Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Лин, Алгебраические функции, конфигурационные пространства, пространства Тейхмюллера и новые голоморфно-комбинаторные инварианты, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 3, 55–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:06:04

Алгебраические функции, конфигурационные пространства, пространства Тейхмюллера и новые голоморфно-комбинаторные инварианты

© 2011. В. Я. Лин

Посвящается памяти Владимира Игоревича Арнольда

Доказывается, что при $n \geq 4$ функция $u = u_n(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, определяемая уравнением $u^n + z_1 u^{n-1} + \dots + z_n = 0$, не может быть ветвью «большой» целой алгебраической функции g на $\mathbb{C}^n$, имеющий то же, что u_n , дискриминантное множество и являющейся суперпозицией целых алгебраических функций от менее чем $n - 1$ переменных. Ключевую роль играет описание голоморфных отображений конфигурационных пространств аффинной и проективной прямых $\mathbb{C}$ и $\mathbb{CP}^1$, для чего привлекаются пространства Тейхмюллера и новый комбинаторный инвариант комплексных пространств.

§1. Введение, основные результаты

1.1. Суперпозиции; конфигурационные пространства. В 1970 г. В. И. Арнольд [4] доказал, что при $n = 2^r$, $r \geq 2$, целая n -значная алгебраическая функция $u = u_n(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, определяемая уравнением $u^n + z_1 u^{n-1} + \dots + z_n = 0$, не является суперпозицией целых алгебраических функций меньшего чем $n - 1$ числа переменных. Доказательство основано на том, что (цитирую) «у функций малого числа переменных не бывает многомерных когомологий». В. А. Васильев ([59], [60]) усовершенствовал этот подход, но доставляемые им препятствия срабатывают не для всех n . В [40], [42] я нашел другие методы, позволившие распространить теорему Арнольда на все $n > 4$.

В упомянутых выше работах речь идет о *точных* представлениях $u_n = g$: суперпозиции g запрещено иметь *лишние ветви*, т. е. для всякого z все значения $g(z)$ должны совпадать со значениями $u_n(z)$ с учетом кратностей; если лишние ветви у суперпозиции g , представляющей u , допускаются, то мы пишем $u_n \subseteq g$. Одна из целей данной работы — доказательство более сильной теоремы:

Теорема 1. *При $n \geq 4$ функция u_n не может быть ветвью целой алгебраической функции g , имеющей в $\mathbb{C}^n$ в точности то же, что u_n , дискриминантное множество и являющейся суперпозицией целых алгебраических функций от менее чем $n - 1$ переменных.*

Это следует из отсутствия точных представлений (§5) и следующей теоремы:

Теорема 2. *Если u_n является ветвью целой алгебраической функции g на $\mathbb{C}^n$ с тем же дискриминантным множеством, что и u_n , то $u_n = g$.*

Конфигурационное пространство $\mathcal{C}^n(X)$ связного комплексного пространства X состоит из всех его n -точечных подмножеств. Симметрическая группа $S(n)$ свободно действует на $\mathcal{C}_o^n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(q_1, \dots, q_n) \in X^n \mid q_i \neq q_j \text{ для всех } i \neq j\}$,

и накрытие Галуа $p: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}_o^n(X)/\mathbf{S}(n) = \mathcal{C}^n(X)$ голоморфно. Группы $B_n(X) = \pi_1(\mathcal{C}^n(X))$ и $PB_n(X) = \pi_1(\mathcal{C}_o^n(X)) \triangleleft B_n(X)$ — это группа кос и группа крашенных кос пространства X соответственно. Всюду в этой статье, если не оговорено противное, $X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$, а $t(X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}}(\text{Aut } X)$, так что $t(\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{Aff}(\mathbb{C}) = 2$ и $t(\mathbb{CP}^1) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) = 3$.

Определение 1. Пусть $Z, Z' \subseteq \mathbb{CP}^1$. Отображение $F: \mathcal{C}^n(Z) \rightarrow \mathcal{C}^m(Z')$ назовем *зацепляющим*¹⁾, если $Q \cap F(Q) \neq \emptyset$ для некоторого $Q \in \mathcal{C}^n(Z)$ (это условие имеет смысл, так как $Q, F(Q) \subseteq \mathbb{CP}^1$); в противном случае, т.е. если $Q \cap F(Q) = \emptyset$ для всех $Q \in \mathcal{C}^n(Z)$, F называется *разделяющим*. $\triangle$

Множество ветвления функции u_n совпадает с ее дискриминантным множеством, т.е. с множеством нулей $\Sigma_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d_n(z) = 0\}$ дискриминанта d_n ее определяющего полинома. Штейнова область $G_n = \mathbb{C}^n \setminus \Sigma_n$ отождествляется с пространством $\mathbf{G}_n$ унитарных полиномов степени n с простыми корнями, которое естественно изоморфно $\mathcal{C}^n(\mathbb{C})$.

Пусть g — целая $(n+k)$ -значная алгебраическая функция на $\mathbb{C}^n$ с тем же, что у u_n , дискриминантным множеством Σ_n и такая, что $u_n \subsetneq g$. Если $z \in G_n$, то n -точечное множество $Q_z = u_n(z)$ является собственным подмножеством $(n+k)$ -точечного множества $Q'_z = g(z)$. Возникает голоморфное отображение $F: \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \ni Q_z \mapsto Q'_z \setminus Q_z \in \mathcal{C}^k(\mathbb{C})$, являющееся *разделяющим*; следующая теорема устанавливает отсутствие таковых, обосновывая тем самым теорему 2.

Теорема 3. Пусть X есть $\mathbb{CP}^1$ или $\mathbb{C}$. Тогда при $n > t(X) + 1$ и $k \geq 1$ всякое голоморфное отображение $F: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$ является зацепляющим.

1.2. Ручные и одноорбитные морфизмы. Диагональное действие

$\text{Aut } X \ni A: \mathcal{C}^n(X) \ni Q = \{q_1, \dots, q_n\} \mapsto \{Aq_1, \dots, Aq_n\} = AQ \in \mathcal{C}^n(X)$ (1) в $\mathcal{C}^n(X)$ позволяет сопоставить каждому морфизму $T: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \text{Aut } X$ *ручной* эндоморфизм F_T пространства $\mathcal{C}^n(X)$:

$$F_T: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X), \quad Q \mapsto F_T(Q) \stackrel{\text{def}}{=} T(Q)Q \quad \text{для всех } Q \in \mathcal{C}^n(X). \quad (2)$$

Такой эндоморфизм сохраняет каждую $(\text{Aut } X)$ -орбиту в $\mathcal{C}^n(X)$. С другой стороны, отображение $F: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$ назовем *одноорбитным*, если весь его образ $F(\mathcal{C}^n(X))$ содержится в одной $(\text{Aut } X)$ -орбите в $\mathcal{C}^k(X)$.

Непрерывные отображения линейно связных пространств естественно делятся на *абелевы* и *неабелевы* в зависимости от того, абелев или неабелев образ индуцированного данным отображением гомоморфизма фундаментальных групп. Этой очевидной алгебраической дихотомии отвечает нетривиальная аналитическая дихотомия для морфизмов некоторых конфигурационных пространств.

Теорема 4. Пусть X — негиперболическая риманова поверхность, $n > 4$ и F — эндоморфизм пространства $\mathcal{C}^n(X)$. Тогда F либо ручной, либо одноорбитный; последнее равносильно тому, что F абелев, т.е. образ $F_*(\pi_1(\mathcal{C}^n(X)))$ индуцированного эндоморфизма F_* группы кос $B_n(X) = \pi_1(\mathcal{C}^n(X))$ абелев.

Эскиз доказательства теоремы 4 для $X = \mathbb{C}$ см. в [39], [43], полное доказательство для $X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$ — в [50]; лишь эти случаи рассматриваются в

¹⁾ В п. 2.3 мы дважды варьируем это определение, приспособлявая его к обстоятельствам.

данной работе. Для $X = \mathbb{C}^*$ эта теорема доказана в [65] (где $\mathcal{C}^n(\mathbb{C}^*)$ «притворяется» комплексной камерой Вейля серии B), а для торов — в [20].

1.3. Примеры. Морфизм Феррари (1540 г.)¹⁾ переводит полином степени 4 в его кубическую резольвенту и порождает неабелев морфизм $\mathcal{C}^4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^3(\mathbb{C})$. Менее известен инволютивный автоморфизм Эйзенштейна–Кэли ([18], [13]) пространства невырожденных проективных бинарных форм степени 3, т. е. пространства $\mathcal{C}^3(\mathbb{CP}^1)$, сопоставляющий форме ϕ якобиан $J(x, y) = \partial(\phi, H\phi)/\partial(x, y)$ ее самой и ее гессiana $H\phi$. (На цитированные работы Эйзенштейна и Кэли, стоящие у истоков теории инвариантов, мне указал М. Х. Гизатуллин.)

В связи с теоремой 3 заметим, что есть разделяющее полиномиальное отображение $F_{3,6}: \mathcal{C}^3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^6(\mathbb{C})$, $F_{3,6}(\{q_1, q_2, q_3\}) = \{w_1^+, w_1^-, w_2^+, w_2^-, w_3^+, w_3^-\}$, где 6 точек $w_i^\pm$ — это корни квадратных уравнений $(w_1^\pm - q_1)^2 = (q_1 - q_2)(q_1 - q_3)$, $(w_2^\pm - q_2)^2 = (q_2 - q_3)(q_2 - q_1)$, $(w_3^\pm - q_3)^2 = (q_3 - q_1)(q_3 - q_2)$ (см. [45]). $\triangle$

Структура статьи. В §2, используя отсутствие голоморфных сечений проколотого универсального семейства Тейхмюллера ([25], [16], [26], [17]), мы доказываем теорему 3, а затем теоремы 2 и 1; для последней нужно также отсутствие точных представлений, доказываемое в §5 с помощью теоремы 4.

Главное в §3 — теорема 10 о сохранении подгруппы $PB_n(X)$ неабелевыми эндоморфизмами группы $B_n(X)$, гарантирующая подъем неабелевых эндоморфизмов пространства $\mathcal{C}^n(X)$ на $\mathcal{C}_o^n(X)$; ее доказательство основано на описании неабелевых гомоморфизмов $B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(k)$, начатом Э. Артином [10] и продолженным в [38], [41], [43], [46], [49] и в данной работе (теорема 8).

Теорема 4 доказана в §4. Благодаря теореме 10 неабелевы эндоморфизмы пространства $\mathcal{C}^n(X)$ накрываются $\mathbf{S}(n)$ -эквивариантными эндоморфизмами пространства $\mathcal{C}_o^n(X)$. Для их описания в п. 4.4 вводится новый инвариант, сопоставляющий (при выбранной заранее комплексной группе Ли G ; в данной работе $G = \mathbb{C}^*$) комплексному пространству Z симплициальный комплекс $\mathcal{C}(Z, G)$, вершины которого — все непостоянные голоморфные отображения $Z \rightarrow G \setminus \{1\}$, а симплексы — такие множества вершин $\{\mu_0, \dots, \mu_m\}$, что все $\mu_i \cdot \mu_j^{-1}$ ($i \neq j$) — тоже вершины. Исследовав комплекс $\mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(X), \mathbb{C}^*)$ и естественное $\mathbf{S}(n)$ -действие на нем (пп. 4.3, 4.5 и 4.6), мы превращаем исходную аналитическую задачу в комбинаторную, которая и решается в п. 4.7.

§2. Доказательство теоремы 3

2.1. Универсальное накрытие $\tau: \mathbf{T}(0, m+3) \rightarrow \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Тотальное пространство $\mathbf{V}'(0, n)$ проколотого универсального семейства Тейхмюллера $\rho: \mathbf{V}'(0, n) \rightarrow \mathbf{T}(0, n)$ над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}(0, n)$ римановой сферы с n проколами можно реализовать как дополнение в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbf{T}(0, n)$ к объединению графиков n попарно не пересекающихся голоморфных сечений $s_i: \mathbf{T}(0, n) \rightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbf{T}(0, n)$, три последние из которых тождественно равны 0, 1 и ∞ . По теореме Хаббарда–Эрла–Кра ([25], [16], [26], [17]) при $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{T}(0, n) = n - 3 > 1$ проекция ρ не имеет голоморфных сечений $\mathbf{T}(0, n) \rightarrow \mathbf{V}'(0, n)$.

¹⁾Метод Феррари, сводящий решение уравнения степени 4 к задаче нахождения корней вспомогательного кубического уравнения, решенной чуть ранее Тартальей, опубликован впервые в книге Кардано «*Artis Magnæ*» (1545 г.). Дискриминант резольвенты полинома Fp равен квадрату дискриминанта исходного полинома p ; поэтому корни полинома Fp просты, если таковы корни полинома p .

