Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 2, 1–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:04:48

Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка*

© 2011. М. С. АГРАНОВИЧ

Рассматриваются смешанные задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Выводятся уравнения на границе, эквивалентные задаче, в простейших L_2 -пространствах H^s типа Соболева, что позволяет представить решения через поверхностные потенциалы. Доказывается результат о регулярности решений с выходом в немного более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов и пространства B^s_p Бесова. Рассматриваются задачи со спектральным параметром в системе или в условии на части границы, обсуждаются спектральные свойства соответствующих операторов, включая асимптотики собственных значений.

§1. Введение

1.1. Содержание работы. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с липшицевой границей Γ . Пусть в Ω задана сильно эллиптическая система 2-го порядка $Lu = f$, записанная в дивергентной форме, см. ниже (1.1). Предположения о гладкости коэффициентов в известной мере минимизируются. Основную «энергетическую» форму $\Phi_\Omega(u, v)$ мы предположим коэрцитивной при $u = v$ в усиленном смысле на пространстве $H^1(\Omega) = W^1_2(\Omega)$; это условие влечет однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана.

В большей части работы (§§1–6) мы предполагаем, что граница Γ разбита на две области Γ_1 и Γ_2 замкнутой $(n-1)$ -мерной липшицевой поверхностью $\partial\Gamma_j$ без самопересечений, на Γ_1 ставится условие Дирихле, на Γ_2 — Неймана.

Смешанным задачам посвящена обширная литература. Причина состоит в том, что они встречаются во множестве прикладных вопросов. См., например, книги [16] и [41]. (В них содержатся также явные и непростые формулы для решения ряда конкретных смешанных задач.)

Во многих работах накладываются дополнительные условия гладкости на Γ_1 и Γ_2 , или на Γ , и на $\partial\Gamma_j$. См., в частности, [39], [38] и приведенную там литературу, а также [42], [43], [30]. В ряде работ накладывается условие на геометрию границы: обычно требуется, грубо говоря, чтобы угол между нормальными к Γ_1 и Γ_2 в точках на $\partial\Gamma_j$ был меньше π (creased domains, точное определение см. в [10]; см. также [46], [27], [11]). Многие работы посвящены конкретным уравнениям или системам, чаще всего это уравнения Лапласа–Гельмгольца или системы теории упругости; кроме названных выше работ, см. также [19], [35]. При этом исследования в значительной степени направлены на выяснение регулярности решения и в особенности его поведения вблизи $\partial\Gamma_j$. Легко строятся примеры (типа $r^\alpha \sin(\alpha\theta)$ в полярных координатах r, θ в плоской области в случае уравнения Лапласа), показывающие, что даже при бесконечно гладких Γ_j (или

*Поддержано грантом РФФИ 11-01-00277-а.

даже Γ) и $\partial\Gamma_j$ решение может иметь особенность вблизи $\partial\Gamma_j$. В [42], [43], [30] в гладком случае получена асимптотика решения вблизи $\partial\Gamma_j$ при помощи метода Винера–Хопфа в форме, предложенной в [15].

Существенно меньше работ об общих сильно эллиптических уравнениях или системах, в которых *никаких* дополнительных условий гладкости на Γ_j и $\partial\Gamma_j$ или геометрических условий не накладывается. Назовем монографию [24], работы [34] (о скалярном уравнении с формально самосопряженной старшей частью), [18] и [33, п. 3] (о скалярном формально самосопряженном уравнении без младших членов). К этому направлению относится и наша работа (в пределах §§1–5).

Мы приведем общую теорему о существовании и единственности вариационного решения в пространствах H^s и сравним разные подходы к ее доказательству. С учетом деликатности некоторых из затрагиваемых вопросов мы сначала напомним свойства пространств H^s (п. 1.3), постановку задач Дирихле и Неймана (п. 2.1) и непосредственное доказательство однозначной разрешимости смешанной задачи на основе леммы Лакса–Мильграма (п. 2.2). Затем, в §3, выведем двумя способами *уравнения на Γ с операторами типа поверхностных потенциалов на части границы*, эквивалентные задаче и однозначно разрешимые. Эти операторы представляют самостоятельный интерес. В [24] уравнения получены в предположении формальной самосопряженности старшей части системы. Нам оно не понадобится; мы воспользуемся прозрачным подходом в [30] к системе анизотропной упругости.

В §4 мы обобщим теорему об однозначной разрешимости на близкие к H^s пространства H^s_p беселевых потенциалов и пространства B^s_p Бесова, используя *теорему Шнейберга* [40] об экстраполяции обратимости операторов, действующих в интерполяционных шкалах пространств. Ср., в частности, [27] (где получены очень общие теоремы об однозначной разрешимости для уравнения Лапласа при дополнительном геометрическом предположении), а также [11]. Отметим, что в этих работах и ряде других авторы выходят за рамки функциональных пространств, используемых в нашей статье.

В §§5–6 мы рассмотрим спектральные задачи. Для самосопряженных задач мы укажем результаты о базисности собственных функций, а для несамосопряженных задач и задач в рассматриваемых у нас негильбертовых пространствах — условия полноты корневых функций и суммируемости рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского, ср. [3]–[5].

Если система или хотя бы ее старшая часть формально самосопряженная, то интересна асимптотика собственных значений. Для задач со спектральным параметром в системе результат следует из теоремы в [25], и там получена сильная оценка остаточного члена. Задачи со спектральным параметром в условии на части границы — это спектральные задачи Пуанкаре–Стеклова. Мы применим к ним *вариационный подход*, восходящий к Куранту–Гильберту [13], при условии, что граница *почти гладкая* (гладкая вне замкнутого подмножества Γ_{sing} нулевой меры, это определение из [6]). Мы дополним также результаты по спектральным асимптотикам, полученные в [4] и [5].

В §7 мы кратко рассмотрим некоторые обобщения.

1.2. Уточнение постановки задачи. Запишем систему в виде

$$Lu := - \sum \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + \sum b_j(x) \partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Здесь и дальше $\partial_k = \partial/\partial x_k$; u — вектор-функция (столбец) размерности m , так что коэффициенты — это $m \times m$ -матрицы. Как и u , они состоят из комплекснозначных функций. Будем предполагать, что $a_{j,k} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_j \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ (липшицевы), $c \in L_\infty(\Omega)$. В некоторых ситуациях можно предполагать меньше. Условие сильной эллиптичности состоит в равномерной положительной определенности вещественной части $\frac{1}{2}(a + a^*)$ главного символа — матрицы $a(x, \xi) = \sum a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k$ — при вещественных ξ , $|\xi| = 1$. Решение будем сначала искать в $H^1(\Omega)$. Пространство для f будет указано в п. 2.2.

Запишем граничные условия:

$$u^+ = g \quad \text{на } \Gamma_1, \quad T^+ u = h \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (1.2)$$

Здесь $u^+ = g$ — след функции u , принадлежащий $H^{1/2}(\Gamma_1)$, мы его будем обозначать также через $\gamma^+ u$, а $T^+ u = h$ — конормальная производная, ее определение напоминает и кратко комментируется в п. 2.1; она принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

Системе отвечает обозначаемая через $\Phi_\Omega(u, v)$ полуторалинейная форма

$$\int_\Omega \left[\sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \cdot \partial_j \bar{v}(x) + \sum b_j(x) u(x) \cdot \bar{v}(x) + c(x) u(x) \cdot \bar{v}(x) \right] dx; \quad (1.3)$$

она определена на функциях из $H^1(\Omega)$. Наше предположение о ее (усиленной) коэрцитивности состоит в том, что для них справедливо неравенство Гординга

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_0 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u) \quad (1.4)$$

без добавления $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2$ справа. На функциях с $u^+ = 0$ на Γ такое неравенство является следствием одной лишь сильной эллиптичности, если

$$\operatorname{Re}(cu, u)_\Omega \geq C_1 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (1.5)$$

с достаточно большой постоянной C_1 , что у нас предполагается. Здесь $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. На функциях из $H^1(\Omega)$ неравенство (1.4) получается в случае скалярного уравнения с вещественной симметрической матрицей из старших коэффициентов. Для его справедливости в матричном случае на коэффициенты в L накладываются некоторые (достаточные) условия (см., например, [24], [5]); в частности, они выполнены для обобщенных систем теории упругости (см., например, [32]). При этом снова форма $\operatorname{Re}(cu, u)_\Omega$ считается достаточно большой.

1.3. Пространства H^s . См., например, [24]. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ бесселевых потенциалов ($s \in \mathbb{R}$) вводятся формулой

$$H^s(\mathbb{R}^n) = J^{-s} L_2(\mathbb{R}^n), \quad J^{-s} = F^{-1}(1 + |\xi|)^{-s} F, \quad (1.6)$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций; $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. Для $s \geq 0$ это пространства $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ Соболева (при целых s) и Слободянского (при нецелых s). Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны, или двойственны, или сопряжены, относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на их прямое произведение.

Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω в смысле обобщенных функций с обычной нормой $\inf$. Имеется универсальный ограниченный оператор $\mathcal{E}$ продолжения элементов из $H^s(\Omega)$ до элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$, не зависящий от s [37].

Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^s(\mathbb{R}^n)$ элементов с носителями в $\bar{\Omega}$. Норма наследуется из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить с пополнением в $H^s(\mathbb{R}^n)$ линейала $C_0^\infty(\Omega)$, считая функции из него продолженными нулем вне Ω . При $-1/2 < s < 3/2$, $s \neq 1/2$ его можно отождествить также с пополнением $\dot{H}^s(\Omega)$ линейала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Все отождествления понимаются с точностью до эквивалентности норм.

Пространства $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ и $H^s(\Omega)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ на их прямое произведение. Это продолжение имеет вид

$$(f, v)_\Omega = (f, \mathcal{E}v)_{\mathbb{R}^n}, \quad (1.7)$$

где справа используется продолжение скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Разумеется, функции в этих формах до и после запятой можно одновременно менять местами. Пространства $H^s(\Omega)$ и $\tilde{H}^s(\Omega)$ отождествляются при $|s| < 1/2$.

Пространства $H^s(\Gamma)$ определяются на липшицевой поверхности при $|s| \leq 1$ при помощи разбиения единицы и норм в $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Оператор $\gamma^+ v = v^+$ перехода к следу действует ограниченным образом из $H^{s+1/2}(\Omega)$ в $H^s(\Gamma)$ при $0 < s < 1$ и имеет ограниченный правый обратный. Пространства $H^s(\Gamma)$ и $H^{-s}(\Gamma)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ (относительно естественно определяемой меры — площади поверхности на Γ) на их прямое произведение.

Пространство $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ при $s > 1/2$ содержит элементы из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, сосредоточенные на Γ . При $1/2 < s < 3/2$ они имеют вид $(w, v^+)_\Gamma$, $v \in H^s(\Omega)$, $w \in H^{-s+1/2}(\Gamma)$ [26].

Если Γ_0 — область на Γ с липшицевой границей, то пространство $H^s(\Gamma_0)$ определяется при $|s| \leq 1$ как состоящее из сужений на Γ_0 элементов из $H^s(\Gamma)$ с нормой $\inf$. Имеется ограниченный оператор продолжения из $H^s(\Gamma_0)$ в $H^s(\Gamma)$, не зависящий от s . Пространство $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ определяется как подпространство в $H^s(\Gamma)$ элементов с носителями в $\bar{\Gamma}_0$. Пространства $\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0)$ и $H^s(\Gamma_0)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_0)$ на их прямое произведение. Это продолжение строится аналогично (1.7). Пространства $H^s(\Gamma_0)$ и $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ отождествляются при $|s| < 1/2$.

Оператор умножения на характеристическую функцию области Γ_0 является мультипликатором в $H^s(\Gamma)$ при $|s| < 1/2$ и не является мультипликатором в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$. Но он является мультипликатором в $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ при $|s| \leq 1/2$; более того, умножение на эту функцию не меняет элементы этих пространств.

§2. Вариационный подход

2.1. Задачи Дирихле и Неймана. Напомним их вариационную постановку. Запишем формулу Грина

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu, v)_\Omega + (T^+u, v^+)_\Gamma. \quad (2.1)$$

Здесь v — произвольная пробная функция.

Начнем с задачи Неймана ($\Gamma = \Gamma_2$). В этом случае $u, v \in H^1(\Omega)$, так что след $\gamma^+ v = v^+$ принадлежит $H^{1/2}(\Gamma)$. В соответствии с выбором пространства для v правая часть системы $Lu = f$ берется из $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$. Справа в (2.1) используются соответствующие дуальности.

Конормальная производная на гладких функциях определяется формулой $T^+u(x) = \sum \nu_j(x) \partial_j u(x)$ в точках x границы, в которых есть нормаль к ней (это почти все точки). Здесь $\nu_j(x)$ — коэффициенты единичной внешней нормали. В общем случае заданием функции $u \in H^1(\Omega)$ обобщенная функция $Lu(x)$ однозначно определяется только внутри области Ω , а $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ может содержать еще слагаемое из $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с носителем на Γ . Справедливость формулы (2.1) постулируется, и она принимается за определение конормальной производной $T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (по u и $Lu = f$), а также за определение решения задачи Неймана (по $f = Lu$ и $h = T^+u$). Всегда можно принять, что $h = 0$, изменив f на слагаемое с носителем на Γ .

Из неравенства (1.4) следует однозначная разрешимость этой задачи в силу следующей леммы Лакса–Мильграма о слабых решениях абстрактного уравнения $Lu = f$, где L — ограниченный оператор, определяемый приведенным ниже равенством (2.4). (Ср., например, [24, с. 43].)

Лемма 2.1. Пусть H — гильбертово пространство и H^* — сопряженное к нему пространство относительно формы (f, v) , $v \in H$, $f \in H^*$, и пусть задано $f \in H^*$. Предположим, что для непрерывной полуторалинейной формы $\Phi(u, v)$ на H выполнено неравенство

$$\|u\|_H^2 \leq C \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u). \quad (2.2)$$

Тогда существует один и только один элемент $u \in H$, такой, что

$$\Phi(u, v) = (f, v) \quad (2.3)$$

при всех $v \in H$. При этом оператор $L^{-1}: f \mapsto u$ ограничен.

Перейдем к задаче Дирихле ($\Gamma = \Gamma_1$). В этом случае $u \in H^1(\Omega)$ и $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$. Соответственно $f \in H^{-1}(\Omega)$. Формула Грина принимает вид

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu, v)_\Omega. \quad (2.4)$$

В эту формулу u^+ не входит явным образом, но подразумевается, что $u^+ = g$.

Пусть u_0 — функция из $H^1(\Omega)$ с $u_0^+ = g$. Определим $f_0 = Lu_0 \in H^{-1}(\Omega)$ формулой Грина $\Phi_\Omega(u_0, v) = (Lu_0, v)_\Omega$. Разность $u - u_0$ принадлежит $\tilde{H}^1(\Omega) = \dot{H}^1(\Omega)$, и если ее переобозначить через u , то снова получается формула Грина (2.4), в которой уже обе функции u и v принадлежат $\tilde{H}^1(\Omega)$, а $f = Lu$ — сопряженному пространству $H^{-1}(\Omega)$. Это стандартная постановка задачи Дирихле с однородным граничным условием. Форма $\Phi_\Omega(u, u)$ у нас коэрцитивна на $\tilde{H}^1(\Omega)$, так что задача Дирихле однозначно разрешима.

Замечание. Предположим (в этом замечании), что оператор L — формально самосопряженный. Из формулы Грина видно, что тогда пространство $H^1(\Omega)$ есть ортогональная сумма относительно скалярного произведения $\Phi_\Omega(u, v)$ подпространства $\dot{H}^1(\Omega) = \tilde{H}^1(\Omega)$ и подпространства решений системы $Lu = 0$. Последнее параметризуется данными Дирихле в $H^{1/2}(\Gamma)$, поэтому линейные непрерывные функционалы на нем можно привести в изоморфное соответствие с функционалами из $H^{-1/2}(\Gamma)$ над $H^{1/2}(\Gamma)$. По этим причинам пространство $H^{-1}(\Omega)$, дуальное к $\tilde{H}^1(S)$, можно отождествить с фактор-пространством пространства $\dot{H}^{-1}(\Omega)$, дуального к $H^1(\Omega)$, по подпространству функционалов, сосредоточенных на Γ .

2.2. Перейдем к смешанной задаче. Ее решения u тоже ищутся в $H^1(\Omega)$. Ключевым моментом можно считать выбор пространства пробных функций v : это (замкнутое) подпространство $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций с нулевым следом на Γ_1 . (То есть след, принадлежащий $H^{1/2}(\Gamma)$, равен 0 на Γ_1).

Как видно из [27], пространство $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ можно определить также как 1) пространство сужений на Ω элементов пополнения линейала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Gamma}_1)$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$, 2) пополнение в $H^1(\Omega)$ сужений на Ω функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Gamma}_1)$.

Формула Грина, определяющая решение задачи, принимает вид

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu, v)_\Omega + (T^+u, v^+)_{\Gamma_2}, \quad (2.5)$$

где $Lu = f$ и $T^+u = h$. Выбором пространства для v определяется пространство правых частей системы: это пространство

$$\tilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1) := [H^1(\Omega, \Gamma_1)]^*, \quad (2.6)$$

сопряженное к $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ относительно продолжения формы $(f, v)_\Omega$ на их прямое произведение. По аналогии с замечанием в конце п. 2.1 получается, что (2.6) можно отождествить с фактор-пространством пространства $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ по подпространству функционалов, сосредоточенных на $\bar{\Gamma}_1$. Тогда любое f из (2.6) — элемент из $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$, определенный с точностью до прибавления любого элемента с носителем на $\bar{\Gamma}_1$. Можно просто считать f элементом пространства $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$ (продолжая соответствующий функционал на все $H^1(\Omega)$ по теореме Хана–Банаха), фактически это и сделано в [24].

