1973.
- [29] J. T. Tate, *The arithmetic of elliptic curves*, Invent. Math., **23**:3-4 (1974), 179–206.
- [30] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции*, УРСС, Москва, 2010.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: bunkova@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
29 декабря 2010 г.