Пусть $n = m + 3$ и $\tilde{s}_i(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} \in \mathbf{T}(0, m + 3)$) — проекция точки $\mathbf{s}_i(\mathbf{t})$ на $\mathbb{CP}^1$; отображение $\tau: \mathbf{T}(0, m + 3) \ni \mathbf{t} \mapsto (\tilde{s}_1(\mathbf{t}), \dots, \tilde{s}_m(\mathbf{t})) \in \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ является неразветвленным голоморфным накрытием пространства $\mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ упорядоченных m -точечных конфигураций $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Это накрытие универсально, ибо $\mathbf{T}(0, m + 3)$ гомеоморфно $2m$ -мерному шару.¹⁾

2.2. Отсутствие многolistных сечений. Пусть π — расслоение «забывания» первой координаты в $\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$:

$$\pi: \mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \ni (\zeta, z_1, \dots, z_m) = (\zeta, z) \mapsto z \in \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}). \quad (3)$$

Лемма 1. Морфизмы ρ , τ и π включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{V}'(0, m + 3) & \xrightarrow{\lambda} & \tau^*(\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) & \longrightarrow & \mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \\ & \searrow \rho & \downarrow \tau^*(\pi) & & \downarrow \pi \\ & & \mathbf{T}(0, m + 3) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \end{array} \quad (4)$$

в которой $\tau^*(\pi)$ — расслоение, индуцированное расслоением π при отображении баз τ , а λ — послыйный биголоморфный изоморфизм.

Доказательство. Точка $\mathbf{v} \in \mathbf{V}'(0, m + 3)$ однозначно представляется в виде пары $(\zeta, \mathbf{t}) = (\zeta, \rho(\mathbf{v})) \in (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbf{T}(0, m + 3)$ с $\zeta \notin \{\tilde{s}_1(\mathbf{t}), \dots, \tilde{s}_m(\mathbf{t})\}$. Формулы

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbf{V}'(0, m + 3) \ni \mathbf{v} = (\zeta, \rho(\mathbf{v})) &\mapsto (\mathbf{t}, \zeta, \tilde{s}_1(\mathbf{t}), \dots, \tilde{s}_m(\mathbf{t})) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\rho(\mathbf{v}), \zeta, \tilde{s}_1(\rho(\mathbf{v})), \dots, \tilde{s}_m(\rho(\mathbf{v}))) \in \tau^*(\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) \end{aligned}$$

и

$$\lambda^{-1}: \tau^*(\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) \ni (\mathbf{t}, (\zeta, z)) \mapsto (\zeta, \mathbf{t}) \in \mathbf{V}'(0, m + 3)$$

определяют взаимно обратные послыйные голоморфные отображения. $\square$

Следующая теорема — ключ к доказательству теоремы 3.

Теорема 5. Пусть $m > 1$ и $A \subset \mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ — аналитическое подмножество. Тогда сужение на A проекции (3), $\pi|_A: A \ni (\zeta, z) \mapsto z \in \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, не может быть неразветвленным накрытием всего $\mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда отображение τ индуцирует неразветвленное накрытие $\tau^*(\pi|_A): \tau^*(A) \rightarrow \mathbf{T}(0, m + 3)$, которое ввиду стягиваемости базы тривиально и, стало быть, допускает голоморфное сечение $s: \mathbf{T}(0, m + 3) \rightarrow \tau^*(A) \subset \tau^*(\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}))$. Композиция

$$\lambda^{-1} \circ s: \mathbf{T}(0, m + 3) \xrightarrow{s} \tau^*(A) \subset \tau^*(\mathcal{C}_o^{m+1}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) \xrightarrow{\lambda^{-1}} \mathbf{V}'(0, m + 3)$$

¹⁾В [28], [30], [32], [11] при построении универсального накрытия пространства $\mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ используются квазиконформные отображения; здесь я обхожу их, оперируя непосредственно универсальным семейством Тейхмюллера, которое все равно понадобится в дальнейшем.

задает голоморфное сечение универсального семейства Тейхмюлера; так как $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{T}(0, m+3) = m > 1$, это противоречит теореме Хаббарда—Эрла—Кра. $\square$

2.3. Зацепляющие отображения; доказательства теорем 3, 2 и 1. Пусть $X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$. Отображение $\phi: \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$ назовем *зацепляющим*, если найдется такая точка $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, что $\{z_1, \dots, z_m, 0, 1, \infty\} \cap \phi(z) \neq \emptyset$.

Теорема 6. При $m > 1$ и $k \geq 1$ каждый морфизм $\phi: \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$ является зацепляющим.

Доказательство. Если для всех $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ пересечение $\{z_1, \dots, z_m, 0, 1, \infty\} \cap \phi(z)$ пусто, то $\phi(z) \subset \mathbb{C}$ при любом z , ибо $\infty \notin \phi(z)$. Пусть $A \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, z) \in \mathbb{C} \times \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \mid t \in \phi(z)\}$; тогда A — аналитическое подмножество в $\mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, и сужение на A проекции (3) является неразветвленным голоморфным накрытием всего $\mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$, что противоречит теореме 5. $\square$

Следствие 1. Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ или $\mathbb{C}$. Тогда при $n > t(X) + 1$ и $k \geq 1$ каждое голоморфное отображение $g: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$ является зацепляющим, т.е. найдется точка $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(X)$, для которой $p(q) \cap g(q) \neq \emptyset$ (здесь, как обычно, $p: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$ — стандартная проекция).

Доказательство. Пусть $m = n - t(X)$ и $i: \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \hookrightarrow \mathcal{C}_o^n(X)$ — естественное вложение, т.е. $i(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_m, 0, 1, \infty)$ при $X = \mathbb{CP}^1$ и $i(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_m, 0, 1)$ при $X = \mathbb{C}$. Применение теоремы 6 к морфизму $\phi = g \circ i: \mathcal{C}_o^m(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \xrightarrow{i} \mathcal{C}_o^n(X) \xrightarrow{g} \mathcal{C}^k(X)$ завершает доказательство. $\square$

Доказательство теорем 3, 2 и 1. Согласно следствию 1, отображение $F \circ p: \mathcal{C}_o^n(X) \xrightarrow{p} \mathcal{C}^n(X) \xrightarrow{F} \mathcal{C}^k(X)$ является зацепляющим; значит, таков и сам морфизм F . Теорема 3 влечет за собой теорему 2, из которой в силу невозможности точного представления (см. §5) следует теорема 1. $\square$

§3. Гомоморфизмы групп кос

Главное в этом параграфе — теорема 10, гарантирующая подъем на $\mathcal{C}_o^n(X)$ всех неабелевых эндоморфизмов пространства $\mathcal{C}^n(X)$ ($X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$).

3.1. Группы кос $B_n = \pi_1(\mathcal{C}^n(\mathbb{C}))$ и $B_n(S^2) = \pi_1(\mathcal{C}^n(\mathbb{CP}^1))$. Каноническое копредставление группы B_n : образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, соотношения $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ при $|i - j| > 1$ и $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ при $1 \leq i \leq n - 2$. Далее, $B_n(S^2) = B_n/N$, где $N \triangleleft B_n$ порождается элементом $\nu = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \in PB_n$.

3.2. Универсальные накрытия, гомотопические группы. Пусть $n \geq t(X) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Aut } X)$, $\mathcal{D}^{n-2}(\mathbb{C}) = \{q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}) \mid q_{n-1} = 0, q_n = 1\}$ и $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) = \{q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1) \mid q_{n-2} = 0, q_{n-1} = 1, q_n = \infty\}$. Конечно, $\mathcal{D}^{n-t(X)}(X) \cong \mathcal{C}_o^{n-t(X)}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$. Группа $\text{Aut } X$ действует в $\mathcal{C}_o^n(X)$ свободно и бигулярно; каждая ее орбита пересекает $\mathcal{D}^{n-t(X)}(X)$ в единственной точке, что дает бигулярный изоморфизм $j_{X,n}: \mathcal{C}_o^n(X) \cong (\text{Aut } X) \times \mathcal{C}_o^{n-t(X)}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$.

Пусть $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ — полупрямое произведение групп с умножением $(b, \zeta) \cdot (b', \zeta') = (b + e^\zeta b', \zeta + \zeta')$ и комплексной структурой $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Голоморфные универсальные

накрытия $\vartheta_X: \widetilde{\text{Aut } X} \rightarrow \text{Aut } X$ и $\widetilde{\mathcal{C}_o^n(X)} \rightarrow \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$ таковы:

$$\vartheta_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (b, \zeta) \mapsto \vartheta_{\mathbb{C}}(b, \zeta) = A \in \mathbf{Aff} \mathbb{C}, \quad Az = e^{\zeta} z + b \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

$$\vartheta_{\mathbb{CP}^1}: \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\} = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{Aut } \mathbb{CP}^1,$$

$$\widetilde{\text{Aut } X} \times \mathbf{T}(0, n+3-t(X)) \ni (A, \mathbf{t}) \xrightarrow{\vartheta} (\vartheta_X(A) \widetilde{\mathbf{s}}_1(\mathbf{t}), \dots, \vartheta_X(A) \widetilde{\mathbf{s}}_n(\mathbf{t})) \in \mathcal{C}_o^n(X), \quad (6)$$

$$\widetilde{\text{Aut } X} \times \mathbf{T}(0, n+3-t(X)) \ni (A, \mathbf{t}) \xrightarrow{\Theta} \{\vartheta_X(A) \widetilde{\mathbf{s}}_1(\mathbf{t}), \dots, \vartheta_X(A) \widetilde{\mathbf{s}}_n(\mathbf{t})\} \in \mathcal{C}^n(X)$$

(определение отображений $\widetilde{\mathbf{s}}_i$ см. в п. 2.1). Наконец, ввиду изоморфизма $j_{X,n}$

$$PB_n(X) = \pi_1(\mathcal{C}_o^n(X)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \times \pi_1(\mathcal{C}_o^{n-2}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) & \text{при } X = \mathbb{C}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \pi_1(\mathcal{C}_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) & \text{при } X = \mathbb{CP}^1. \end{cases} \quad (7)$$

Следующие результаты являются классическими ([8], [51], [19]): $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{C}^n(\mathbb{C})$ являются $K(\pi, 1)$ -пространствами для $\pi = PB_n$ и $\pi = B_n$ соответственно. Все $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C} \setminus \{0, \dots, k-1\})$ асферичны. В группе PB_n есть конечный ряд нормальных подгрупп

$$\{1\} = PB_n^{(n)} \subset PB_n^{(n-1)} \subset \dots \subset PB_n^{(2)} \subset PB_n^{(1)} = PB_n \quad (8)$$

со свободными факторами $PB_n^{(r)}/PB_n^{(r+1)} \cong \mathbb{F}_r$, $\text{rank } \mathbb{F}_r = r$, $1 \leq r \leq n-1$.

Заменяя в (7) и (8) n на $n-1$, получим $\pi_1(\mathcal{C}_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})) = PB_{n-1}^{(2)}$; вместе с (6) и асферичностью пространства $\mathcal{C}_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ это дает следующую теорему (см. [48], [50]):

Теорема 7. $PB_3(S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если $n > 3$, то $PB_n(S^2) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times PB_{n-1}^{(2)}$, причем группа $PB_{n-1}^{(2)}$ обладает конечным рядом нормальных подгрупп

$$\{1\} = PB_{n-1}^{(n-1)} \subset PB_{n-1}^{(n-2)} \subset \dots \subset PB_{n-1}^{(3)} \subset PB_{n-1}^{(2)} \quad (9)$$

со свободными факторами $PB_{n-1}^{(r)}/PB_{n-1}^{(r+1)} \cong \mathbb{F}_r$, $2 \leq r \leq n-2$. При $n \geq 3$ имеем $\pi_k(\mathcal{C}^n(\mathbb{CP}^1)) = \pi_k(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)) = \pi_k(\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})) = \pi_k(S^3)$, т.е. $\pi_2(\mathcal{C}^n(\mathbb{CP}^1)) = 0$ и $\pi_k(\mathcal{C}^n(\mathbb{CP}^1)) = \pi_k(S^3)$ при $k > 2$. $\square$

3.3. Коммутант; эндоморфизмы групп кос. В [24] найдено копредставление коммутанта B'_n группы B_n ; из него видно, что $B''_n = B'_n$ при $n > 4$. Так как $B_n(S^2) = B_n/N$, то $B''_n(S^2) = B'_n(S^2)$ при $n > 4$. Итак, группы $B'_n(X)$ совершенны и не имеют нетривиальных гомоморфизмов в свободные группы.

Замечание 1. Равенство $B''_n = B'_n$ при $n > 4$ легко получить из тождества $\sigma_3 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \cdot [\sigma_3 \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \sigma_2^{-1}] \cdot \sigma_1 \sigma_2$, найденного Е. А. Гориним в 1990-х гг.

Следствие 2. При $n > 4$ коммутант $B'_n(X)$ группы кос $B_n(X)$ не имеет нетривиальных гомоморфизмов в группы крашенных кос $PB_k(X)$.

Определение 2. Гомоморфизмы групп $\phi, \psi: G \rightarrow H$ сопряжены ($\phi \sim \psi$), если $\psi(g) = h\phi(g)h^{-1}$ для некоторого $h \in H$ и всех $g \in G$.

Гомоморфизм $\psi: G \rightarrow \mathbf{S}(n)$ транзитивен, если его образ $\psi(G) \subseteq \mathbf{S}(n)$ транзитивно действует на $\{1, \dots, n\}$. $\triangle$

Элементы σ_1 и $\alpha = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ порождают B_n ; то же верно и для $B_n(S^2)$.

