Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Некоторые фазы осциллирующих интегралов, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 91–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:02:03

Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970. [5] Д. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, 1984. [6] Н. К. Никольский, в кн.: *Теория операторов в функциональных пространствах*, Наука, Новосибирск, 1977, 240–282. [7] С. Р. Трейль, ДАН СССР, **288**:2 (1986), 308–312. [8] Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, Изв. АН СССР, **34**:1 (1970), 90–133. [9] Б. С. Павлов, ДАН СССР, **247**:1 (1979), 37–40. [10] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of Exponentials*, Cambridge Univ. Press, 1995. [11] М. М. Джрбашян, Изв. АН Арм. ССР, **5**:2 (1970), 71–96.

Полтавский национальный технический университет
e-mail: gubreev@yandex.ru

Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo, Mexico
e-mail: anauaeh@yahoo.com

Поступило в редакцию
13 сентября 2010 г.

УДК 517.5

Некоторые фазы осциллирующих интегралов*

© 2011. В. Н. КАРПУШКИН

Впервые приводится пример, когда верна гипотеза В. И. Арнольда о том, что справедливы равномерные оценки осциллирующих интегралов с максимальным показателем особенности и неверна его же гипотеза о полунепрерывности показателя особенности. Получена верхняя грубая оценка числа Милнора, при котором неверна последняя гипотеза. Соответствующий ей контрпример проще известного контрпримера А. Н. Варченко к гипотезе Арнольда о полунепрерывности показателя особенности. Это дает основание надеяться на то, что коразмерность и число Милнора, при которых гипотеза о полунепрерывности показателя особенности неверна, будут уменьшены.

Формулировка результатов. Осциллирующим интегралом $I(\tau, Q, \varphi)$ с фазой Q и амплитудой φ называется интеграл по $\mathbb{R}^n$ от $\varphi \exp(i\tau Q)$. Здесь $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dQ(\mathbb{O}) = 0$, Q аналитична в $\mathbb{O}$, φ — гладкая функция, такая, что $\varphi(\mathbb{O}) \neq 0$ и φ обращается в 0 вне достаточно малой окрестности точки $\mathbb{O}$, τ — большой вещественный параметр. Тогда $I(\tau, Q, \varphi)$ убывает при $\tau \rightarrow +\infty$ как $\tau^\beta \ln^p(\tau)$, где β — отрицательное рациональное число, p — целое число, $0 \leq p \leq n-1$, см. [3], [4]. Здесь β — показатель осцилляции ($\beta + n/2$ — показатель особенности, см. [3], [4]), а p — его кратность. Пара чисел (β, p) называется типом асимптотики осциллирующего интеграла с фазой Q .

Пусть $V(\delta, Q, c, A, \psi)$ — объем с фазой Q — интеграл от ψ по множеству $\{x \in A : c - \delta < Q(x) < c + \delta\}$, где A — достаточно малая окрестность точки $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Если $\beta > -1$, ψ — гладкая функция и $Q(\mathbb{O}) = c$, то объем при $\delta \rightarrow 0$ убывает как $\delta^{-\beta} \ln^p(\delta)$, где (β, p) — тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой Q , см. [3], [4].

Пусть $f_\delta = (\delta x_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$, $f = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$, $k > 1$ целое.

Пусть D_d — полицилиндр в $\mathbb{C}^3$ радиуса d с центром в $\mathbb{O} \in \mathbb{C}^3$. Пусть $V_d(\epsilon)$ — множество отображений $Q: (\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathbb{R})$, таких, что модуль каждого из них в D_d меньше ϵ и они аналитичны в D_d .

*Работа поддержана грантом НШ-8462.2010.1.

Пусть $C_0^r(A)$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций φ с нормой

$$(\varphi)_r = \max_{|l| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\partial^{|l|} \varphi / \partial x^l|,$$

обращающихся в нуль вне множества A .

Теорема 1. 1. Тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой f в $\mathbb{O}$ равен $(-3/2k, 0)$.

2. Тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой f_δ в $\mathbb{O}$ равен $(-1/k, 0)$ (при $\delta \neq 0$).

3. Для каждого k существует константа $C > 0$, такая, что для всех $d > 0$ существуют $\epsilon_d > 0$ и окрестность A_d точки $\mathbb{O}$, такие, что $|I(\tau, f + Q, \varphi)| \leq C\tau^{-1/k}(\varphi)_1$, $|V(\delta, f + Q, c, A_d, \psi)| \leq C\delta^{1/k}(\psi)_0$ при всех $\varphi \in C_0^1(A_d)$, $Q \in V_d(\epsilon_d)$, $\tau > 2$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\psi \in C_0^0(A_d)$.

Следствие. Для фазы f неверна гипотеза Арнольда о полунепрерывности показателя особенности. Для фазы f верна гипотеза Арнольда о равномерной оценке осциллирующего интеграла с максимальным показателем особенности, точнее — с максимальным по лексикографическому упорядочению типом асимптотики осциллирующего интеграла.

Замечание 1. Для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ верна гипотеза Арнольда о равномерной оценке осциллирующих интегралов с индивидуальным показателем особенности, более сильная, чем гипотеза о полунепрерывности показателя особенности, см. [6], [7].

Пусть $F_\delta = (\delta x_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_2^8 + x_3^9$, $F = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_2^8 + x_3^9$.