Снова равенство $g = u^+$ подразумевается. Возьмем функцию u_0 из $H^1(\Omega)$ с $u_0^+ = g$ на Γ_1 (продолжим g до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$ и возьмем u_0 с $u_0^+ = g$). Определим Lu_0 формулой $\Phi_\Omega(u_0, v) = (Lu_0, v)_\Omega$, принимая соответствующую кономальную производную равной нулю на Γ_2 . Переобозначим разность $u - u_0$ через u . Для нее получается формула Грина (2.5), в которой обе функции u и v принадлежат пространству $H^1(\Omega, \Gamma_1)$, а $Lu = f$ принадлежит сопряженному пространству (2.6). При желании можно принять, что $h = 0$.

Все это согласуется со сказанным выше про задачи Дирихле и Неймана.

Теперь, используя коэрцитивность формы $\Phi_\Omega(u, u)$ на $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ (ее сейчас достаточно), при помощи леммы Лакса–Мильграма сразу получаем следующую известную теорему. Ср. [24].

Теорема 2.2. *При любых $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $h \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ задача (1.1)–(1.2) имеет одно и только одно вариационное решение $u \in H^1(\Omega)$.*

§3. Сведение смешанной задачи к уравнениям на Γ

3.1. Для экономии места предположим, что область $\Omega = \Omega^+$ лежит на стандартном торе $\mathbb{T}^n$ с периодическими координатами и поверхность Γ разделяет его на две области $\Omega^\pm$. Нормаль к Γ в тех точках, где она есть, считаем направленной в Ω^- . Пространство $\tilde{H}^s(\Omega^+)$ теперь будет подпространством в $H^s(\mathbb{T})$. Коэффициенты системы считаем продолженными на тор с сохранением предположений об их «гладкости» и сильной эллиптичности. Форму $\Phi_\mathbb{T}(u, u)$ предположим коэрцитивной (в усиленном смысле) на $H^1(\mathbb{T})$ (для этого не требуются дополнительные предположения о старшей части системы), а формы

$\Phi_{\Omega^{\pm}}(u, u)$ — на $H^1(\Omega^{\pm})$. Тогда задачи Дирихле и Неймана в $\Omega^{\pm}$ однозначно разрешимы. Это позволяет воспользоваться готовыми результатами из [3] (где мы следовали идеям из [31], [12] и [24]). Мы продолжим рассмотрение смешанной задачи в $\Omega = \Omega^+$, хотя можно одновременно рассматривать ее и в Ω^- .

Система (1.1) у нас однозначно разрешима в $H^1(\mathbb{T})$ при $f \in H^{-1}(\mathbb{T})$. (Это позволит в дальнейшем считать, что $f = 0$.) Обратный оператор L^{-1} — интегральный:

$$L^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{E}(x, y)f(y) dy. \quad (3.1)$$

Это так называемый ньютонов потенциал. Его ядро $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение для L . Имея его, составим *потенциал простого слоя*

$$\mathcal{A}\psi(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x, y)\psi(y) dS_y \quad (3.2)$$

и *потенциал двойного слоя*; последний в общем случае определяется формулой

$$\mathcal{B}\varphi(x) = \int_{\Gamma} (\tilde{T}_y^+ \mathcal{E}^*(x, y))^* \varphi(y) dS_y \quad (x \notin \Gamma), \quad (3.3)$$

где $\tilde{T}^+(\cdot)$ — кономальная производная, отвечающая формально сопряженному к L оператору $\tilde{L}$ (см. [24]). При $L = -\Delta$ звездочки и волна опускаются. Напомним свойства этих операторов (см. [24] и [3]).

При наших предположениях оператор $\mathcal{A}$ продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\mathbb{T})$ и, значит, в $H^1(\Omega^{\pm})$. При $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ функция $u = \mathcal{A}\psi$ удовлетворяет однородной системе $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$ и имеет одинаковые следы $\gamma^{\pm}u$ на Γ , обозначаемые через $A\psi$; это ограниченный обратимый оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Это позволяет строить решение задачи Дирихле в Ω^+ для системы $Lu = 0$ по формуле

$$u = \mathcal{A}A^{-1}u^+. \quad (3.4)$$

Оператор $\mathcal{B}$ действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^{\pm})$, и при $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ функция $u = \mathcal{B}\varphi$ тоже удовлетворяет однородной системе в $\Omega^{\pm}$. Она имеет следы $\gamma^{\pm}\mathcal{B}\varphi$ на Γ , и это ограниченные операторы в $H^{1/2}(\Gamma)$. Положим, как в [24], $B = \frac{1}{2}(\gamma^+\mathcal{B} + \gamma^-\mathcal{B})$. Это так называемое *прямое значение потенциала двойного слоя*. Скачок $[u] = u^- - u^+$ функции $u = \mathcal{B}\varphi$ равен φ , поэтому $\gamma^+\mathcal{B} = -\frac{1}{2}I + B$. Оператор справа ограничен и обратим в $H^{1/2}(\Gamma)$. Это позволяет записать решение задачи Дирихле в Ω^+ также в виде

$$u = \mathcal{B}(-\frac{1}{2}I + B)^{-1}u^+. \quad (3.5)$$

Операторы $T^{\pm}$ применимы к функциям $\mathcal{A}\psi$ и $\mathcal{B}\varphi$. При этом $T^+\mathcal{B} = T^-\mathcal{B}$. Оператор $H = -T^{\pm}\mathcal{B}$ называется *гиперсингулярным оператором*. Он действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ и обратим. Поэтому решение задачи Неймана для системы $Lu = 0$ в Ω^+ можно строить по формуле

$$u = -\mathcal{B}H^{-1}T^+u. \quad (3.6)$$

Далее, $T^{\pm}\mathcal{A}$ — ограниченные операторы в $H^{-1}(\Gamma)$. Положим, как в [24], $\hat{B} = \frac{1}{2}(T^+\mathcal{A} + T^-\mathcal{A})$. Скачок $[T\mathcal{A}\varphi] = T^-\mathcal{A}\varphi - T^+\mathcal{A}\varphi$ равен $-\varphi$, поэтому $T^+\mathcal{A} =$

$\frac{1}{2}I + \widehat{B}$. Это ограниченный обратимый оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$, и решение задачи Неймана в Ω^+ можно строить также по формуле

$$u = \mathcal{A}(\frac{1}{2}I + \widehat{B})^{-1}T^+u. \quad (3.7)$$

Нам еще нужны оператор N (Neumann-to-Dirichlet), переводящий данные Неймана T^+u в данные Дирихле u^+ , и обратный оператор D (Dirichlet-to-Neumann). Оператор N действует ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, оператор D — в обратную сторону. Для них справедливы неравенства типа Гординга, вытекающие из формулы Грина (2.1) и исходного предположения о коэрцитивности:

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_1 \operatorname{Re}(D\varphi, \varphi)_\Gamma, \quad \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_2 \operatorname{Re}(N\psi, \psi)_\Gamma. \quad (3.8)$$

Обратимость операторов D и N следует из предположения об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана. Она следует также из этих неравенств в силу леммы Лакса–Мильграма. Кроме того, известно, что $BA = A\widehat{B}$, поэтому из написанных выше формул следует, что

$$N = A(\frac{1}{2}I + \widehat{B})^{-1} = (\frac{1}{2}I + B)^{-1}A. \quad (3.9)$$

В случае бесконечной гладкости поверхности Γ и коэффициентов в L операторы A и N — (сильно эллиптические) ПДО (псевдодифференциальные операторы) порядка -1 , а H и D — порядка 1 .

3.2. Теперь приведем два варианта составления уравнений на Γ для смешанной задачи. В первом мы следуем работе [30]; ср. также [42], [43].

Этот вариант состоит в следующем. Продолжим g до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$, сохранив для продолжения обозначение g . Теперь для решения u нашей задачи мы имеем $u^+ = g + g_0$, где $g_0 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$. Если мы найдем g_0 , то сможем вычислить u как решение задачи Дирихле. С другой стороны, $h = (D(g+g_0))|_{\Gamma_2}$. Введем оператор

$$D_{\Gamma_2}\varphi = (D\varphi)|_{\Gamma_2} \quad (3.10)$$

из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_2)$. Он получен из D сужением области определения и ограничением получающихся функций на Γ_2 . Получаем уравнение для g_0 :

$$D_{\Gamma_2}g_0 = h_0, \quad (3.11)$$

где $h_0 = h - (Dg)|_{\Gamma_2}$ — известная функция.

Теорема 3.1. Оператор D_{Γ_2} обратим.

Доказательство. Первое из неравенств (3.8) «наследуется» оператором D_{Γ_2} :

$$\|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)}^2 \leq C_1 \operatorname{Re}(D_{\Gamma_2}\varphi, \varphi)_{\Gamma_2}. \quad (3.12)$$

Здесь в форме справа функции находятся в дуальных пространствах $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$. Достаточно воспользоваться леммой Лакса–Мильграма. $\square$

Итак, первый подход состоит по существу в решении уравнения (3.11) с последующим решением, скажем, уравнения $A\psi = g + g_0$, после чего u определяется по формуле $u = \mathcal{A}\psi$. Как видно из (3.5), можно строить решение и в виде потенциала двойного слоя.