Артин [10] описал (с точностью до сопряженности) все неабелевы транзитивные гомоморфизмы $\psi: B_n \rightarrow \mathbf{S}(n)$:

Теорема Артина. (а) Если $n \neq 4$ и $n \neq 6$, то $\psi \sim \mu$, где $\mu: B_n \rightarrow \mathbf{S}(n)$ — стандартный эпиморфизм, $\mu(\sigma_i) = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

(б) Если $n = 6$ и $\psi \approx \mu$, то $\psi \sim \nu_6$, где $\nu_6(\sigma_1) = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ и $\nu_6(\alpha) = (1, 2, 3)(4, 5)$.

(с) Если $n = 4$ и $\psi \approx \mu$, то ψ сопряжен с одним из следующих трех гомоморфизмов $\nu_{4,1}$, $\nu_{4,2}$, $\nu_{4,3}$: $\nu_{4,1}(\sigma_1) = (1, 2, 3, 4)$, $\nu_{4,1}(\alpha) = (1, 2)$; $\nu_{4,2}(\sigma_1) = (1, 3, 2, 4)$, $\nu_{4,2}(\alpha) = (1, 2, 3, 4)$; $\nu_{4,3}(\sigma_1) = (1, 2, 3)$, $\nu_{4,3}(\alpha) = (1, 2)(3, 4)$. Если $\psi \sim \nu_{4,3}$, то $\psi(B_4) = \mathbf{A}(4)$.

(д) Все неабелевы транзитивные гомоморфизмы $\psi: B_n \rightarrow \mathbf{S}(n)$, кроме сопряженных с $\nu_{4,3}$, сюръективны.

Лемма Артина. Если $n, m \in \mathbb{N}$, $n > 4$, и существует простое $p > 2$, такое, что $m/2 < p \leq n-2$, то для каждого неабелева транзитивного гомоморфизма $\psi: B_n \rightarrow \mathbf{S}(m)$ перестановка $\psi(\sigma_1)$ имеет хотя бы $n-2$ неподвижных точек.

Вот полезное дополнение к теореме Артина о гомоморфизмах $B_n \rightarrow \mathbf{S}(n)$.

Теорема 8. Если $n \neq 4$, то при $k < n$ все гомоморфизмы $B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(k)$ абелевы, а каждый неабелев гомоморфизм $B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(n)$ сюръективен.

Доказательство. Так как $B_n(\mathbb{C}P^1) \cong B_n/S$, достаточно рассмотреть случай $X = \mathbb{C}$, $B_n(X) = B_n$. Для $n \leq 3$ первое утверждение тривиально. Допустим, что $n > \max\{4, k\}$ и образ $H = \text{Im } \psi$ гомоморфизма $\psi: B_n \rightarrow \mathbf{S}(k)$ неабелев. Для каждой H -орбиты $O \subseteq \{1, \dots, k\}$ определим редукцию $\psi_O: B_n \rightarrow \mathbf{S}(O)$, где $\psi_O(g)$ — сужение $\psi(g)$ на O . Все редукции транзитивны и хотя бы одна из них, скажем $\psi_{O_0}: B_n \rightarrow \mathbf{S}(O_0) \cong \mathbf{S}(m)$ ($m = \#O_0$), неабелева. Так как $n > 4$ и $m \leq k < n$, то найдется такое простое $p > 2$, что $m/2 < p \leq n-2$ (теорема Чебышева). По лемме Артина нетривиальная перестановка $\psi_{O_0}(\sigma_1) \in \mathbf{S}(m)$ имеет хотя бы $n-2$ неподвижных точек, что невозможно, ибо $n-2 \geq m-1$.

Рассмотрим теперь неабелев гомоморфизм $\psi: B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(n)$. Можно считать, что ψ интранзитивен (иначе его сюръективность следует из теоремы Артина). Стало быть, $\#O < n$ для любой $(\text{Im } \psi)$ -орбиты $O \subset \{1, \dots, n\}$, и из первого утверждения теоремы следует, что редукция гомоморфизма ψ на любую такую орбиту абелева; но тогда ψ абелев, что противоречит предположению. $\square$

Замечание 2. При $6 < n < k < 2n$ все транзитивные гомоморфизмы $B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(k)$ абелевы. С точностью до сопряженности, есть четыре неабелевых транзитивных гомоморфизма из B_n в $\mathbf{S}(2n)$ и два из $B_n(S^2)$ в $\mathbf{S}(2n)$ (в [46], [49] это доказано при $n > 8$; случаи $n = 7, 8$ разобрал С. Ю. Ореков). $\triangle$

Лемма 2. Пусть $n > 4$, и пусть $X, Y \in \{\mathbb{C}, \mathbb{C}P^1\}$. Тогда композиция $\psi = \mu \circ \varphi: B_n(X) \xrightarrow{\varphi} B_k(Y) \xrightarrow{\mu} \mathbf{S}(k)$ неабелева гомоморфизма $\varphi: B_n(X) \rightarrow B_k(Y)$ со стандартным эпиморфизмом $\mu: B_k(Y) \rightarrow \mathbf{S}(k)$ является неабелевым гомоморфизмом.

Доказательство. Если $\psi = \mu \circ \varphi$ абелев, то $\mu(\varphi(B'_n(X))) = \{1\}$ и $\varphi(B'_n(X)) \subseteq \text{Ker } \mu = PB_k(Y)$. Группа $B'_n(X)$ совершенна, так что из последнего включения и следствия 2 вытекает, что $\varphi(B'_n(X)) = \{1\}$ и φ абелев, вопреки условию. $\square$

Лемма 3. Если $n > 4$ и $\psi: B_n(X) \rightarrow \mathbf{S}(n)$ неабелев, то $\text{Ker } \psi = PB_n(X)$.

Доказательство. По теореме 8 гомоморфизм ψ сюръективен; поэтому для $X = \mathbb{C}$ утверждение леммы следует из теоремы Артина. Если же $X = \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ и $\theta: B_n \rightarrow B_n(S^2)$ — естественный эпиморфизм, то, применяя лемму 2 к композиции $\tilde{\psi} = \psi \circ \theta: B_n \xrightarrow{\theta} B_n(S^2) \xrightarrow{\psi} \mathbf{S}(n)$, заключаем, что $\theta^{-1}(\text{Ker } \psi) = \text{Ker}(\psi \circ \theta) = \text{Ker } \tilde{\psi} = PB_n$ и $\text{Ker } \psi = \theta(\theta^{-1}(\text{Ker } \psi)) = \theta(PB_n) = PB_n(S^2)$. $\square$

Теорема 9. При $n \neq 4$ и $n > k$ все гомоморфизмы $\varphi: B_n(X) \rightarrow B_k(X)$ абелевы, а потому абелевы и все непрерывные отображения $\mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^k(X)$.

Доказательство. Для $n = 3$ все ясно. Если $n > 4$ и φ неабелев, то по лемме 2 неабелев и $\psi = \mu \circ \varphi: B_n(X) \xrightarrow{\varphi} B_k(X) \xrightarrow{\mu} \mathbf{S}(k)$, что противоречит теореме 8.

3.4. Неабелевы эндоморфизмы группы $B_n(X)$ сохраняют $PB_n(X)$. Следующая теорема распространяет теорему Артина [10] о сохранении подгруппы PB_n автоморфизмами группы B_n на неабелевы эндоморфизмы групп B_n и $B_n(S^2)$.

Теорема 10. Если $n > 4$, то $\varphi^{-1}(PB_n(X)) = PB_n(X)$ и, следовательно, $\varphi(PB_n(X)) \subseteq PB_n(X)$ для каждого неабелева эндоморфизма φ группы $B_n(X)$.

Доказательство. По леммам 2 и 3 $\psi = \mu \circ \varphi: B_n(X) \xrightarrow{\varphi} B_n(X) \xrightarrow{\mu} \mathbf{S}(n)$ — неабелев гомоморфизм и $PB_n(X) = \text{Ker } \psi = \varphi^{-1}(\text{Ker } \mu) = \varphi^{-1}(PB_n(X))$. $\square$

Замечание 3. Вот более сильный результат: если $n > 4$, то $B'_n \cap PB_n$ — вполне характеристическая подгруппа группы B'_n ; см. [48], [49]. $\triangle$

§ 4. Эндоморфизмы пространств $\mathcal{C}^n(X)$:

доказательство теоремы 4 для $X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$

4.1. От эндоморфизмов $\mathcal{C}^n(X)$ к эндоморфизмам $\mathcal{C}_o^n(X)$.

Определение 3. Отображение $f: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}_o^n(X)$ эквивариантно, если найдется $\alpha \in \text{Aut } \mathbf{S}(n)$, такой, что $f(\sigma q) = \alpha(\sigma)f(q)$ при $q \in \mathcal{C}_o^n(X)$ и $\sigma \in \mathbf{S}(n)$. $\triangle$

Теорема 11. Если $n > 4$, то любое неабелево непрерывное отображение $F: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_o^n(X) & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}_o^n(X) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{C}^n(X) & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}^n(X) \end{array} \quad (10)$$

с непрерывным f . Если F голоморфно, то f голоморфно и эквивариантно.

Доказательство. Диаграмма (10) (с f , голоморфным вместе с F) существует ввиду теоремы 10. Так как p — накрытие Галуа, то найдется единственный с точностью до сопряженности эндоморфизм $\alpha: \mathbf{S}(n) \rightarrow \mathbf{S}(n)$, такой, что

$$f(\sigma q) = \alpha(\sigma)f(q) \quad \text{для всех } q \in \mathcal{C}_o^n(X) \text{ и } \sigma \in \mathbf{S}(n); \quad (11)$$

он может быть включен в коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & PB_n(X) & \xrightarrow{p_*} & B_n(X) & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{S}(n) \longrightarrow 1 \\ & & f_* \downarrow & & F_* \downarrow & & \downarrow \alpha \\ 1 & \longrightarrow & PB_n(X) & \xrightarrow{p_*} & B_n(X) & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{S}(n) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (12)$$

Гомоморфизм F_* неабелев, и по лемме 2 неабелевы $\alpha \circ \mu = \mu \circ F_*$ и α . Так как $n > 4$ и $\mathbf{A}(n)$ не может быть ядром неабелева эндоморфизма группы $\mathbf{S}(n)$, то $\text{Ker } \alpha = \{1\}$ и α — автоморфизм. (При $n \neq 6$ все автоморфизмы группы $\mathbf{S}(n)$ внутренние; при $n = 6$ «наш» α тоже внутренний; см. замечание 6 в п. 4.7.) $\square$

4.2. Эquivariantные эндоморфизмы пространства $\mathcal{C}_o^n(X)$: план действий. Чтобы доказать, что F ручной, достаточно проверить, что f является ручным в следующем смысле: *существуют $\sigma \in \mathbf{S}(n)$ и $\mathbf{S}(n)$ -инвариантный морфизм $T_o: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \text{Aut } X$, такие, что морфизм $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{-1} \circ f$ удовлетворяет условию*

$$\tilde{f}(q) = T_o(q)q \quad \text{для всех } q \in \mathcal{C}_o^n(X). \quad (13)$$

В частности, после подходящей перенумерации координат, для каждой точки $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(X)$ и каждого упорядоченного набора попарно различных $i_1, \dots, i_{t(X)+1} \leq n$ упорядоченные $(t(X) + 1)$ -точечные подмножества $(f_{i_1}(q), \dots, f_{i_{t(X)+1}}(q)) \subset X$ и $(q_{i_1}, \dots, q_{i_{t(X)+1}}) \subset X$ имеют одинаковый базисный $(\text{Aut } X)$ -инвариант $\mathcal{R}_X$. Как известно, если $X = \mathbb{CP}^1$, то $\mathcal{R}_X$ — двойное отношение

$$\mathcal{R}_{\mathbb{CP}^1}(a, b, c, d) = cr(a, b, c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d-a}{d-b} : \frac{a-c}{b-c}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{CP}^1; \quad (14)$$

если же $X = \mathbb{C}$, то $\mathcal{R}_X$ — простое отношение

$$\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(a, b, c) = sr(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} (a-c)/(b-c) = cr(b, a, c, \infty), \quad a, b, c \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Итак, для ручного f после подходящей перенумерации координат выполняются следующие условия когерентности:

$$\frac{f_i(q) - f_1(q)}{f_2(q) - f_1(q)} = \frac{q_i - q_1}{q_2 - q_1} \quad \text{для всех } q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}) \text{ и всех } i = 3, \dots, n, \quad (16)$$

$$\frac{f_i(q) - f_1(q)}{f_i(q) - f_2(q)} : \frac{f_1(q) - f_3(q)}{f_2(q) - f_3(q)} = \frac{q_i - q_1}{q_i - q_2} : \frac{q_1 - q_3}{q_2 - q_3} \quad \text{для всех } q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1) \text{ и всех } i = 4, \dots, n. \quad (17)$$

Мы заметно приблизились к цели, доказав, что координатные функции *всякого* эквивариантного эндоморфизма (после подходящей перенумерации) удовлетворяют соотношениям (16) или (17). Доказательство основано на том наблюдении, что простые и двойные отношения координат — *единственные* непостоянные голоморфные функции $\mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (при $X = \mathbb{CP}^1$ остаются лишь двойные отношения). Аналогичные комбинации *координатных функций* f_i эквивариантного эндоморфизма f пространства $\mathcal{C}_o^n(X)$ тоже непостоянны и голоморфно отображают $\mathcal{C}_o^n(X)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; значит, и они являются простыми или двойными отношениями *координат*. Исходная аналитическая задача приобретает комбинаторный характер: разобраться, «кто есть кто», т.е. какому именно из простых или двойных отношений координат равно каждое данное простое (двойное) отношение координатных функций эквивариантного эндоморфизма. Этому поможет новый гомоморфно-комбинаторный инвариант комплексных пространств, представляющий также самостоятельный интерес.