Теорема 2. 1. Тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой F в $\mathbb{O}$ равен $(-3/4, 0)$.

2. Тип асимптотики осциллирующего интеграла с фазой F_δ в $\mathbb{O}$ равен $(-1/2 - 17/72, 0)$ (при $\delta \neq 0$).

3. Число Милнора фазы F в $\mathbb{O}$ равно или меньше 167.

4. Число Милнора фазы F_δ в $\mathbb{O}$ равно 56 ($\delta \neq 0$).

Следствие. Гипотеза Арнольда о полунепрерывности показателя особенности неверна для фаз с числом Милнора, меньшим или равным 167.

Замечание 2. Автору неизвестны точное число Милнора и коразмерность его примера, для которого неверна гипотеза Арнольда о полунепрерывности показателя особенности. Однако в [1, с. 36] указано, что коразмерность примера Варченко равна 73. Автор надеется, что коразмерность его контрпримера меньше.

Доказательство результатов.

Доказательство теоремы 1. Утверждение 1 следует из формулы для типа асимптотики полуквазиоднородной фазы, см. [8]. Утверждение 2 следует из того, что f_δ в некоторой окрестности точки $\mathbb{O}$ эквивалентна x_1^k , и работы [8].

Докажем утверждение 3. Проинтегрируем по x_2, x_3 , а x_1 будем считать параметром. При каждом достаточно малом по модулю x_1 мы получим равномерную оценку осциллирующего интеграла. Действительно, $f(x_1, x_2, x_3) - f(0, x_2, x_3)$ — достаточно малое возмущение фазы $f(0, x_2, x_3)$ и $Q(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит $V_d(\epsilon_d)$. Проинтегрируем по x_1 равномерные оценки. Заметим, что показатель осцилляции фазы $(x_2^2 + x_3^2)^k$ равен $-1/k$ и его кратность равна нулю, см. [8]. Из работы [7] следует что осциллирующий интеграл с такой фазой можно равномерно оценить величиной $K\tau^{-1/k}(\varphi)_1$. Отсюда и из теоремы Фубини вытекает

утверждение 3 для осциллирующих интегралов. Для объемов доказательство аналогично, только сослаться надо на работу [9], а не на [7].

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 следует из формулы для типа асимптотики осциллирующего интеграла с полуквазиоднородной фазой, см. [8].

Утверждение 2 следует из того, что фаза F_δ эквивалентна в некоторой окрестности $\mathbb{O}$ полиному $x_1^2 + x_2^8 + x_3^9$, и из работы [8].

Для доказательства утверждения 3 нужно сделать квазиоднородное сжатие $x_1 = y_1 t^{1/4}$, $x_2 = y_2 t^{1/8}$, $x_3 = y_3 t^{1/9}$, t — большой параметр, затем разделить фазу на t . Тогда фазу F можно рассматривать как малое возмущение полинома $y_1^4 + y_2^8 + y_3^9$ в $\mathbb{O}$, поэтому ее число Милнора в $\mathbb{O}$ не больше, чем число Милнора в $\mathbb{O}$ указанного полинома. Этот полином квазиоднороден, и его число Милнора в $\mathbb{O}$ равно 168, см. [2, с. 156]. Но фаза F имеет в $\mathbb{O}$ строгий минимум, поэтому ее число Милнора в $\mathbb{O}$ нечетно, см. [5], и, значит, оно не больше 167.

Утверждение 4 получается из формулы для числа Милнора, см. [2, с. 156] и того, что F_δ эквивалентна $x_1^2 + x_2^8 + x_3^9$ в некоторой окрестности точки $\mathbb{O}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, ФАЗИС, М., 1996.
 [2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, Наука, М., 1982. [3] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 2, Наука, М., 1984. [4] А. Н. Варченко, *Функц. анализ и его прил.*, **10:3** (1976), 13–38.
 [5] В. А. Васильев, *Функц. анализ и его прил.*, **11:3** (1977), 1–11. [6] В. Н. Карпушкин, *Труды сем. имени И. Г. Петровского*, **9** (1983), 3–39. [7] В. Н. Карпушкин, *Труды сем. имени И. Г. Петровского*, **10** (1984), 150–169. [8] В. Н. Карпушкин, *Функц. анализ и его прил.*, **26:1** (1992), 59–61. [9] В. Н. Карпушкин, в сб.: *Труды МИАН*, т. 221, Наука, М., 1998, 225–231.

Институт проблем передачи информации РАН
 e-mail: vladkarp@rol.ru

Поступило в редакцию
 7 апреля 2010 г.

УДК 517.983.2+517.984.4

Липшицевы функции, идеалы Шэттена и неограниченные дифференцирования

© 2011. Э. Киссин, Д. С. Потапов, Ф. А. Сукочев, В. С. Шульман

1. Введение. Начиная с работы Далецкого и Крейна [4], большой интерес специалистов по теории операторов и математической физике привлекала задача о характеристизации функций, являющихся операторно липшицевыми, т. е. функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f(A) - f(B)\| \leq C\|A - B\| \quad (1)$$

для любых эрмитовых операторов A, B (и некоторой константы $C > 0$). Глубокие результаты в этом направлении были получены М. Ш. Бирманом и М. З. Соляком, Ю. Б. Фарфоровской, В. В. Пеллером, Б. Джонсоном и Дж. Уильямсом и др. (см обзоры [8], [3] и цитируемую там литературу). Значительное число