Второй подход аналогичен первому, только вместо задачи Дирихле используется задача Неймана. Продолжим h до элемента из $H^{-1/2}(\Gamma)$. После этого $T^+u = h + h_0$, где $h_0 \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Введем оператор

$$N_{\Gamma_1}\psi = (N\psi)|_{\Gamma_1} \quad (3.13)$$

из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Для h_0 получим уравнение

$$N_{\Gamma_1}h_0 = g_1, \quad (3.14)$$

где g_1 — известная функция $g - (Nh)|_{\Gamma_1}$.

Теорема 3.2. *Оператор N_{Γ_1} обратим.*

Доказательство. Второе неравенство в (3.8) для N наследуется оператором N_{Γ_1} :

$$\|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)}^2 \leq C_2 \operatorname{Re}(N_{\Gamma_1}\psi, \psi)_{\Gamma_1}. \quad (3.15)$$

Функции справа принадлежат дуальным пространствам $H^{1/2}(\Gamma_1)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, и мы опять применяем лемму Лакса–Мильграма. $\square$

Второй вариант состоит, таким образом, в том, что мы решаем сначала уравнение (3.14), затем, скажем, уравнение $H\varphi = h + h_0$, после чего находим решение в виде $u = -\mathcal{B}\varphi$. Можно строить решение и в виде потенциала простого слоя, см. (3.7).

Замечания. 1. Операторы N_{Γ_1} и D_{Γ_2} для частей замкнутой липшицевой поверхности являются аналогами операторов N и D для всей поверхности и наследуют свойства последних — неравенства типа Гординга и обратимость. Операторы A_S и H_S с близкими свойствами рассмотрены в [4]. В специальных случаях они встречались, в частности, в [42], [43], [30].

2. Названия «Neumann-to-Dirichlet operator» заслуживает не только оператор N_{Γ_1} , но и оператор $D_{\Gamma_1}^{-1}$, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Это операторы с разными областями определения и разными областями значений. На Γ_2 тоже есть два оператора, N_{Γ_2} и $D_{\Gamma_2}^{-1}$.

Приложения операторов N , D , N_{Γ_1} , D_{Γ_2} чрезвычайно многообразны, см., например, [23], [48] и приведенную там литературу.

§ 4. Регулярность решений

4.1. Пространства H_p^s бесселевых потенциалов и пространства B_p^s Бесова. (См., например, [47], [21], [29], [2].) Условимся считать, что

$$s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p < \infty, \quad p + p' = pp'. \quad (4.1)$$

Пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = J^{-s}L_p(\mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

где J^{-s} — тот же оператор, что и в (1.6). При целом $s \geq 0$ это пространство Соболева $W_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Пространства Слободецкого $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяются при нецелых $s > 0$. Если $0 < s < 1$, то

$$\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}^p = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p + \iint \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y - x|^{n+sp}} dx dy. \quad (4.3)$$

Пространство Бесова $B_p^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) = J^{\sigma-s} W_p^\sigma(\mathbb{R}^n), \quad 0 < \sigma < 1, \quad (4.4)$$

при изменении $\sigma \in (0, 1)$ норма заменяется эквивалентной нормой. При нецелом $s > 0$ это пространства Слободецкого.

При $p = 2$ пространства H_p^s и B_p^s совпадают с H^s .

Ниже в этом пункте букву H можно заменить на B .

Пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на их прямое произведение.

Пространство $H_p^s(\Omega)$ состоит из сужений элементов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω с нормой $\inf$. Тот же самый, что и раньше, оператор $\mathcal{E}$ является ограниченным оператором продолжения элементов из $H_p^s(\Omega)$ до элементов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ [37].

Пространство $\tilde{H}_p^s(\Omega)$ определяется как подпространство в $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ элементов с носителями в $\bar{\Omega}$. При $-1/p' < s < 1 + 1/p$, $s \neq 1/p$ его можно отождествить с пополнением $\dot{H}_p^s(\Omega)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_p^s(\Omega)$.

Пространства $\tilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$ и $H_p^s(\Omega)$ дуальны относительно формы (1.7). Пространства $H_p^s(\Omega)$ и $\tilde{H}_p^s(\Omega)$ отождествляются при $-1/p' < s < 1/p$.

Пространства $B_p^s(\Gamma)$ вводятся для $|s| \leq 1$ при помощи разбиения единицы на Γ и норм в $B_p^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Пространства $B_p^s(\Gamma)$ и $B_{p'}^{-s}(\Gamma)$ дуальны относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ на их прямое произведение.

Оператор перехода к следу действует ограниченным образом из $H_p^{s+1/p}(\Omega)$ и из $B_p^{s+1/p}(\Omega)$ в $B_p^s(\Gamma)$ при $0 < s < 1$. Эти два оператора имеют общий правый обратный [22].

Пусть Γ_0 — область на Γ . Пространство $B_p^s(\Gamma_0)$ определяется как состоящее из сужений на Γ_0 элементов из $B_p^s(\Gamma)$ с нормой $\inf$. Имеется ограниченный оператор продолжения элементов из $B_p^s(\Gamma_0)$ до элементов из $B_p^s(\Gamma)$, не зависящий от s , p . Пространство $\tilde{B}_p^s(\Gamma_0)$ определяется как подпространство в $B_p^s(\Gamma)$ элементов с носителями в $\bar{\Gamma}_0$. Пространства $\tilde{B}_{p'}^{-s}(\Gamma_0)$ и $B_p^s(\Gamma_0)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_0)$ на их прямое произведение. Пространства $B_p^s(\Gamma_0)$ и $\tilde{B}_p^s(\Gamma_0)$ отождествляются при $-1/p' < s < 1/p$.

4.2. Решения смешанной задачи теперь ищутся в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$, где обязательно $|s| < 1/2$: в (1.2)

$$g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1), \quad h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2). \quad (4.5)$$

Вариационная (слабая) постановка смешанной задачи сохраняет вид (2.5). Пробные функции v принадлежат подпространству $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega, \Gamma_1)$ функций пространства $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1 . Ср. [27].

Правая часть f системы принадлежит сопряженному пространству

$$\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega, \Gamma_1) := [H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega, \Gamma_1)]^* \quad (4.6)$$

относительно продолжения формы (1.7).

Здесь всюду пространства H можно заменить пространствами B .

Допустимые точки (s, t) , $t = 1/p$, образуют квадрат

$$Q = \{(s, t) : |s| < 1/2, 0 < t < 1\}. \quad (4.7)$$

Частные случаи смешанной задачи — задачи Дирихле и Неймана. Про них мы знаем [3], что они однозначно разрешимы при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми ε и δ . Мы хотим получить аналогичный результат для смешанной задачи. Мы сделаем это, как в [4], рассматривая операторы типа потенциала в шкалах пространств на границе. Ср. [17], [27], [11].

Прежде всего заметим, что операторы

$$\begin{aligned} A, N : B_p^{-1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow B_p^{1/2+s}(\Gamma), & H, D : B_p^{1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow B_p^{-1/2+s}(\Gamma), \\ \frac{1}{2}I \pm B : B_p^{1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow B_p^{1/2+s}(\Gamma), & \frac{1}{2}I \pm \widehat{B} : B_p^{-1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow B_p^{-1/2+s}(\Gamma) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ограничены и обратимы при тех же (s, t) [3]. При этом $N = D^{-1}$ и сохраняются соотношения (3.9).

Оператор N_{Γ_1} действует ограниченным образом из $\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$ (при тех же (s, t)). Каждое из этих двух семейств пространств образует интерполяционную шкалу относительно комплексного метода интерполяции по каждому из индексов. Мы объяснили это в [4] при рассмотрении операторов A_S и H_S . В точке $(s, t) = (0, 1/2)$ наш оператор обратим. Значит, применима теорема Шнейберга [40], и получается

Теорема 4.1. *Оператор $N_{\Gamma_1} : \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1) \rightarrow B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$ остается обратимым при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми ε и δ .*

При этих (s, t) мы сейчас установим однозначную разрешимость смешанной задачи. Сначала проверим единственность. Пусть $g = 0$ и $h = 0$. Тогда $T^+u = h_0 \in \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)$. Значит, $Nh_0 = u^+$ на Γ и $N_{\Gamma_1}h_0 = 0$. Но оператор N_{Γ_1} обратим, поэтому $h_0 = 0$ и $T^+u = 0$ на Γ . Остается воспользоваться единственностью для задачи Неймана. Мы использовали второй вариант подхода к смешанной задаче из п. 3.2. С этим вариантом очевидным образом получается и существование. Это дает основной результат в настоящем пункте.

Теорема 4.2. *Смешанная задача (1.1)–(1.2) с $f = 0$, $g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$, $h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2)$ остается однозначно разрешимой при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми ε и δ .*

В этих рамках, чем «лучше» правые части, тем «лучше» решение. Это и есть результат о регулярности. Он автоматически следует из теоремы 4.2.

Замечания. 1. Вместо N_{Γ_1} можно использовать оператор D_{Γ_2} , действующий из $\widetilde{B}_p^{1/2+s}(\Gamma_2)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2)$, для него тоже получается ограниченность и обратимость при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми ε и δ . Затем используется первый вариант подхода к смешанной задаче из п. 3.2.