4.3. Функции без двух значений. Следующую лемму можно рассматривать как мультипликативный аналог «*abc*-леммы» для полиномов от одной переменной. Запись $f \approx g$ означает, что $f = cg$ для некоторого $c \in \mathbb{C}^*$.

Лемма 4. Пусть полиномы $P, Q, R \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ попарно взаимно просты, не имеют нулей вне большой диагонали $\mathcal{D} = \bigcup_{i \neq j} \{z_i = z_j\}$ и хотя бы один из них непостоянен. Если

$$P + Q + R = 0, \quad (*)$$

то либо

$$P \approx z_q - z_r, \quad Q \approx z_r - z_p, \quad R \approx z_p - z_q, \quad (18)$$

либо

$$P \approx (z_q - z_r)(z_s - z_p), \quad Q \approx (z_r - z_p)(z_s - z_q), \quad R \approx (z_p - z_q)(z_s - z_r). \quad (19)$$

Доказательство. В силу (*) хотя бы две из степеней a_i, b_i, c_i полиномов P, Q, R по z_i совпадают с $\max\{a_i, b_i, c_i\}$. Так как P, Q, R не имеют нулей вне $\mathcal{D}$, то для каждого i_o эти полиномы можно записать в виде

$$P_{i_o} \prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{a_{i_o j}}, \quad Q_{i_o} \prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{b_{i_o j}} \quad \text{и} \quad R_{i_o} \prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{c_{i_o j}} \quad (20)$$

соответственно, где полиномы

$$P_{i_o} \approx \prod_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq i_o}} (z_i - z_j)^{a_{i_o i, j}}, \quad Q_{i_o} \approx \prod_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq i_o}} (z_i - z_j)^{b_{i_o i, j}}, \quad R_{i_o} \approx \prod_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq i_o}} (z_i - z_j)^{c_{i_o i, j}} \quad (21)$$

попарно взаимно просты и не содержат z_{i_o} , а произведения $\prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{a_{i_o j}}$, $\prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{b_{i_o j}}$ и $\prod_{j \neq i_o} (z_{i_o} - z_j)^{c_{i_o j}}$ — попарно взаимно простые полиномы по z_{i_o} степеней $a_{i_o}, b_{i_o}, c_{i_o}$. Есть лишь две возможности: (а) для некоторого $i = p$ хотя бы два из чисел a_p, b_p, c_p различны и (б) $a_i = b_i = c_i$ для всех i .

В случае (а) можно считать, что $a_p < b_p = c_p$. Учитывая (20) (с $i_o = p$) и принимая в расчет лишь старшие по z_p члены в (*), получим $Q_p + R_p = 0$; так как Q_p и R_p взаимно просты, то они — ненулевые постоянные. Поэтому $Q \approx \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{b_{pj}}$, $R \approx \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{c_{pj}}$ и (*) превращается в

$$P_p \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{a_{pj}} + B \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{b_{pj}} + C \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{c_{pj}} = 0, \quad (22)$$

где $B, C \in \mathbb{C}^*$. Все a_{pj} равны 0 (если некое a_{pj} положительно, то $z_p - z_j$ не входит в два других слагаемых и (22) невозможно). Значит, $a_p = \sum_{j \neq p} a_{pj} = 0$, P не содержит z_p , $P = P_p$ и (22) принимает вид $P + B \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{b_{pj}} + C \prod_{j \neq p} (z_p - z_j)^{c_{pj}} = 0$. При $z_p = 0$ это дает $P + B \prod_{j \neq p} (-z_j)^{b_{pj}} + C \prod_{j \neq p} (-z_j)^{c_{pj}} = 0$, где полином $P = P_p$ определен в (21) (с $i_o = p$), а $\prod_{j \neq p} (-z_j)^{b_{pj}}$ и $\prod_{j \neq p} (-z_j)^{c_{pj}}$ взаимно просты. Такое возможно, лишь если P, Q, R удовлетворяют (18) с попарно различными p, q, r .

В случае (б) есть z_s , входящее в P, Q и R . Учитывая (20) и (21) (с $i_o = s$), представим (*) в виде

$$P_s \prod_{j \neq s} (z_s - z_j)^{a_{sj}} + Q_s \prod_{j \neq s} (z_s - z_j)^{b_{sj}} + R_s \prod_{j \neq s} (z_s - z_j)^{c_{sj}} = 0, \quad (23)$$

где P_s, Q_s, R_s не содержат z_s и $\sum_{j \neq s} a_{sj} = \sum_{j \neq s} b_{sj} = \sum_{j \neq s} c_{sj} > 0$; значит, $a_{sp} > 0$ для некоторого $p \neq s$. Так как P взаимно прост с Q и R и содержит $(z_s - z_p)^{a_{sp}}$, то $b_{sp} = c_{sp} = 0$. Беря в расчет в (23) лишь старшие по z_s члены, получим $P_s + Q_s + R_s = 0$; покажем, что P_s, Q_s, R_s — тройка типа (а). Пусть $a'_{sp}, b'_{sp}, c'_{sp}$ — степени полиномов P_s, Q_s и R_s по выбранному выше z_p ; тогда $a'_{sp} = a_p - a_{sp} < a_p$, $b'_{sp} = b_p - b_{sp} = b_p = a_p$ и $c'_{sp} = c_p - c_{sp} = c_p = a_p$. Стало быть, $a'_{sp} < b'_{sp} = c'_{sp}$ и $Q_s, R_s \neq \text{const}$, что нам и требовалось. Итак, $P_s \approx (z_q - z_r)$, $Q_s \approx (z_r - z_p)$ и $R_s \approx (z_p - z_q)$ для двух различных q, r , таких, что $q \neq p, s$ и $r \neq p, s$, и (23) можно записать как

$$A(z_q - z_r)(z_s - z_p)^{a_{sp}} \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{a_{sj}} + B(z_r - z_p) \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{b_{sj}} + C(z_p - z_q) \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{c_{sj}} = 0 \quad (24)$$

с некоторыми $A, B, C \in \mathbb{C}^*$. В частности, на подпространстве $z_p = z_q$ имеем $A(z_q - z_r)(z_s - z_q)^{a_{sp}} \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{a_{sj}} + B(z_r - z_q) \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{b_{sj}} = 0$, так что $A(z_s - z_q)^{a_{sp}} \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{a_{sj}} - B \prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{b_{sj}} = 0$. Произведения $\prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{a_{sj}}$ и $\prod_{j \neq s, p} (z_s - z_j)^{b_{sj}}$ должны быть взаимно просты; значит, $A = B$, $a_{sj} = 0$ при $j \neq s, p$, $b_{sj} = 0$ при $j \neq s, p, q$ и $a_{sp} = b_{sq}$. Поэтому $P \approx (z_q - z_r)(z_s - z_p)^{a_{sp}}$, $Q \approx (z_r - z_p)(z_s - z_q)^{a_{sp}}$, $R \approx (z_p - z_q) \prod_{j \neq s, p, q} (z_s - z_j)^{c_{sj}}$ и (24) принимает вид $A(z_q - z_r)(z_s - z_p)^{a_{sp}} + A(z_r - z_p)(z_s - z_q)^{a_{sp}} + CR = 0$. Ввиду $a_q = b_q = c_q$ и $a_r = b_r = c_r$ получаем $a_{sp} = 1$, $c_{sj} = 0$ для всех $j \neq r$ и $c_{sr} = 1$; итак, $P \approx (z_q - z_r)(z_s - z_p)$, $Q \approx (z_r - z_p)(z_s - z_q)$, $R \approx (z_p - z_q)(z_s - z_r)$. $\square$

Теорема 12. *Непостоянная голоморфная функция $\mu: \mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ является простым или двойным отношением координат. Все непостоянные голоморфные функции $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ — двойные отношения координат.*

Доказательство. По теореме Пикара такая функция μ рациональна на каждой комплексной прямой $\ell \subset \mathbb{C}^n$, не содержащейся в $\bigcup_{i \neq j} \{z_i = z_j\}$. Значит, μ рациональна на $\mathbb{C}^n$ и регулярна на $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})$, т. е. $\mu = -P/R$, где P, R — взаимно простые полиномы без нулей в $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})$ и хоть один из них непостоянен. Полином $Q = -P - R$ взаимно прост с P и R ; как и $-Q/R = 1 - \mu$, он не имеет нулей в $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})$. Итак, к P, Q и R применима лемма 4, так что $\mu = -P/R$ — простое или двойное отношение координат. На $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)$ «выживают» лишь двойные отношения, ибо $(q_k - q_i)/(q_k - q_j)$ имеет полюс вдоль дивизора $q_i = \infty$. $\square$

Следствие 3. *Пусть $X = \mathbb{C}$ или $\mathbb{CP}^1$. Тогда все непостоянные простые и двойные отношения координатных функций морфизма $\mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}_o^k(\mathbb{C})$ и все непостоянные двойные отношения координатных функций морфизма $\mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \mathcal{C}_o^k(\mathbb{CP}^1)$ являются простыми или двойными отношениями координат в $\mathcal{C}_o^n(X)$.*

Замечание 4. Каждая голоморфная функция $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \cong \mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ постоянна на всех $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ -слоях. Поэтому теорема 12 приводит также к следующему описанию всех непостоянных голоморфных

функций $h: C_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

$$h(q_1, \dots, q_{n-3}) = h_{i,j,k,l}(q_1, \dots, q_n) = \frac{q_i - q_j}{q_i - q_k} : \frac{q_j - q_l}{q_k - q_l}, \quad (25)$$

где $i, j, k, l \leq n$ попарно различны, $q_{n-2} = 0$, $q_{n-1} = 1$ и $q_n = \infty$. Сходным приемом можно описать все голоморфные функции $C_o^n(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.¹⁾ Δ

4.4. Комплекс $\mathcal{C}(Z, G)$. Пусть $\text{Hol}(Z, G)$ — группа всех голоморфных отображений комплексного пространства Z в связную комплексную группу Ли G (умножение поточечно), $\mathcal{V}(Z, G) = \{\lambda \in \text{Hol}(Z, G) \mid \lambda \neq \text{const}, \lambda(Z) \not\cong 1\}$, $\mathcal{E}(Z, G) = \{\{\mu, \nu\} \subseteq \mathcal{V}(Z, G) \mid \mu \cdot \nu^{-1} \in \mathcal{V}(Z, G)\}$, $\mathcal{G}(Z, G)$ — граф с множеством вершин $\mathcal{V}(Z, G)$ и множеством ребер $\mathcal{E}(Z, G)$ и, наконец, $\mathcal{C}(Z, G)$ — флаг-комплекс графа $\mathcal{G}(Z, G)$ (его симплексы — все конечные подмножества $\Delta \subseteq \mathcal{V}(Z, G)$, в которых любая пара различных вершин $\mu, \mu' \in \Delta$ соединена в $\mathcal{G}(Z, G)$ ребром). Если $\{\mu, \nu\} \in \mathcal{E}(Z, G)$, то μ и ν — *собственные делители* друг друга: $\nu \mid \mu$ и $\mu \mid \nu$. Если фиксировать G , то $\mathcal{G}(Z, G)$ и $\mathcal{C}(Z, G)$ инвариантны относительно биголоморфных изоморфизмов $Z \cong Z'$.

Лемма 5. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ — голоморфное отображение неприводимых квазипроективных многообразий. Если для каждого $\lambda \in \mathcal{V}(Y, G)$ композиция $f^*(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \circ f: Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\lambda} G \setminus \{1\}$ непостоянна (это заведомо так, если f доминантно), то отображение вершин $f^*: \mathcal{V}(Y, G) \ni \lambda \mapsto \lambda \circ f \in \mathcal{V}(Z, G)$ индуцирует симплициальное отображение $f^*: \mathcal{C}(Y, G) \rightarrow \mathcal{C}(Z, G)$, которое на каждом симплексе инъективно и потому сохраняет его размерность.