2. Как мы видим, в этих более общих пространствах сохраняются оба варианта сведения смешанной задачи к эквивалентным уравнениям на границе и решения этих уравнений при помощи операторов типа потенциала.

3. Теорема 4.2 обобщается на случай ненулевой правой части f в уравнении $Lu = f$. Действительно, пусть $f \in \widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega, \Gamma_1)$. Тогда мы можем считать f элементом пространства $\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$. (Букву H можно заменить буквой B .) Пусть u_0 — решение задачи Неймана для уравнения $Lu_0 = f$ с

нулевой конормальной производной. Вычитая u_0 из u , приходим к задаче, к которой применима теорема 4.2.

§5. Спектральные задачи

5.1. Задача со спектральным параметром в системе. Рассмотрим задачу

$$Lu = \lambda u \quad \text{в } \Omega, \quad u^+ = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad T^+u = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (5.1)$$

Пусть сначала оператор L формально самосопряженный: $L = \tilde{L}$. Считая уравнение $Lu = f$ однозначно разрешимым в $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ при $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1)$, введем в последнем пространстве скалярное произведение (ср. [34])

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\Omega := (L^{-1}f_1, f_2)_\Omega. \quad (5.2)$$

Относительно него неограниченный оператор L в этом пространстве (с областью определения $H^1(\Omega, \Gamma_1)$) остается самосопряженным. Собственные значения положительны. Как и в других задачах, рассмотренных раньше в [3] и [5], собственные значения и собственные функции совпадают с собственными значениями и собственными функциями аналогичного оператора в $L_2(\Omega)$. А так как пространство $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ содержит $\tilde{H}^1(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega)$ и содержится в $H^1(\Omega)$, то действует результат Метивье [25], согласно которому для считающей функции $N_L(\lambda)$ — числа собственных значений с учетом кратностей, меньших λ , — справедлива асимптотика

$$N_L(\lambda) = c_L \lambda^{n/2} + O(\lambda^{(n-1/2)/2}), \quad (5.3)$$

где коэффициент c_L — тот же, что и в задачах Дирихле и Неймана (см. [5]).

Далее, справедливы такие же утверждения о собственных функциях, как в случаях этих задач [5]. Из собственных функций составляется ортонормированный базис в $\tilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1)$. Они принадлежат пространству $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ и там образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения $(Lu, v)_\Omega$, кстати, равного $\Phi_\Omega(u, v)$. Этот результат распространяется на промежуточные пространства. Более того, можно удлинить шкалу этих пространств влево и вправо на ε . Если же выйти в пространства, отвечающие значениям t с $|t - 1/2| < \delta$, $t \neq 1/2$, то там сохраняется полнота собственных функций и суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского.

Если только главная часть оператора L формально самосопряженная, то собственные значения лежат в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с некоторого номера и имеют асимптотику с тем же главным членом. Сохраняются утверждения о гладкости корневых функций, об их полноте и о суммируемости.

Если совсем отказаться от предположений о самосопряженности, то сохраняется оценка собственных значений $|\lambda_j(L^{-1})| \leq Cj^{-2/n}$. Наибольшая общность, в которой мы можем получить утверждения о полноте и о суммируемости, — это случай, когда все значения формы $\Phi_\Omega(u, u)$ лежат в угле раствора меньше $2\pi/n$ с биссектрисой $\mathbb{R}_+$. Ср. [5].

5.2. Задачи Пуанкаре–Стеклова со спектральным параметром на части границы. Рассмотрим две задачи.

$$\text{I. } Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad T^+u = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \lambda T^+u = u^+ \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Здесь $T^+u \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ и (см. п. 3.2) $N_{\Gamma_1}T^+u = u^+ \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. Поэтому для собственных функций спектральной задачи I получается уравнение $N_{\Gamma_1}\psi = \lambda\psi$, где $\psi = T^+u$, и оно эквивалентно этой задаче при $L = \tilde{L}$.

II. $Lu = 0$ в Ω , $u^+ = 0$ на Γ_2 , $\lambda T^+u = u^+$ на Γ_1 .

Здесь $u^+ \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ и (см. п. 3.2) $D_{\Gamma_1}u^+ = T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Поэтому для собственных функций спектральной задачи II получается уравнение $D_{\Gamma_1}^{-1}\psi = \lambda\psi$, где снова $\psi = T^+u$, и оно эквивалентно этой задаче при $L = \tilde{L}$.

Во второй задаче мы поменяли местами Γ_1 и Γ_2 по сравнению с п. 3.2, чтобы ниже сопоставить соответствующие операторы.

Спектральные свойства операторов N_{Γ_1} и D_{Γ_1} аналогичны спектральным свойствам соответственно операторов A_S и H_S (при $\Gamma_1 = S$), описанным в [4]. Скалярное произведение $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\Gamma_1}$ при $L = \tilde{L}$ определяем в первом случае в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ как $(N_{\Gamma_1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}$ и во втором случае в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ как $(D_{\Gamma_1}^{-1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}$.

В частности, мы имеем в виду свойства гладкости собственных и корневых функций, результаты об ортонормированном базисе из собственных функций при $p = 2$, если $L = \tilde{L}$, о полноте и суммируемости рядов по корневым функциям методом Абеля–Лидского в остальных случаях. Если оператор L имеет формально самосопряженную главную часть, то собственные значения лежат в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с некоторого номера. Наибольшая общность, при которой получаются утверждения о полноте и суммируемости, — это случай, когда все значения квадратичных форм $\Phi_{\Omega^\pm}(u, u)$ лежат в угле раствора меньше $\pi/(n-1)$ с биссектрисой $\mathbb{R}_+$.

Дополнительные результаты о полноте получаются как следствия (плотных) вложений рассматриваемых пространств.

§6. Спектральные асимптотики

Здесь мы хотим получить асимптотические формулы для собственных значений операторов N_{Γ_1} и $D_{\Gamma_1}^{-1}$. Но до этого рассмотрим операторы на Γ . Сформулируем сначала следующие предположения.

1°. $L = \tilde{L}$.

2°. Поверхность Γ является почти гладкой (см. п. 1.1).

3°. L — скалярный оператор или матричный оператор, старшая часть которого совпадает с оператором Ламе.

Как показано в [5], при этих условиях можно вывести асимптотическую формулу для собственных значений $\lambda_j(N)$ оператора N

$$\lambda_j(N) \sim C_N j^{-1/(n-1)} \quad (6.1)$$

(в том смысле, что разность левой и правой частей есть $o(j^{-1/(n-1)})$) из результатов работы [6] в сочетании с приведенной выше формулой (3.9) и очень глубокими известными результатами об обратимости операторов $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \hat{B}$ в $L_2(\Gamma)$ [28], [14]. Собственные значения нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратностей.

Мы освободимся здесь от ограничения 3° при помощи вариационного подхода к асимптотикам. При этом будем рассматривать оператор bN , где функцию

b будем для начала считать мультипликатором в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ и для простоты неотрицательной функцией. Лишницеву поверхность Γ будем считать почти гладкой в окрестности ее носителя. Результат сформулирован ниже в теореме 6.5. Ср. с [1] и в особенности с работой [45], где рассматривались кусочно-гладкие поверхности.

Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, для простоты неотрицательный — с неотрицательными собственными значениями. Считающая функция $N(\lambda) = N(\lambda, T)$ для его положительных собственных значений $\lambda_j(T)$ ($j = 1, 2, \dots$) — это число собственных значений с учетом кратностей λ ($\lambda > 0$). Асимптотика $N(\lambda) \sim \beta \lambda^{-\alpha}$ при $\lambda \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) эквивалентна асимптотике $\lambda_j \sim \beta' j^{-1/\alpha}$ при $j \rightarrow \infty$, $\beta' = \beta^{1/\alpha}$.

Вариационное отношение для T имеет вид $R(x) = (Tx, x)/(x, x)$. Собственные значения являются «последовательными максимумами» этого отношения:

$$\lambda_{j+1}(T) = \min_{\text{codim } X \leq j} \max_{0 \neq x \in X} R(x), \quad (6.2)$$

где X — подпространства в H .

Нам понадобятся известные леммы, мы приведем их в упрощенном виде (ср. [8, добавление 1] или [45, п. 1]). Первая из них позволяет сравнивать считающие функции операторов, действующих в разных пространствах.

Лемма 6.1. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_1$, $(\cdot, \cdot)_2$, T_1 и T_2 — компактные неотрицательные операторы в этих пространствах, S — ограниченный оператор из H_1 в H_2 , $(T_1 x, x)_1 = 0$ при $Sx = 0$ и

$$(T_1 x, x)_1 / (x, x)_1 \leq (T_2 Sx, Sx)_2 / (Sx, Sx)_2 \quad (x \in H_1, Sx \neq 0). \quad (6.3)$$

Тогда $N(\lambda, T_1) \leq N(\lambda, T_2)$. В частности, это верно, если $H_1 \subset H_2$, $(\cdot, \cdot)_1 = (\cdot, \cdot)_2$ на H_1 и S — оператор вложения; знаменатели в (6.3) в этом случае не нужны.

Лемма 6.2. Пусть H — ортогональная сумма $H_1 \oplus H_2$, подпространства H_1 и H_2 инвариантны относительно неотрицательного оператора T в H и T_j — сужения этого оператора на H_j . Тогда $N(\lambda, T) = N(\lambda, T_1) + N(\lambda, T_2)$.

Лемма 6.3 (М. Ш. Бирман–М. З. Соломяк). Пусть компактный неотрицательный оператор T в гильбертовом пространстве H при любом $\varepsilon > 0$ допускает представление $T = T'_\varepsilon + T''_\varepsilon$, где T'_ε и T''_ε — компактные операторы, T'_ε неотрицателен, $\lambda_j(T'_\varepsilon) \sim C(T'_\varepsilon) j^{-\sigma}$ при некотором $\sigma > 0$ и $\limsup |\lambda_j(T''_\varepsilon)| j^\sigma \leq \varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $C(T'_\varepsilon)$ имеет конечный предел $C(T)$ и $\lambda_j(T) \sim C(T) j^{-\sigma}$.

6.1. Оператор bN . Коэффициенты в L будем сначала считать бесконечно гладкими. Введем в $H^{-1/2}(\Gamma)$ скалярное произведение

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_\Gamma = (N\psi_1, \psi_2)_\Gamma. \quad (6.4)$$

Оператор bN остается компактным и самосопряженным. Рассмотрим вариационное отношение

$$R_b(\psi) = \langle bN\psi, \psi \rangle_\Gamma / \langle \psi, \psi \rangle_\Gamma = (bN\psi, N\psi)_\Gamma / (N\psi, \psi)_\Gamma \quad (\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)). \quad (6.5)$$

Считая, что $\psi = T^+u$ для решения $u \in H^1(\Omega)$ системы $Lu = 0$, имеем $N\psi = u^+$. Поэтому числитель равен $(bu^+, u^+)_{\Gamma}$, а знаменатель равен $(T^+u, u^+)_{\Gamma}$, т. е. $\Phi_{\Omega}(u, u)$ в силу формулы Грина. Отношение (6.5) переписывается в виде

$$Q_b(u) = (bu^+, u^+)_{\Gamma} / \Phi_{\Omega}(u, u). \quad (6.6)$$

Теперь числитель — форма некоторого компактного оператора в подпространстве пространства $H^1(\Omega)$, состоящем из решений u системы $Lu = 0$. За скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ принимаем $\Phi_{\Omega}(u, v)$. Тогда ортогональное дополнение к подпространству решений составляют функции с $u^+ = 0$, это уже отмечалось в п. 2.1. Поэтому (см. лемму 6.2) будем рассматривать отношение (6.6) на всех $u \in H^1(\Omega)$. (На самом деле переход от (6.5) к (6.6) не обязателен.)

Теперь воспользуемся тем, что для липшицевой области Ω можно построить области $\tilde{\Omega}$ и $\hat{\Omega}$ с бесконечно гладкими границами $\tilde{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}$, такие, что $\tilde{\Omega} \subset \Omega \subset \hat{\Omega}$ и эти границы сколь угодно близки к Γ . Более точно, между этими гладкими границами и Γ имеется взаимно однозначное соответствие и расстояние между соответствующими точками становится равномерно сколь угодно малым. См., например, [49].

В нашей ситуации, зафиксировав окрестность U сингулярного множества Γ_{sing} со сколь угодно малой мерой, мы можем принять, что $\tilde{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}$ совпадают с Γ вне U . Пусть θ_U — гладкое приближение к характеристической функции дополнения к U с носителем в этом дополнении. Тогда для соответствующих отношений $\tilde{Q}_{b\theta_U}(u)$ и $\hat{Q}_{b\theta_U}(u)$ мы имеем

$$\hat{Q}_{b\theta_U}(u) \leq Q_{b\theta_U}(u) \leq \tilde{Q}_{b\theta_U}(u) \quad (6.7)$$

на функциях из $H^1(\hat{\Omega})$ и их сужениях на Ω и $\tilde{\Omega}$. Левое и правое отношения отвечают гладким задачам, и соответствующие операторы $b\theta_U \hat{N}$ и $b\theta_U \tilde{N}$ имеют известную и одинаковую асимптотику собственных значений (мы имеем в виду ее старший член), см. [9]. Отсюда аналогичный результат получается для $b\theta_U N$. Это вытекает из леммы 6.1.

Теперь рассмотрим отношение $Q_c(u)$, где $c = b(1 - \theta_U)$. В силу ограниченности оператора перехода к следу

$$Q_c(u) \leq C \int_{\Gamma} |c||u|^2 dS / \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \quad (6.8)$$

и справа Γ можно заменить на $S = \text{supp } c$. После этого отношение справа отвечает компактному неотрицательному оператору в $H^{1/2}(S)$.

Лемма 6.4. Пусть S — область на ограниченной липшицевой поверхности Γ размерности $n-1$ с липшицевой границей и $c(x)$ — неотрицательная функция из $L_r(S)$ на этой поверхности. Тогда для считающей функции $N(\lambda, T)$ компактного оператора T в $H^s(S)$, $s > 0$, с вариационным отношением

$$\int_S c(x)|u(x)|^2 dS / \|u\|_{H^s(S)}^2 \quad (6.9)$$

справедливо неравенство

$$N(\lambda, T) \leq C_1 \|c\|_{L_r(S)}^{\tau} \lambda^{-\tau} \quad (6.10)$$

при $r > 1$, если $n-1 = 2s$, и $r = (n-1)/(2s)$, если $n-1 > 2s$, $c \tau = (n-1)/(2s)$.

Доказательство. В случае, когда S — область в $\mathbb{R}^{n-1}$, это лемма 1.7 в [45]. Как там указано, это утверждение получено в [8] (теорема 4.1) для целых s , но доказательство сохраняется при нецелых s . Лемма установлена для скалярных функций, но легко переносится на вектор-функции.

Чтобы распространить ее на случай области на липшицевой поверхности, можно принять, что эта область мала и допускает представление $x_n = \phi(x')$ с липшицевой функцией $\phi(x')$ в проекции этой области на x' -плоскость. Остается учесть, что $dS = (1 + |\nabla\phi(x')|^2)^{1/2} dx'$ и градиент здесь ограничен. $\square$

В нашей ситуации $s = 1/2$, и лемма приводит к оценке

$$|\lambda_j(T)| \leq C_2 \|c\|_{L_r(S)} \lambda^{-(n-1)}, \quad (6.11)$$

решающей дело, поскольку L_r -норма функции $c = b(1 - \theta_U)$ стремится к нулю, когда окрестность U стягивается к Γ_{sing} , так как при наших предположениях о b это ограниченная функция. Здесь следует воспользоваться леммой 6.3.

Предположение о гладкости коэффициентов в L снимается при помощи аппроксимации исходных коэффициентов гладкими (ср. [45, п. 5]). Получается

Теорема 6.5. Пусть $L = \tilde{L}$, неотрицательная функция b — мультипликатор в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ и поверхность Γ является почти гладкой в окрестности ее носителя. Тогда для собственных значений оператора bN справедлива асимптотика вида (6.1).

Коэффициент C_{bN} вычисляется по формуле

$$C_{bN}^{n-1} = (2\pi)^{-(n-1)} \iint_{T^*\Gamma} b(x') n_\alpha(x', \xi') dx' d\xi' \quad (6.12)$$

в случае гладких коэффициентов в L ; здесь из Γ выбрасывается сингулярное множество. Через $\alpha(x', \xi')$ обозначен главный символ оператора N и через $n_\alpha(x', \xi')$ число его собственных значений, больших 1. Если коэффициенты в L негладкие, то при их аппроксимации гладкими операторы bN для этих гладких задач сходятся по операторной норме к интересующему нас оператору. Нужный коэффициент получается предельным переходом, предел существует в силу той же леммы 6.3. Он вычисляется через главный символ оператора L .

Из-за недостатка места мы не приводим обобщение на случай функции b со значениями разных знаков. Однако отметим следующее обобщение.

Теорема 6.6. Утверждение теоремы 6.5 остается в силе в случае функции b , принадлежащей $L_r(\Gamma)$, где $r = n - 1$ при $n > 2$ и $r > 1$ при $n = 2$, если определить bN как оператор с вариационным отношением (6.5) или (6.6).

При использовании, например, отношения (6.6) имеется в виду оператор в $H^1(\Omega)$, имеющий форму $(bv^+, v^+)_{\Gamma}$. Эта форма определена в силу теорем вложения и неравенства Гёльдера. В этом случае b уже, вообще говоря, не является мультипликатором в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$.