Доказательство. Если $\mu \neq \nu$ — вершины симплекса $\Delta \in \mathcal{C}(Y, G)$, то $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu \cdot \nu^{-1} \in \mathcal{V}(Y, G)$, $f^*(\mu) \cdot (f^*(\nu))^{-1} = f^*(\lambda) \neq \text{const}$ и $\mu(f(z)) \cdot \nu^{-1}(f(z)) = \lambda(f(z)) \neq 1$ при $z \in Z$, так что $f^*(\nu) \mid f^*(\mu)$. Значит, f^* инъективно на симплексе Δ и $f^*(\Delta) \in \mathcal{C}(Z, G)$. Последнее утверждение леммы очевидно. $\square$

Итак, $Z \mapsto \mathcal{C}(Z, G)$ — контравариантный функтор из категории неприводимых квазипроективных многообразий и доминантных отображений в категорию симплициальных комплексов и симплициальных отображений. Морфизмы $Z \rightarrow G \setminus \{1\}$ можно заменить классами их голоморфной гомотопии. Инварианты комплекса $\mathcal{C}(Z, G)$ являются инвариантами биголоморфных отображений многообразия Z .

4.5. Комплекс простых и двойных отношений. В поле $\mathbb{C}(q)$ комплексных рациональных функций от независимых переменных $\mathbf{q} = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ положим

$$sr_{ijk} = sr(q_i, q_j, q_k) = \frac{q_i - q_k}{q_j - q_k} \quad \text{и} \quad cr_{ijkl} = cr(q_i, q_j, q_k, q_l) = \frac{q_l - q_i}{q_l - q_j} : \frac{q_i - q_k}{q_j - q_k}. \quad (26)$$

Пусть $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$ и $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ — множества всех sr и cr , и пусть $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}) \cup \mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$. Носитель $\text{supp } \mu$ функции $\mu \in \mathcal{V}(\mathbf{q})$ — это множество всех входящих в μ переменных. Есть 6 простых отношений с носителем $\{q_i, q_j, q_k\}$ и 6 двойных отношений с носителем $\{q_i, q_j, q_k, q_l\}$. Запись $\nu \mid \mu$ означает, что $\mu, \nu, \mu/\nu \in \mathcal{V}(\mathbf{q})$; тогда $\nu/\mu \in \mathcal{V}(\mathbf{q})$ и μ, ν — *собственные делители* друг друга; $CD(\mu, \mu')$ — множество всех *общих* собственных делителей функций μ и μ' . Пусть $\mathcal{G}(\mathbf{q})$ — граф

¹⁾ Это сделано в [30], [32] и [64], но без удобного единообразия, доставляемого леммой 4.

с множеством вершин $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ и множеством ребер $\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \{\{\mu, \nu\} \subseteq \mathcal{V}(\mathbf{q}) \mid \mu \mid \nu\}$, $\mathcal{C}(\mathbf{q})$ — его флаг-комплекс. Носитель $\text{supp } \Delta$ симплекса Δ — это $\bigcup_{\mu \in \Delta} \text{supp } \mu$.

Есть четыре типа симплексов: 1) *SR-чистые*: все μ_i и все μ_i/μ_j принадлежат $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$; они образуют подкомплекс $\mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q})$; 2) *CR-чистые*: все μ_i принадлежат $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ (тогда и все μ_i/μ_j принадлежат $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$); они образуют подкомплекс $\mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q})$; 3) *смешанные*: есть вершины из $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$ и из $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$; 4) *все остальные*: вершины лежат в $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$, а их отношения — в $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ (скажем, $\Delta^m = \{sr_{1,2,3}, sr_{1,2,4}, \dots, sr_{1,2,m+3}\}$; они нам не понадобятся).

Пусть $\mathcal{C}(\mathbf{q}_n)$, $\mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n)$ и $\mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n)$ — подкомплексы в $\mathcal{C}(\mathbf{q})$, $\mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q})$ и $\mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q})$, состоящие из всех их симплексов с носителями в $\mathbf{q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{q_1, \dots, q_n\}$; аналогично определим множества вершин $\mathcal{V}(\mathbf{q}_n)$, $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}_n)$, $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q}_n)$. Следующие три леммы доказываются непосредственной проверкой.

Лемма 6. (а) Если μ, ν и $\mu/\nu \in \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$, то либо знаменатели вершин μ и ν , либо их числители совпадают; в частности, $\#(\text{supp } \mu \cap \text{supp } \nu) = 2$.

(б) Все собственные делители $\mu \in \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$ функции sr_{ijk} получаются заменой i или j на $l \neq i, j, k$; с точностью до выбора l и порядка сомножителей, каждое разложение sr_{ijk} на два множителя из $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$ имеет вид $sr_{ilk} \cdot sr_{ljk}$.

(в) Для любых попарно различных $i, j, k, l \in N$

$$\begin{aligned} CD(sr_{ijk}, sr_{ilk}) \cap \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}) &= \{sr_{imk} \mid m \neq i, j, k, l\}, \\ CD(sr_{ijk}, sr_{ljk}) \cap \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}) &= \{sr_{mjk} \mid m \neq i, j, k, l\}. \end{aligned} \quad (27)$$

(д) Если $\Delta = \{\lambda, \mu, \nu\} \subset \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$ — симплекс, то либо знаменатели, либо числители вершин λ, μ, ν совпадают; в любом случае $\# \text{supp } \Delta = 5$.

(е) Если $n \geq 3$ и $\Delta \in \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n)$, то либо знаменатели, либо числители всех вершин симплекса Δ совпадают. Наконец, $\dim \Delta \leq n - 3$ и $\dim \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n) \leq n - 3$.

Лемма 7. (а) Если $\mu, \nu \in \mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ и $\nu \mid \mu$, то $\#(\text{supp } \mu \cap \text{supp } \nu) = 3$.

(б) Все собственные делители $\mu \in \mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ функции cr_{ijkl} получаются заменой одного из индексов i, j, k, l некоторым $m \neq i, j, k, l$; с точностью до выбора m и порядка сомножителей, формулы $cr_{ijkl} = cr_{ijkm} \cdot cr_{ijml} = cr_{imkl} \cdot cr_{mjkl}$ дают все разложения cr_{ijkl} в произведение двух двойных отношений.

(в) Для любых пяти различных $i, j, k, l, m \in N$

$$CD(cr_{ijkl}, cr_{ijkm}) \cap \mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q}) = \{cr_{ijkt} \mid t \neq i, j, k, l, m\}; \quad (28)$$

еще три аналогичных соотношения получаются из (28) клейновыми перестановками $(i, j)(k, l)$, $(i, k)(j, l)$ и $(i, l)(j, k)$ индексов i, j, k, l .

(д) Если $\Delta = \{\lambda, \mu, \nu\} \subset \mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q})$ — симплекс, то $\# \text{supp } \Delta = 6$.

(е) $\dim \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n) \leq n - 4$ при всех $n \geq 4$.

Лемма 8. Каждый смешанный симплекс Δ имеет ровно одну вершину $\mu \in \mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q})$; кроме того, $\dim \Delta \leq n - 3$, коль скоро $\text{supp } \Delta \subseteq \{q_1, \dots, q_n\}$.

Теорема 12 позволяет отождествить $\mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}^*)$ с $\mathcal{C}(\mathbf{q}_n)$, а $\mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1), \mathbb{C}^*)$ — с $\mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n)$.

Следствие 4. $\dim \mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})) = \dim \mathcal{C}_{sr}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C})) = \dim \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n) = n - 3$ и $\dim \mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)) = \dim \mathcal{C}_{cr}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)) = \dim \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n) = n - 4$.

Доказательство. $\dim\{sr_{3,2,1}, \dots, sr_{n,2,1}\} = \dim\{sr_{1,2,3}, cr_{1,2,4,3}, \dots, cr_{1,2,n,3}\} = n - 3$ и $\dim\{cr_{1,2,3,4}, \dots, cr_{1,2,3,n}\} = n - 4$; остается сослаться на леммы 6, 7 и 8. $\square$

4.6. $\mathbf{S}(n)$ -действие в $\mathcal{C}(\mathbf{q}_n)$. Переставляя $q_1, \dots, q_n$, получим симплициальное действие группы $\mathbf{S}(n)$ в $\mathcal{V}(\mathbf{q}_n)$, транзитивное на $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}_n)$ и $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q}_n)$, сохраняющее тип и размерность симплексов и подкомплексы $\mathcal{C}_{sr}^m(\mathbf{q}_n)$ и $\mathcal{C}_{cr}^m(\mathbf{q}_n)$. Пусть $\mathbf{S}(n)$ -инвариантные подмножества $\mathcal{C}_{sr}^m(\mathbf{q}_n) \subseteq \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n)$ и $\mathcal{C}_{cr}^m(\mathbf{q}_n) \subseteq \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n)$ состоят из всех m -мерных симплексов соответствующего типа (это не m -мерные остовы!).

Назовем *нормальными* следующие три упорядоченных m -симплекса:

$$\Delta_{sr}^m = [sr_{3,2,1}, sr_{4,2,1}, \dots, sr_{m+3,2,1}] \in \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n) \quad (0 \leq m \leq n - 3),$$

$$\Delta_{sr}^{-m} = [sr_{2,3,1}, sr_{2,4,1}, \dots, sr_{2,m+3,1}] \in \mathcal{C}_{sr}(\mathbf{q}_n) \quad (0 \leq m \leq n - 3),$$

$$\Delta_{cr}^m = [cr_{1,2,3,4}, cr_{1,2,3,5}, \dots, cr_{1,2,3,m+4}] \in \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n) \quad (0 \leq m \leq n - 4).$$

Лемма 9. (а) Если $m \geq 1$, то $\mathcal{C}_{sr}^m(\mathbf{q}_n) = \mathbf{S}(n)\Delta_{sr}^m \cup \mathbf{S}(n)\Delta_{sr}^{-m}$.

(б) Действие группы $\mathbf{S}(n)$ на $\mathcal{C}_{cr}^m(\mathbf{q}_n)$ транзитивно.

Доказательство. (а) Пусть $\Delta = [\mu_0, \dots, \mu_m] \in \mathcal{C}_{sr}^m(\mathbf{q}_n)$, $\mu_0 = sr_{3,2,1}$. Согласно лемме 6(b), $\mu_1 = sr_{l,2,1}$ или $\mu_1 = sr_{3,l,1}$ ($l > 3$). Переставляя $4, \dots, n$, можно сохранить μ_0 и перевести μ_1 в одну из функций $sr_{4,2,1}$, $sr_{3,4,1}$. В первом случае $[\mu_0, \mu_1] = [sr_{3,2,1}, sr_{4,2,1}]$; во втором, применяя транспозицию $(2, 3)$ ко всем вершинам симплекса Δ , получим $[\mu_0, \mu_1] = [sr_{2,3,1}, sr_{2,4,1}]$. Если $m = 1$, то все кончено. При $m \geq 2$ либо

(i) $\Delta = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m] = [sr_{3,2,1}, sr_{4,2,1}, \mu_2, \dots, \mu_m]$, либо

(ii) $\Delta = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m] = [sr_{2,3,1}, sr_{2,4,1}, \mu_2, \dots, \mu_m]$.

В случае (i) у μ_0 и μ_1 общий знаменатель $q_1 - q_2$. По лемме 6(e), (c) у $\mu_2, \dots, \mu_m$ тот же знаменатель, так что $\mu_2 = sr_{k_2,2,1}, \dots, \mu_m = sr_{k_m,2,1}$ с попарно различными $k_2, \dots, k_m \geq 5$; подходящая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}\{5, \dots, n\}$ сохраняет μ_0, μ_1 и переводит Δ в Δ_{sr}^m . В случае (ii) у $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ общий числитель $q_1 - q_2$; как выше, $\mu_2 = sr_{2,k_2,1}, \dots, \mu_m = sr_{2,k_m,1}$ и $\sigma\Delta = \Delta_{sr}^{-m}$ для подходящего $\sigma \in \mathbf{S}\{5, \dots, n\}$.

(б) Пусть $\Delta = [\mu_0, \mu_1, \dots] \in \mathcal{C}_{cr}^m(\mathbf{q}_n)$, $\mu_0 = cr_{1,2,3,4}$. По лемме 7(b) μ_1 — одна из функций $cr_{1,2,3,l}$, $cr_{1,2,l,4}$, $cr_{1,l,3,4}$, $cr_{l,2,3,4}$ с $l \geq 5$. Некоторая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}\{5, \dots, n\}$ сохраняет μ_0 и переводит μ_1 в одну из функций $cr_{1,2,3,5}$, $cr_{1,2,5,4}$, $cr_{1,5,3,4}$, $cr_{5,2,3,4}$. Перестановка $(1, 3)(2, 4)$ сохраняет $cr_{1,2,3,4}$ и переводит $cr_{1,2,3,5}$ в $cr_{1,5,3,4}$ и $cr_{1,2,5,4}$ в $cr_{5,2,3,4}$; остаются лишь возможности $[\mu_0, \mu_1] = [cr_{1,2,3,4}, cr_{1,2,3,5}]$ или $[cr_{1,2,3,4}, cr_{1,2,5,4}]$, меняющиеся местами при перестановке $(1, 2)(3, 4)$. Итак, можно считать, что $\Delta = [cr_{1,2,3,4}, cr_{1,2,3,5}, \dots]$. Если $m = 1$, то все кончено. При $m \geq 2$ соотношение (28) показывает, что $\mu_2, \dots, \mu_m$ — это $cr_{1,2,3,k_2}, \dots, cr_{1,2,3,k_m}$ с попарно различными $k_2, \dots, k_m \geq 6$. Подходящая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}\{6, \dots, n\}$ сохраняет μ_0, μ_1 и переводит Δ в Δ_{cr}^m . $\square$

Лемма 10. Пусть $f: C_o^n(X) \rightarrow C_o^n(X)$ — эквивариантный эндоморфизм. Тогда для любой непостоянной голоморфной функции $\mu: C_o^n(X) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ композиция $f^*(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ f: C_o^n(X) \xrightarrow{f} C_o^n(X) \xrightarrow{\mu} \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ непостоянна.