6.2. Оператор N_{Γ_1} . В этом случае в качестве b хотелось бы взять характеристическую функцию θ области Γ_1 . Но это не мультипликатор в $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако эта функция является мультипликатором в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$; более того, умножение на нее не меняет элементы этого пространства. Это позволяет переписать уравнение $N_{\Gamma_1}\psi = \lambda\psi$ в виде

$$\theta N \theta \psi = \lambda \theta \psi, \quad (6.13)$$

по крайней мере, считая u^+ функцией из $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma_1)$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Соответствующее вариационное отношение имеет вид

$$(\theta u^+, u^+)_{\Gamma} / \Phi_{\Omega}(u, u). \quad (6.14)$$

Здесь u принадлежит подпространству решений системы $Lu = 0$ в $H^1(\Omega)$ с $T^+u = 0$ вне Γ_1 , и теперь можно считать, что $u^+ \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. В силу формулы Грина

$$\Phi_{\Omega}(u, v) = (T^+u, v^+)_{\Gamma_1} \quad (6.15)$$

ортогональное дополнение к указанному подпространству состоит из функций u с $u^+ = 0$ на Γ_1 . На них отношение (6.14) равно нулю. Поэтому его можно рассматривать на всех $u \in H^1(\Omega)$ с $Lu = 0$ и, далее, на всем $H^1(\Omega)$. Теперь применима теорема 6.6, и мы приходим к желаемому результату:

Теорема 6.7. Пусть $L = \tilde{L}$ и поверхность Γ почти гладкая в окрестности замыкания области Γ_1 . Тогда имеет место асимптотика

$$\lambda_j(N_{\Gamma_1}) \sim C_{N_{\Gamma_1}} j^{-1/(n-1)}. \quad (6.16)$$

Здесь $C_{N_{\Gamma_1}}$ определяется формулой вида (6.12) с $b = 1$ и Γ_1 вместо Γ .

6.3. Оператор $D_{\Gamma_1}^{-1}$. Основной результат в этом пункте — теорема 6.8 — получен автором совместно с Т. А. Суслиной.

Оператор $D_{\Gamma_1}^{-1}$ — это оператор, отвечающий задаче Дирихле с $u^+ = 0$ вне Γ_1 . Для него вариационное отношение имеет вид

$$(u^+, u^+)_{\Gamma_1} / (Du^+, u^+)_{\Gamma_1} \quad (Lu = 0 \text{ в } \Omega, u^+ \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)). \quad (6.17)$$

Асимптотика для гладких задач такого вида исследована в [44]. Ключевой момент в нашем случае состоит в проверке того, что отношение (6.17), если Γ и $\partial\Gamma_j$ гладкие, можно заменить на

$$(\theta u^+, u^+)_{\Gamma} / (Du^+, u^+)_{\Gamma} \quad (Lu = 0 \text{ в } \Omega, u^+ \in H^{1/2}(\Gamma)) \quad (6.18)$$

в смысле совпадения асимптотик. Относительно просто это можно сделать в нашем случае следующим образом. Мы дважды воспользуемся леммой 6.1.

Пусть функции α и β принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, их значения заключены между 0 и 1, $\text{supp } \alpha \subset \Gamma_1$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; α аппроксимирует функцию θ . Мы имеем, полагая $\varphi = u^+$,

$$(\alpha\varphi, \alpha\varphi)_{\Gamma} / [(D\alpha\varphi, \alpha\varphi)_{\Gamma} + (D\beta\varphi, \beta\varphi)_{\Gamma}] \leq (\alpha\varphi, \alpha\varphi)_{\Gamma} / (D\alpha\varphi, \alpha\varphi)_{\Gamma}. \quad (6.19)$$

Здесь φ — функция из $H^{1/2}(\Gamma)$. В качестве S берем отображение $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ этого пространства в $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$. Добавочно заметим, что формы в знаменателях в (6.18) и слева в (6.19) совпадают с точностью до прибавления формы ПДО нулевого порядка ввиду совпадения главных символов. Известно, что такое прибавление не отражается на асимптотике (см. [8] или [45, п. 1]).

Теперь пусть α_1 — неотрицательная функция из $C^\infty(\Gamma)$, равная 1 в окрестности замыкания области Γ_1 , тоже аппроксимирующая θ . Имеем

$$(\varphi, \varphi)_{\Gamma} / (D\varphi, \varphi)_{\Gamma} = (\alpha_1\varphi, \alpha_1\varphi)_{\Gamma} / (D\varphi, \varphi)_{\Gamma}. \quad (6.20)$$

Здесь φ — функция из $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ и S — вложение этого пространства в $H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 6.1 показывает, что считающая функция для оператора с отношением (6.17) заключена между считающими функциями для операторов с отношениями слева в (6.19) и $(\alpha_1\varphi, \alpha_1\varphi)_\Gamma / (D\varphi, \varphi)_\Gamma$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Асимптотика операторов с такими вариационными отношениями известна из [9]. Теперь предельный переход с использованием леммы 6.3 доказывает выделенное выше утверждение. После этого фактически вариационное отношение, а значит, и асимптотика такие же, как в п. 6.2.

На случай почти гладкой поверхности результат распространяется при помощи соображений, аналогичных использованным в п. 6.1. Получается

Теорема 6.8. *Если $L = \tilde{L}$ и поверхность Γ почти гладкая в окрестности замыкания области Γ_1 , то для собственных значений оператора $D_{\Gamma_1}^{-1}$ имеет место асимптотика вида (6.1) с тем же коэффициентом, что и для N_{Γ_1} .*

Пример (ср. [23, с. 50]). Рассмотрим уравнение Лапласа в квадрате $\{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$. Пусть Γ_1 — его левая сторона, а Γ_2 состоит из трех других сторон. Задача I имеет решения $\operatorname{ch} k(\pi - x) \cos ky$ ($k = 0, 1, \dots$). Задача II — решения $\operatorname{sh} k(\pi - x) \sin ky$ ($k = 1, 2, \dots$). Собственные функции: $\cos ky$ в задаче I и $\sin ky$ в задаче II. Собственные значения: соответственно $\operatorname{cth} k\pi/k$ и $\operatorname{th} k\pi/k$. Они разные в двух задачах, но асимптотика одинакова.

6.4. Замечания к работам [4] и [5]. Вариационное отношение для оператора H^{-1} имеет вид (ср. [5, предложение 9.1])

$$(\varphi, \varphi)_\Gamma / (H\varphi, \varphi)_\Gamma \quad (\varphi = [u] \in H^{1/2}(\Gamma), u = \mathcal{B}\varphi). \quad (6.21)$$

Здесь $[Tu] = 0$, и решения системы $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$ определяются скачком $[u]$. Соображения из п. 6.1 в случае почти гладкой Γ применимы к (6.21) непосредственно. По сравнению с [5] удастся снять условие 3°. Далее, для оператора H_S^{-1} можно получить аналог теоремы 6.8 по существу как в предыдущем пункте. Подход в [4] к H_S^{-1} нуждается в некоторой ревизии, возможной при помощи вариационных соображений, но в этом уже нет нужды.

К операторам A и A_S тоже возможен вариационный подход, но он не дает ничего нового по сравнению с [36] и [4]. Ограничимся замечанием, что вариационному отношению для A можно придать вид $(u^\pm, u^\pm)_\Gamma / \Phi_T(u, u)$.

§ 7. Некоторые обобщения

7.1. Более общие задачи Пуанкаре–Стеклова. Мы хотим теперь рассмотреть случай, когда граница Γ разбита на три области Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 : в первой ставится однородное условие Дирихле, во второй — однородное условие Неймана и в третьей — спектральное условие Пуанкаре–Стеклова. Будем считать, что имеются две замкнутые липшицевы поверхности размерности $n - 2$ без самопересечений и без общих точек, отделяющие эти области одну от другой. Ср. [34].

Рассмотрим для определенности случай, когда область Γ_3 разделяет области Γ_1 и Γ_2 . Введем следующие обозначения. Через $\Gamma_{2,3}$ обозначим дополнение к $\bar{\Gamma}_1$ и через $\Gamma_{1,3}$ — дополнение к $\bar{\Gamma}_2$. Пусть $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ — пространство сужений на Γ_3 функций из $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_{2,3})$ с нормой $\inf$ и $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ — пространство сужений на Γ_3 элементов из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{1,3})$ с нормой $\inf$. Далее, через $\mathcal{E}_2$ обозначим оператор продолжения функций из $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ через границу области Γ_2 до функций из

$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_{2,3})$ и через $\mathcal{E}_1$ — оператор продолжения элементов из $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ через границу области Γ_1 до элементов из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{1,3})$. Эти два оператора получаются из известных нам операторов продолжения локализацией.

Предложение 7.1. *Пространства $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ и $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ дуальны относительно продолжения формы $(\varphi, \psi)_{\Gamma_3} = (\mathcal{E}_1\varphi, \mathcal{E}_2\psi)_\Gamma$ на их прямое произведение.*

Поясним, что на границе с областью Γ_1 пространство $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ локально «похоже» на $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$, а $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ — на $H^{-1/2}(\Gamma_3)$, и на границе с Γ_2 пространство $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ локально «похоже» на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$, а $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ — на $H^{1/2}(\Gamma_3)$. Поэтому на обеих частях границы области Γ_3 ситуация стандартна с точки зрения двойственности, хотя формально эти пространства немного нового типа.