Доказательство. Если $\mu \circ f = c = \text{const} \neq 0, 1$, то $(\mu \circ f)(\sigma q) \equiv c$ для всех $\sigma \in \mathbf{S}(n)$. Так как f эквивариантен, найдется $\alpha \in \text{Aut } \mathbf{S}(n)$, такой, что $f(\gamma q) =$

$\alpha(\gamma)f(q)$ для всех $\gamma \in \mathbf{S}(n)$ и $q \in C_o^n(X)$, так что $c \equiv \mu(f(\gamma q)) = \mu(\alpha(\gamma)f(q))$. По теореме 12 вершина μ принадлежит одному из множеств $\mathcal{V}_{sr}(\mathbf{q}_n)$, $\mathcal{V}_{cr}(\mathbf{q}_n)$, инвариантных относительно инволюций $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ и $\lambda \mapsto 1 - \lambda$. Действие группы $\mathbf{S}(n)$ транзитивно на каждом из них; поэтому $\mu^{-1} = s\mu$ и $1 - \mu = t\mu$ для некоторых $s, t \in \mathbf{S}(n)$. Выбирая $\sigma = \alpha^{-1}(s^{-1})$ и $\tau = \alpha^{-1}(t^{-1})$, приходим к несовместимым равенствам $c^{-1} \equiv [\mu(f(q))]^{-1} \equiv s\mu(f(q)) \equiv \mu(s^{-1}f(q)) \equiv \mu(\alpha(\sigma)f(q)) \equiv \mu(f(\sigma q)) \equiv c$ и $1 - c \equiv 1 - \mu(f(q)) \equiv t\mu(f(q)) \equiv \mu(t^{-1}f(q)) \equiv \mu(\alpha(\tau)f(q)) \equiv \mu(f(\tau q)) \equiv c$. $\square$

Следствие 5. Эquivariantные эндоморфизмы пространства $C_o^n(X)$ индуцируют симплицальные эндоморфизмы комплекса $\mathcal{C}(C_o^n(X))$, сохраняющие размерности симплексов.

Лемма 11. Если f — equivariantный эндоморфизм пространства $C_o^n(X)$ и α — связанный с ним автоморфизм группы $\mathbf{S}(n)$, то $f^*: \mathcal{C}(C_o^n(X)) \rightarrow \mathcal{C}(C_o^n(X))$ equivariantно:

$$f^*(\sigma\mu) = \alpha^{-1}(\sigma)f^*(\mu) \quad \text{для всех } \sigma \in \mathbf{S}(n) \text{ и всех } \mu \in \mathcal{V}(C_o^n(X)); \quad (29)$$

стало быть, $f^*(\mathbf{S}(n)\mu) = \mathbf{S}(n)f^*(\mu)$ для всех $\mu \in \mathcal{V}(C_o^n(X))$. Кроме того, $f^*(\mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))) \subseteq \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$ и $f^*(\mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))) \subseteq \mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$.

Доказательство. Для $\sigma \in \mathbf{S}(n)$ и $s = \alpha^{-1}(\sigma)$ имеем

$$\begin{aligned} [f^*(\sigma\mu)](q) &= (\sigma\mu)(f(q)) = (\alpha(s)\mu)(f(q)) = \mu(\alpha(s^{-1})f(q)) \\ &= \mu(f(s^{-1}q)) = [f^*(\mu)](s^{-1}q) = [sf^*(\mu)](q) = [\alpha^{-1}(\sigma)f^*(\mu)](q); \end{aligned}$$

это дает (29). Так как $\alpha^{-1}(\mathbf{S}(n)) = \mathbf{S}(n)$, то из (29) следует, что $f^*(\mathbf{S}(n)\mu) = \mathbf{S}(n)f^*(\mu)$ для $\mu \in \mathcal{V}(C_o^n(X))$. Согласно леммам 5, 10 и следствию 5, f^* симплицально и сохраняет размерности симплексов. Для $\mu \in \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$ найдется SR -чистый $(n-3)$ -симплекс Δ^{n-3} с вершиной μ ; так как $\dim f^*(\Delta^{n-3}) = n-3$, то $f^*(\Delta^{n-3}) \notin \mathcal{C}_{cr}(C_o^n(\mathbb{C}))$. Значит, $f^*(\nu) \in \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$ хотя бы для одной вершины $\nu \in \Delta^{n-3}$. Конечно, $\mu = \sigma\nu$ для некоторой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}(n)$. Согласно (29), $f^*(\mu) = f^*(\sigma\nu) = \alpha^{-1}(\sigma)f^*(\nu)$; поэтому $f^*(\mu) \in \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$. Вывод: $f^*(\mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))) \subseteq \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$. Если $\Delta = \{\mu_0, \dots, \mu_m\} \in \mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$, то $\mu_i/\mu_j \in \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$ при $i \neq j$. Так как f^* инъективно на Δ , то $f^*(\mu_i) \neq f^*(\mu_j)$, $f^*(\mu_i)/f^*(\mu_j) = f^*(\mu_i/\mu_j) \in \mathcal{V}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$, $f^*(\Delta) \in \mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$ и $f^*(\mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))) \subseteq \mathcal{C}_{sr}(C_o^n(\mathbb{C}))$. $\square$

Лемма 12. Пусть $n > 6 - t(X)$ и f — equivariantный эндоморфизм пространства $C_o^n(X)$. Тогда для подходящей перестановки $\sigma \in \mathbf{S}(n)$ и всех $q \in C_o^n(X)$ и $r > t(X)$

$$\frac{f_r(\sigma q) - f_1(\sigma q)}{f_2(\sigma q) - f_1(\sigma q)} = \frac{q_r - q_1}{q_2 - q_1} \quad \text{при } X = \mathbb{C}, \quad (16^*)$$

$$\frac{f_r(\sigma q) - f_1(\sigma q)}{f_r(\sigma q) - f_2(\sigma q)} : \frac{f_1(\sigma q) - f_3(\sigma q)}{f_2(\sigma q) - f_3(\sigma q)} = \frac{q_r - q_1}{q_r - q_2} : \frac{q_1 - q_3}{q_2 - q_3} \quad \text{при } X = \mathbb{CP}^1. \quad (17^*)$$

Доказательство. Пусть сначала $X = \mathbb{C}$, $n > 4$ и Δ_{sr}^{n-3} — первый из трех нормальных $(n-3)$ -симплексов (см. п. 4.6); покажем, что $f^*(\Delta_{sr}^{n-3}) \in \mathbf{S}(n)\Delta_{sr}^{n-3}$.

Ввиду леммы 9(a) достаточно проверить, что нормальный $(n-3)$ -симплекс $\Delta_{sr}^{-(n-3)}$ не принадлежит $\mathbf{S}(n)f^*(\Delta_{sr}^{n-3})$. Пусть $s \in \mathbf{S}(n)$ и $\Delta_{sr}^{-(n-3)} = sf^*(\Delta_{sr}^{n-3})$. Ясно, что $(f_1(\sigma q) - f_i(\sigma q))/(f_1(\sigma q) - f_2(\sigma q)) = (q_1 - q_2)/(q_1 - q_i)$ при $i \geq 3$, где $\sigma = \alpha(s)$, а α — автоморфизм группы $\mathbf{S}(n)$, отвечающий эндоморфизму f . Если $(w_1 - w_i)/(w_1 - w_2) = (q_1 - q_2)/(q_1 - q_i)$ для всех $i \geq 3$, то $sr_{ijk}(w) = cr_{i,j,1,k}(q)$ для всех попарно различных $i, j, k \geq 3$. Значит, $[f^*(sr_{ijk})](\sigma q) = sr_{ijk}(f(\sigma q)) = cr_{i,j,1,k}(q)$, что противоречит лемме 11.

Пусть теперь $X = \mathbb{CP}^1$, $n > 3$, $\Delta_{cr}^{n-4} = [cr_{1,2,3,4}, cr_{1,2,3,5}, \dots, cr_{1,2,3,n}] \in \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n)$. Согласно леммам 10 и 5, $f^*(\Delta_{cr}^{n-4})$ есть $(n-4)$ -мерный симплекс в $\mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1))$. По теореме 12 $\mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)) = \mathcal{C}_{cr}(\mathbf{q}_n)$; значит, $f^*(\Delta_{cr}^{n-4}) \in \mathcal{C}_{cr}^{n-4}(\mathbf{q}_n)$. По лемме 9(b) действие группы $\mathbf{S}(n)$ на $\mathcal{C}_{cr}^{n-4}(\mathbf{q}_n)$ транзитивно, так что $f^*(\Delta_{cr}^{n-4}) \in \mathbf{S}(n)\Delta_{cr}^{n-4}$. $\square$

Замечание 5. (a) Из леммы 12 следует, что $f^*(\mathcal{V}_{cr}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}))) = \mathcal{V}_{cr}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{C}))$.

(b) При $n > t(X)$ существуют непустые открытые по Зарискому множества $U \subset \mathcal{C}_o^n(X)$ и $V \subset \mathcal{C}^n(X)$, такие, что: (1) если $q \in U$, $A \in \text{Aut } X$, $s \in \mathbf{S}(n)$ и $Aq = sq$, то $A = \text{id}$ и $s = 1$; (2) если $Q \in V$, $A \in \text{Aut } X$ и $AQ = Q$, то $A = \text{id}$. И правда, $\{q \in \mathcal{C}_o^n(X) \mid sq = Aq \text{ для некоторых } s \in \mathbf{S}(n) \setminus \{1\} \text{ и } A \in \text{Aut } X\}$ — собственное замкнутое по Зарискому подмножество в $\mathcal{C}_o^n(X)$; это дает (1) и (2).

4.7. Доказательство главной части теоремы 4 для $X = \mathbb{C}$ и $\mathbb{CP}^1$. Мы докажем, что при $n > 4$ всякий неабелев эндоморфизм F пространства $\mathcal{C}^n(X)$ является ручным. Пусть f — эквивариантный эндоморфизм пространства $\mathcal{C}_o^n(X)$, накрывающий F (см. теорему 11); достаточно проверить, что f ручной.

Теорема 13. При $n > 6 - t(X)$ каждый эквивариантный эндоморфизм f пространства $\mathcal{C}_o^n(X)$ является ручным.

Доказательство. По лемме 12 существует такая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}(n)$, что для всех $q \in \mathcal{C}_o^n(X)$ и всех $r > t(X)$ при $X = \mathbb{C}$ выполняется (16*), а при $X = \mathbb{CP}^1$ выполняется (17*). Определим морфизм $\tau: \mathcal{C}_o^n(X) \rightarrow \text{Aut } X$ формулами

$$\frac{f_1(\sigma q) - \tau(q)x}{f_1(\sigma q) - f_2(\sigma q)} = \frac{q_1 - x}{q_1 - q_2} \quad \text{при } x \in X = \mathbb{C}; \quad (30)$$

$$\frac{\tau(q)x - f_1(\sigma q)}{\tau(q)x - f_2(\sigma q)} : \frac{f_1(\sigma q) - f_3(\sigma q)}{f_2(\sigma q) - f_3(\sigma q)} = \frac{x - q_1}{x - q_2} : \frac{q_1 - q_3}{q_2 - q_3} \quad \text{при } x \in X = \mathbb{CP}^1. \quad (31)$$

Согласно лемме 12, $\tau(q)q_i = f_i(\sigma q)$ при $i = 1, \dots, n$ и $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{C}_o^n(X)$. Следовательно, $\tau(q)q = f(\sigma q) = \alpha(\sigma)f(q)$, т.е. $f(q) = \alpha(\sigma^{-1})\tau(q)q$ для всех $q \in \mathcal{C}_o^n(X)$. Далее, $s\tau(sq)q = \tau(sq)sq = f(\sigma sq) = \alpha(\sigma s)f(q) = \alpha(\sigma s)f(\sigma\sigma^{-1}q) = \alpha(\sigma s)\tau(\sigma^{-1}q)\sigma^{-1}q = \alpha(\sigma s)\sigma^{-1}\tau(\sigma^{-1}q)q$ для $s \in \mathbf{S}(n)$ и $q \in \mathcal{C}_o^n(X)$, откуда $[(\tau(sq))^{-1} \cdot \tau(\sigma^{-1}q)]q = \sigma\alpha(s^{-1}\sigma^{-1})sq$ (« $\cdot$ » — умножение в $\text{Aut } X$). Согласно замечанию 5(b), это дает $\sigma\alpha(s^{-1}\sigma^{-1})s = 1$ и $\tau(sq) = \tau(\sigma^{-1}q)$ для всех $s \in \mathbf{S}(n)$ и всех q из непустого открытого по Зарискому множества $U \subset \mathcal{C}_o^n(X)$. По непрерывности $\tau(sq) = \tau(\sigma^{-1}q)$ для всех $q \in \mathcal{C}_o^n(X)$ и $s \in \mathbf{S}(n)$, что дает $\mathbf{S}(n)$ -инвариантность морфизма τ . $\square$

Замечание 6. Так как $\sigma\alpha(s^{-1}\sigma^{-1})s = 1$ для всех $s \in \mathbf{S}(n)$, то автоморфизм α внутренний; для $n \neq 6$ это уже было отмечено в доказательстве теоремы 11.

4.8. Стабилизаторы точек и размерность образа неабелева эндоморфизма пространства $\mathcal{C}^n(X)$.

Лемма 13. При $n \geq t(X)$ стабилизатор $\text{St}_Q = \{A \in \text{Aut } X \mid AQ = Q\}$ точки $Q = \{q_1, \dots, q_n\} \in \mathcal{C}^n(X)$ либо является конечной разрешимой группой, либо изоморфен $\mathbf{A}(5)$; для точек Q общего положения $\# \text{St}_Q = \{1\}$.

Доказательство. Любой элемент $A \in \text{St}_Q$ — преобразование Мёбиуса, переставляющее точки $q_1, \dots, q_n \in X$. Оно однозначно определяется своими значениями $Aq_1, \dots, Aq_{t(X)}$, так что $\# \text{St}_Q < \infty$; для точек общего положения $\# \text{St}_Q = \{1\}$.

Если $X = \mathbb{C}$, то подгруппа $\text{St}_Q \subset \mathbf{Aff } \mathbb{C}$ сопряжена конечной подгруппе максимальной компактной подгруппы $\mathbf{T} \subset \mathbf{Aff } \mathbb{C}$, состоящей из всех вращений $z \mapsto e^{it}z$, $t \in \mathbb{R}$; значит, St_Q — конечная циклическая группа.

Максимальные компактные подгруппы в $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ сопряжены группе преобразований Мёбиуса вида $z \mapsto (az - \bar{c})/(cz + \bar{a})$, $|a|^2 + |c|^2 = 1$, изоморфной $\mathbf{SO}(3)$. Конечные подгруппы группы $\mathbf{SO}(3)$ известны со времен Ф. Клейна (см., например, [36] или [22, гл. VI, §§51–57]); все они, за исключением групп вращений икосаэдра и додекаэдра, изоморфных $\mathbf{A}(5)$, разрешимы. $\square$

Из теоремы 13 следует, что при $n > 4$ все $(\text{Aut } X)$ -орбиты в $\mathcal{C}^n(X)$ инвариантны относительно неабелевых эндоморфизмов $F: \mathcal{C}^n(X) \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$. Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} F(\mathcal{C}^n(X)) \geq n - t(X)$. Эту оценку можно усилить, доведя до неулучшаемой:

Теорема 14. Если $n > 4$, то $\dim_{\mathbb{C}} F(\mathcal{C}^n(X)) \geq n - t(X) + 1$.

Это следует из доказанной в п. 4.7 части теоремы 4, наличия точек $Q \in \mathcal{C}^n(X)$ с $\text{St}_Q \neq \{1\}$ (скажем, $Q = \{1, e^{2\pi i/n}, \dots, e^{2\pi i(n-1)/n}\}$) и следующей леммы.

Лемма 14. Пусть $U \subseteq \mathcal{C}^n(X)$ непусто, открыто и $(\text{Aut } X)$ -инвариантно, отображение $T: U \rightarrow \text{Aut } X$ голоморфно, $F: U \rightarrow \mathcal{C}^n(X)$, $F(Q) \stackrel{\text{def}}{=} T(Q)Q$. Если $Q^* \in U$ и $\text{St}_{Q^*} \neq \{1\}$, то найдется такое непустое открытое $(\text{Aut } X)$ -инвариантное множество $U^\circ \subseteq U$, что для всякого $Q \in U^\circ$ в $F((\text{Aut } X)Q)$ есть подмножество, изоморфное диску $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Стало быть, $\dim_{\mathbb{C}} F(U^\circ) \geq n - t(X) + 1$.

Доказательство. $\dim_{\mathbb{C}}[(\text{Aut } X)Q] = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Aut } X) = t(X)$ для всех $Q \in U$. Рассмотрим морфизм $f_Q: \text{Aut } X \rightarrow (\text{Aut } X)Q$, $f_Q(A) \stackrel{\text{def}}{=} T(AQ)AQ = F(AQ)$. Его дифференциал $(df_{Q^\circ})(A^\circ): \mathbb{C}^{t(X)} \rightarrow \mathbb{C}^{t(X)}$ для некоторых $Q^\circ \in U$ и $A^\circ \in \text{Aut } X$ отличен от нуля. В самом деле, иначе ввиду связности $\text{Aut } X$ получаем $f_Q = \text{const}$ при каждом $Q \in U$, т.е. $T(AQ)AQ \equiv T(Q)Q$ и $(T(Q))^{-1}T(AQ)A \in \text{St}_Q$ для $(Q, A) \in U \times (\text{Aut } X)$; так как $\# \text{St}_Q < \infty$, то $(T(Q))^{-1}T(AQ)A$ не зависит от A , и $(T(Q))^{-1}T(AQ)A = (T(Q))^{-1}T(Q) = 1$ при $(Q, A) \in U \times (\text{Aut } X)$. Итак, $A = (T(Q^*))^{-1}T(Q^*)A = (T(Q^*))^{-1}T(AQ^*)A = 1$ для всякого $A \in \text{St}_{Q^*}$ вопреки условию $\text{St}_{Q^*} \neq \{1\}$.

Пусть $(Q^\circ, A^\circ) \in U \times (\text{Aut } X)$ и $(df_{Q^\circ})(A^\circ) \neq 0$, т.е. $\text{rank}[(df_{Q^\circ})(A^\circ)] \geq 1$. По полунепрерывности $\text{rank}[(df_Q)(A)] \geq 1$ в окрестности $U^\circ \times \mathcal{A}^\circ$ точки (Q°, A°) , и для $Q \in U^\circ$ образ $(\text{Aut } X)$ -орбиты $F((\text{Aut } X)Q) = f_Q(\text{Aut } X)$ содержит множество, изоморфное диску $\mathbb{D}$, так что $\dim_{\mathbb{C}} F(U^\circ) \geq n - t(X) + 1$. $\square$

Замечание 7. Вот более информативная версия теоремы 14 для $X = \mathbb{C}$. Проектор $L = (L_1, \dots, L_n)$, $L_i(\{q_1, \dots, q_n\}) = q_i - (q_1 + \dots + q_n)/n$, отображает $\mathcal{C}^n(\mathbb{C})$ на пространство $\mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C}) = \{Q \in \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \mid \sum_{q \in Q} q = 0\}$ полиномов с простыми корнями и старшими коэффициентами 1 и 0. Если $n > 4$ и $F: \mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^n(\mathbb{C})$ — неабелев морфизм, то $L(F(\mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C}))) = \mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C})$. Пусть $F' = F \circ L$; по теореме 4 $F'(Q) = T(Q)Q$ с голоморфным $T: \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{Aff} \mathbb{C}$, т.е. $[T(Q)](z) = A(Q)z + B(Q)$ при $Q \in \mathcal{C}^n(\mathbb{C})$ и $z \in \mathbb{C}$, где $A: \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ и $B: \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфны. Класс когомологий $d_n^* \in H^1(\mathcal{C}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ дискриминанта $d_n: \mathcal{C}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ порождает $H^1(\mathcal{C}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, так что $A = d_n^r e^\varphi$, где $r \in \mathbb{Z}$ и φ голоморфна на $\mathcal{C}^n(\mathbb{C})$. Для $Q^\circ = \{q_1^\circ, \dots, q_n^\circ\} \in \mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C})$ голоморфная функция $a: \mathbb{C}^* \ni \zeta \mapsto a(\zeta) = \zeta A(\zeta Q^\circ) \in \mathbb{C}^*$ непостоянна, ибо $a(\zeta) = \zeta A(\zeta Q^\circ) = \zeta \cdot d_n^r(\zeta Q^\circ) e^{\varphi(\zeta Q^\circ)} = \zeta^{rn(n-1)+1} d_n^r(Q^\circ) e^{\varphi(\zeta Q^\circ)}$. По теореме Пикара $a(\zeta^\circ) = 1$ для некоторого $\zeta^\circ \in \mathbb{C}^*$ и $L_i(F(\zeta^\circ Q^\circ)) = \zeta^\circ A(\zeta^\circ Q^\circ) q_i^\circ = a(\zeta^\circ) q_i^\circ = q_i^\circ$ для всех i , т.е. $Q^\circ \in L(F(\mathcal{C}_b^{n-1}(\mathbb{C})))$. $\triangle$

4.9. Абелевы морфизмы. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 15. Если $n > 4$, $k \geq t(X)$ и $Q \in \mathcal{C}^k(X)$, то каждый гомоморфизм $\varphi: B_n(X) \rightarrow \pi_1((\text{Aut } X)Q)$ абелев.

Доказательство. Если $\text{St}_Q = \{1\}$, то $(\text{Aut } X)Q \cong \text{Aut } X$ и $\pi_1((\text{Aut } X)Q) \cong \pi_1(\text{Aut } X)$ — циклическая группа, так что все ясно.

Пусть $\text{St}_Q \neq \{1\}$. Тогда $h: \text{Aut } X \rightarrow (\text{Aut } X)Q$ — конечное накрытие со слоем St_Q ; возникает коммутативная диаграмма с точной строкой

$$\begin{array}{ccccccc} & & B_n(X) & & & & \\ & & \downarrow \varphi & \searrow \delta \circ \varphi & & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\text{Aut } X) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1((\text{Aut } X)Q) & \xrightarrow{\delta} & \text{St}_Q \longrightarrow 1 \end{array} \quad (32)$$

Достаточно убедиться, что $\delta \circ \varphi$ абелев, ибо тогда $(\delta \circ \varphi)(B'_n(X)) = \{1\}$, группа $\varphi(B'_n(X)) \subseteq \text{Ker } \delta = h_*(\pi_1(\text{Aut } X)) \cong \pi_1(\text{Aut } X)$ абелева, $\varphi(B'_n(X)) = \{1\}$ и φ абелев. По лемме 13 группа St_Q либо разрешима, либо изоморфна $\mathbf{A}(5)$. В первом случае все ясно; пусть $\text{St}_Q \cong \mathbf{A}(5)$. Если $n > 5$, то по теореме 8 гомоморфизм $\delta \circ \varphi$ абелев; если же $n = 5$, то $(\delta \circ \varphi)(B_5(X)) \subseteq \mathbf{A}(5) \subsetneq \mathbf{S}(5)$ — собственная подгруппа в $\mathbf{S}(5)$ и, согласно теореме 8, $\delta \circ \varphi$ абелев. $\square$

Лемма 16. Пусть комплексное пространство Z лиувиллево¹⁾, и пусть отображение $F: Z \rightarrow \mathcal{C}^m(X)$ голоморфно. Если подгруппа $F_*(\pi_1(Z)) \subseteq \pi_1(\mathcal{C}^m(X))$ разрешима, то $F(Z)$ содержится в одной орбите $(\text{Aut } X)$ -действия в $\mathcal{C}^m(X)$.

Доказательство. Пусть $f: Y \rightarrow \mathcal{C}_o^m(X)$ — голоморфное поднятие F на подходящее связное конечное накрытие Y над Z ; конечно, Y лиувиллево. Учитывая изоморфизм $j_{X,m}$ (см. §3), получим цепочку голоморфных отображений

$$H: Y \xrightarrow{f} \mathcal{C}_o^m(X) \xrightarrow{j_{X,m}} (\text{Aut } X) \times \mathcal{C}_o^{m-t(X)}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \xrightarrow{\xi} \mathcal{C}_o^{m-t(X)}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}),$$

где ξ — естественная проекция. Покажем, что $H = \text{const}$; тогда $f(Y) \subseteq (\text{Aut } X)q$ для некоторого $q \in \mathcal{C}_o^m(X)$ и $F(Z) \subseteq (\text{Aut } X)Q$, где $Q = p(q)$ — проекция точки

¹⁾То есть на нем нет непостоянных ограниченных голоморфных функций. Все используемые в данной работе свойства лиувиллевых пространств элементарны и хорошо известны; более интересные вещи, связанные с понятием лиувиллевости, можно найти в [44], [47].

q на $C^m(X)$. Каждая координата $h: Y \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ отображения H голоморфна. Подгруппа $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} h_*(\pi_1(Y)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \cong \mathbb{F}_2$ разрешима; значит, $\Gamma = \{1\}$ или $\Gamma \cong \mathbb{Z}$. Пусть $V \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \sim$ накрытие, отвечающее Γ . Тогда V — диск или кольцо, так что отображение $\tilde{h}: Y \rightarrow V$, накрывающее h , постоянно; значит, $h = \text{const}$ и $H = \text{const}$. $\square$

Каждая связная комплексная группа Ли $\mathcal{L}$ лиувиллева (ибо в ней много однопараметрических подгрупп), а группа $\pi_1(\mathcal{L})$ абелева; поэтому образ любого голоморфного отображения $\mathcal{L} \rightarrow C^m(X)$ содержится в одной $(\text{Aut } X)$ -орбите.