Формула Грина сейчас имеет вид $\Phi_\Omega(u, v) = (T^+u, v^+)_{\Gamma_3}$. Из наших результатов в §§2–3 следует, что решение в рассматриваемом классе однозначно определяется, если задать данные Дирихле в $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$, при этом данные Неймана на Γ_3 попадают в $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$. Точно так же решение в нашем классе однозначно определяется, если задать данные Неймана в $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$, при этом данные Дирихле на Γ_3 попадают в $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$. Поэтому определены два обратимых и взаимно обратных оператора

$$D_{\Gamma_3}: \hat{H}^{1/2}(\Gamma_3) \rightarrow \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3), \quad N_{\Gamma_3}: \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3) \rightarrow \hat{H}^{1/2}(\Gamma_3), \quad (7.1)$$

переводящие данные Дирихле на Γ_3 в данные Неймана на Γ_3 и обратно. На этих решениях мы имеем

$$\Phi_\Omega(u, u) = (T^+u, N_{\Gamma_3}T^+u)_{\Gamma_3} = (D_{\Gamma_3}u^+, u^+)_{\Gamma_3}. \quad (7.2)$$

Можно написать неравенства типа Гординга для наших операторов. Если $L = \tilde{L}$, то в $\hat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ можно ввести скалярное произведение $\langle \psi, \psi \rangle_{\Gamma_3} = (N_{\Gamma_3}\psi, \psi)_{\Gamma_3}$ и рассматривать N_{Γ_3} как компактный самосопряженный оператор. Можно получить аналоги теорем 4.1 и 6.7. На деталях останавливаться не будем.

Два других варианта расположения области Γ_3 не сложнее, и останавливаться на них тоже не будем.

7.2. Третье граничное условие вместо условия Неймана. Вернемся к задаче (1.1)–(1.2), но заменим второе условие в (1.2) следующим:

$$T^+u + \sigma u^+ = h \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (7.3)$$

Здесь $\sigma(x)$ — заданная матрица из $L_\infty(\Gamma_2)$. Подобное граничное условие рассматривалось в очень многих работах, например, в [24] (случай $\Gamma_2 = \Gamma$) и [34] (скалярное уравнение). Подробно мы рассматривать его не будем, на это потребовалось бы много места. Ограничимся следующими соображениями. Подставляя в формулу Грина $T^+u = h - \sigma u^+$, приходим к формуле

$$\Phi_\Omega(u, v) + (\sigma u^+, v^+)_{\Gamma_2} = (Lu, v)_\Omega + (h, v^+)_{\Gamma_2}. \quad (7.4)$$

Теперь слева при $u = v$ мы имеем квадратичную форму

$$\Phi_\Omega(u, u) + (\sigma u^+, u^+)_{\Gamma_2} \quad (7.5)$$

и можем обобщать наши результаты, если она коэрцитивна в нашем смысле на $H^1(\Omega)$. Проще всего случай, когда $\text{Re}(\sigma u^+, u^+)_{\Gamma_2} \geq 0$. Если же это условие не

выполнено, то следует учесть, что в левую часть добавлено слагаемое меньшего порядка. Действительно, при сколь угодно малых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |(\sigma u^+, u^+)_{\Gamma_2}| &\leq C_1 \|u^+\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq C_1 \|u^+\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2 \leq C_1 \|u\|_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)}^2 \\ &\leq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + C_\beta \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Поэтому нужная коэрцитивность опять имеет место, если форма $\operatorname{Re}(cu, u)_\Omega$ достаточно велика.

7.3. Случай, когда граница разделена на несколько областей. Результаты заведомо можно обобщать на случай, когда поверхность разбита на конечное число областей конечным набором липшицевых $(n - 2)$ -мерных замкнутых поверхностей без самопересечений и без общих точек (предполагаем это из осторожности), в каждой из этих областей ставится или условие Дирихле, или условие Неймана, или спектральное условие. Ср. [34], [23] и [50].

Автор искренне благодарит Н. Д. Филонова и особенно Т. А. Суслину за обсуждение работы и ценные советы. Как отмечено в п. 6.3, теорему 6.8 мы получили с ней вместе.

Наш список литературы содержит далеко не все работы по смешанным задачам. Много дополнительных ссылок можно найти в работах этого списка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. S. Agranovich, *On a mixed Poincaré–Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain*, Russian J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 239–244.
- [2] M. S. Agranovich, *Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary*, Russian J. Math. Phys., **15**:2 (2008), 146–155.
- [3] М. С. Агранович, *Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 3–25.
- [4] М. С. Агранович, *Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности*, Функц. анализ и его прил., **45**:1 (2011), 1–15.
- [5] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях*, Современная математика. Фундаментальные направления, **39** (2011) (в печати).
- [6] М. С. Агранович, Б. А. Амосов, *Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **30**:2 (1996), 1–18.
- [7] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений*, Сиб. матем. журн., **20**:1 (1979), 3–22.
- [8] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, в кн.: «Десятая математическая школа», Инст. матем. АН УССР, Киев, 1974, 5–189.
- [9] М. Ш. Бирман, М. С. Соломяк, *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами*, Вестник ЛГУ, №13, матем. механ. астрон., вып. 3 (1977), 13–21.
- [10] R. M. Brown, *The mixed problem for Laplace’s equation in a class of Lipschitz domains*, Comm. Partial Differential Equations, **19**:7–8 (1994), 1217–1233.
- [11] R. M. Brown, I. Mitrea, *The mixed problem for the Lamé system in a class of Lipschitz domains*, J. Differential Equations, **246**:7 (2009), 2577–2589.

- [12] M. Costabel, *Boundary integral operators in Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal., **19**:3 (1988), 613–626.
- [13] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, т. I*, ГТТИ, М., 1934.
- [14] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *Boundary value problems for the system of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**:3 (1988), 795–818.
- [15] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [16] V. I. Fabrikant, *Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory and their Applications in Engineering*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [17] J. A. Griepentrog, K. Gröger, H.-Chr. Kaiser, J. Rehrberg, *Interpolation for function spaces related to mixed boundary value problems*, Math. Nachr., **241** (2002), 110–120.
- [18] J. A. Griepentrog, H.-Chr. Kaiser, J. Rehrberg, *Heat kernel and resolvent properties for second order elliptic differential operators with general boundary conditions on L_p* , Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001), 87–112.
- [19] K. Gröger, *A $W^{1,p}$ -estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations*, Math. Ann., **283**:4 (1989), 679–687.
- [20] G. C. Hsiao, W. L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [21] D. Jerison, C. E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 161–219.
- [22] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* , Harwood Academic Publishers, 1984.
- [23] В. И. Лебедев, В. И. Агошков, *Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе*, Отдел вычислительной математики АН СССР, М., 1983.
- [24] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [25] G. Métivier, *Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **51–52** (1977), 125–219.
- [26] S. E. Mikhailov, *Traces, extensions, co-normal derivatives and solution regularity of elliptic systems with smooth and non-smooth coefficients*, <http://arxiv.org/abs/0906.3875v1>.
- [27] I. Mitrea, M. Mitrea, *The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **359**:9 (2007), 4143–4182.
- [28] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163**:2 (1999), 181–251.
- [29] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176**:1 (2000), 1–79.
- [30] Д. Г. Натрошвили, О. О. Чкадуа, Е. М. Шаргородский, *Смешанные задачи для однородных анизотропных упругих сред*, Труды Института прикладной математики им. Векуа, **39** (1990), 133–178.
- [31] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [32] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [33] K. A. Ott, R. M. Brown, *The mixed problem for the Laplacian in Lipschitz domains* <http://arxiv.org/abs/0909.0061v2>.
- [34] Б. В. Пальцев, *О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях*, Матем. сб., **187**:4 (1996), 59–116.

- [35] T. von Petersdorff, *Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems*, Math. Methods Appl. Sci., **11**:2 (1989), 183–213.
- [36] G. Rozenblum, G. Tashchiyan, *Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces*, Russian J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 326–339.
- [37] V. S. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. (2), **60**:1 (1999), 237–257.
- [38] G. Savaré, *Regularity and perturbation results for mixed second order elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations, **22**:5–6 (1997), 869–899.
- [39] E. Shamir, *Regularization of mixed second-order elliptic equations*, Israel J. Math., **6** (1968), 150–168.
- [40] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах базисовых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.
- [41] I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, Elsevier, New York, 1966.
- [42] E. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in $\mathbb{R}^3$* , Habilitationsschrift, Darmstadt, 1984 (THD-preprint 848).
- [43] E. P. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in $\mathbb{R}^3$* , Math. Nachr., **134** (1987), 21–53.
- [44] Т. А. Суслина, *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы*, в кн.: Проблемы мат. анализа, т. 9, ЛГУ, 1984, 84–97.
- [45] Т. А. Suslina, *Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary*, Russian J. Math. Phys., **6**:2 (1999), 214–234.
- [46] J. D. Sykes, R. M. Brown, *The mixed boundary problem in L^p and Hardy spaces for Laplace’s equation on a Lipschitz domain*, in: Contemporary Mathematics, vol. 227, Amer. Math. Soc., 2001, 1–18.
- [47] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Complut., **15**:2 (2002), 475–524.
- [48] G. Uhlmann, *Inverse boundary problems and applications*, Astérisque, **207** (1992), 153–207.
- [49] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **59**:3 (1984), 572–611.
- [50] В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, П. А. Старков, *Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи*, Современная математика. Фундаментальные направления, **34** (2009), 5–44.