Следствие 6. *Морфизмы $F: C^n(X) \rightarrow C^k(X)$ отображают $(\text{Aut } X)$ -орбиты в $(\text{Aut } X)$ -орбиты.*

Следующая теорема завершает доказательство теоремы 4 для $X = \mathbb{CP}^1$ или $\mathbb{C}$.

Теорема 15. *Пусть X есть $\mathbb{CP}^1$ или $\mathbb{C}$, $n > 4$ и $k \geq t(X) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Aut } X)$. Тогда всякий абелев морфизм $F: C^n(X) \rightarrow C^k(X)$ одноорбитен, а каждое непрерывное одноорбитное отображение $F: C^n(X) \rightarrow C^k(X)$ абелево.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 16, ибо $C^n(X)$, как всякое связное квазипроективное многообразие, лиувиллево, а $F_*(\pi_1(C^n(X)))$ — по условию абелева группа. Второе утверждение вытекает из леммы 15. $\square$

Замечание 8. Если $n \neq 4$ и $n(n-1)$ не делит $k(k-1)$, то каждый морфизм $C^n(\mathbb{C}) \rightarrow C^k(\mathbb{C})$ абелев и потому одноорбитен (см. [43, п. 8.1] и [50, §9]). Я не знаю, существуют ли неабелевы морфизмы $C^n(\mathbb{C}) \rightarrow C^k(\mathbb{C})$ при $k > n > 4$. $\triangle$

4.10. Автоморфизмы пространства $M_o(0, n)^1$. Пространство модулей $M_o(0, n)$ римановой сферы с n упорядоченными проколами изоморфно пространству орбит $C_o^n(\mathbb{CP}^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, которое, как мы знаем, есть $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) = \{q \in C_o^n(\mathbb{CP}^1) \mid q = (q_1, \dots, q_{n-3}, 0, 1, \infty)\} \cong C_o^{n-3}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ (§3). Для $h = (h_1, \dots, h_{n-3}): \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) \rightarrow \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$ положим $h_{n-2} = 0$, $h_{n-1} = 1$, $h_n = \infty$. Калиман [29] обнаружил следующий факт:

Теорема 16. *Пусть $n \geq 4$ и $h = (h_1, \dots, h_{n-3})$ — непостоянный эндоморфизм пространства $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$. Тогда*

$$h_i(q) = \frac{q_{\sigma(i)} - q_{\sigma(n-2)}}{q_{\sigma(i)} - q_{\sigma(n)}} : \frac{q_{\sigma(n-2)} - q_{\sigma(n-1)}}{q_{\sigma(n)} - q_{\sigma(n-1)}} \quad (*)$$

при всех $i = 1, \dots, n-3$, где $\sigma \in \mathbf{S}(n)$ не зависит от i . В частности, h — автоморфизм.

В [29] нет доказательства; вот его упрощенная версия в духе пп. 4.3–4.7.

Доказательство. Все $h_i: \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ с $i \leq n-3$ голоморфны; покажем, что $h_i \neq \text{const}$. Допустим, что $h_p = C = \text{const} \neq 0, 1$ для какого-нибудь $p \leq n-3$; так как $h \neq \text{const}$, то $h_r \neq \text{const}$ для некоторого $r \leq n-3$. Так как $h_r(q) \neq h_p(q)$ для всех $q \in \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$, то $h_r(q) \neq 0, 1, C$ в $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$. Согласно замечанию 4, $h_r = (q_i - q_j)(q_k - q_l)/(q_i - q_k)(q_i - q_l)$, где $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ попарно различны; но такая функция на $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$ принимает все значения $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, включая и C , и мы приходим к противоречию.

¹⁾На вопрос об автоморфизмах пространства $M_o(0, n)$, поставленный, кажется, У. Фултоном, мое внимание обратил И. В. Долгачев.

Рассмотрим теперь композицию

$$\Phi: \mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1) \xrightarrow{j_{\mathbb{CP}^1, n}^{f_1, \dots, f_n}} \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) \xrightarrow{\nu} \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1) \xrightarrow{h} \mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1), \quad (33)$$

где ν — естественная проекция. Пусть $f_i(q) = q_i$ для всех $q = (q_1, \dots, q_n)$ и $i \leq n-3$; тогда $\Delta^{n-4} = \{f_1, \dots, f_{n-3}\} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1))$. Так как h — эндоморфизм пространства $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$ и $h_1, \dots, h_{n-3} \neq \text{const}$, то $h^*(\Delta^{n-4}) = \{h_1, \dots, h_{n-3}\} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1))$ и $\Phi^*(\Delta^{n-4}) = j_{\mathbb{CP}^1, n}^*(\nu^*(h^*(\Delta^{n-4}))) \in \mathcal{C}(\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1))$. По лемме 9(b) подходящая перестановка координат $q_1, \dots, q_n$ в $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)$ приводит $\Phi^*(\Delta^{n-4})$ к виду Δ_{cr}^m с $m = n-4$ (см. п. 4.6). С точностью до обозначений, это и есть форма (*). Наконец, всякое отображение h с компонентами вида (*) — автоморфизм пространства $\mathcal{D}^{n-3}(\mathbb{CP}^1)$. $\square$

Так как $\sigma Aq = A\sigma q$ при $\sigma \in \mathbf{S}(n)$, $A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ и $q \in \mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)$, то перестановка $\sigma \in \mathbf{S}(n)$ порождает автоморфизм пространства $M_o(0, n)$. Из теоремы 16 получаем

Следствие 7. *Каждый непостоянный эндоморфизм пространства модулей $M_o(0, n)$ является автоморфизмом и порождается некоторой перестановкой координат в $\mathcal{C}_o^n(\mathbb{CP}^1)$, так что $\text{Aut } M_o(0, n) \cong \mathbf{S}(n)$.*

§5. Точные представления суперпозициями

Теорема 17. *При $n > 4$ функция u_n не имеет точного представления суперпозициями целых алгеброидных функций от менее чем $n-1$ переменных и голоморфных функций любого числа переменных.*

Доказательство. Поскольку конечное накрытие с примитивной группой монодромии неразложимо, суперпозиция, представляющая u_n , содержит ровно одну многозначную функцию, т. е.

$$u_n(z) = P(\varphi(h(z)), z). \quad (*)$$

Здесь $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ и $P: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфные отображения, а φ — целая n -значная алгеброидная функция на $\mathbb{C}^k$, т. е. решение уравнения $\varphi^n + g_1(w)\varphi^{n-1} + \dots + g_n(w) = 0$, где $w \in \mathbb{C}^k$ и отображение $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ голоморфно. Пусть Σ_φ — дискриминантное множество функции φ . Формула (*) приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & G_n & \xrightarrow{F \stackrel{\text{def}}{=} g \circ h} & G_n & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^n(\mathbb{C}) \\ & & \searrow h & & \nearrow g & & \\ & & & \mathbb{C}^k \setminus \Sigma_\varphi & & & \end{array} \quad (34)$$

из которой следует, что $\dim_{\mathbb{C}} F(\mathbb{C}^n(\mathbb{C})) \leq k$. Морфизм F неабелев, ибо иначе абелевыми оказались бы группы монодромии функций $\varphi(h(z))$ и $u_n(z) = P(\varphi(h(z)), z)$; по теореме 14 $k \geq \dim_{\mathbb{C}} F(\mathbb{C}^n(\mathbb{C})) \geq n-2+1 = n-1$. $\square$

Целые алгебраические функции *общего положения* вовсе не имеют точных представлений суперпозициями целых алгебраических функций меньшего числа переменных. Пусть $\mathcal{EA}(n, k)$ — класс всех n -значных целых алгебраических функций на $\mathbb{C}^k$. Все $g \in \mathcal{EA}(n, k)$ являются суперпозициями целых алгебраических функций от $n-1$ переменных; поэтому будем с самого начала считать,

что $k < n$. Отождествляя каждую функцию g с вектором всех коэффициентов ее определяющего полинома R_g , превратим множество $\mathcal{EA}^N(n, k)$ всех $g \in \mathcal{EA}(n, k)$, у которых все коэффициенты полинома R_g — полиномы степени $\leq N$, в конечномерное векторное пространство. Подмножество $A \subset \mathcal{EA}(n, k)$ назовем *тонким*, если для каждого N пересечение $A \cap \mathcal{EA}^N(n, k)$ содержится в собственном алгебраическом подмножестве пространства $\mathcal{EA}^N(n, k)$.

Теорема 18. *При $n > 4$ и $k < n$ множество всех n -значных целых алгебраических функций от k переменных, точно представимых суперпозициями целых алгебраических функций от менее чем k переменных, является тонким подмножеством в $\mathcal{EA}(n, k)$.*

Идея доказательства такова (см. [42]). Пусть $\mathcal{O}_V$ — пучок ростков голоморфных функций в области $V \subseteq \mathbb{C}^k$, $\mathcal{O}(V)$ — кольцо голоморфных функций на V , $t = g(v)$ — целая алгеброидная функция в V , определяемая уравнением вида $R(t, v) = t^n + a_1(v)t^{n-1} + \dots + a_n(v) = 0$, $a_i \in \mathcal{O}(V)$, и пусть $\mathbf{R}_v$ — росток полинома R в точке $v \in V$. Пусть $\Sigma_g(V, r) \subseteq V$ ($2 \leq r \leq n$) состоит из всех $v \in V$, таких, что $R(t, v)$ имеет корень кратности $\geq r$; конечно, $\Sigma_g(V, 2) = \Sigma_g$ — дискриминантное множество функции g в V . Пусть $\Sigma_g^*(V, r)$ — множество всех тех $v \in V$, для которых $\mathbf{R}_v$ имеет неприводимый делитель степени $\geq r$ в кольце $\mathcal{O}_v[t]$; тогда $\Sigma_g(V, r) \supseteq \Sigma_g^*(V, r)$ и $\Sigma_g \supseteq \Sigma_g^*(V, 2) \supseteq \dots \supseteq \Sigma_g^*(V, n)$. Пусть $\mathbf{brm}(g, V) = \max\{r \mid \Sigma_g^*(V, r) \neq \emptyset\}$ (при $\Sigma_g^*(V, 2) = \emptyset$ считаем, что $\mathbf{brm}(g, V) = 1$). В [42] доказана следующая теорема (теорема 2.5): *пусть $\Sigma_g \neq V$, группа монодромии $\mathbf{Gal}(g, V)$ примитивна, $r = \mathbf{brm}(g, V) \geq 2$, и пусть $d_r = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma_g(V, r)$; тогда функция g в области V не может быть точно представлена суперпозициями целых алгеброидных функций от менее чем $k - d_r$ переменных.*

Определим множества A_1, A_2, A_3, A_4 так: (a) A_1 — все $g \in \mathcal{EA}^N(n, k)$ с $\Sigma_g = \mathbb{C}^k$; (b) A_2 — все $g \in \mathcal{EA}^N(n, k) \setminus A_1$ с $\mathbf{Gal}(g, \mathbb{C}^k) \neq \mathbf{S}(n)$; (c) A_3 — все $g \in \mathcal{EA}^N(n, k) \setminus (A_1 \cup A_2)$ с $\mathbf{brm}(g, \mathbb{C}^k) < k + 1$; (d) A_4 — все $g \in \mathcal{EA}^N(n, k) \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ с $d_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \Sigma_g(\mathbb{C}^k, k+1) > 0$. Ясно, что A_1 — собственное алгебраическое подмножество в $\mathcal{EA}^N(n, k)$. Оказывается, A_2, A_3, A_4 содержатся в собственных алгебраических подмножествах пространства $\mathcal{EA}^N(n, k)$; поэтому таково и $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Для всех $g \in \mathcal{EA}^N(n, k) \setminus A$ выполняются следующие условия: (1) $\mathbf{brm}(g, \mathbb{C}^k) \geq k + 1 \geq 2$; (2) группа Галуа $\mathbf{Gal}(g, \mathbb{C}^k)$ совпадает с $\mathbf{S}(n)$; (3) $d_{k+1} = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma_g(\mathbb{C}^k, k+1) = 0$. В силу цитированной выше теоремы из [42] такая функция g не допускает точного представления суперпозициями целых алгеброидных функций от менее чем k переменных. $\square$

В. И. Арнольд полагал, что в точном представлении функции u_n суперпозициями *любых* (а не только целых) алгебраических функций число необходимых переменных не может быть меньше, чем $n - 2$. Теоремы 3, 4 и 14 (для $X = \mathbb{CP}^1$) позволяют подтвердить одну из версий этого предположения. Но у меня не осталось места (даже на полях!), чтобы привести необходимые определения и изложить доказательство. Кое-что об этом можно найти в [48], [50, п. 11.2].

Заключительные замечания. С частью истории задач, известных под общим именем «Тринадцатая проблема Гильберта», можно познакомиться по работам Диксмье [15], Витушкина [61], [62] и Арнольда [7]. Кроме работ самого Гильберта (и тех, что уже цитировались), этой проблеме посвящены работы

Вимана [63], Чеботарёва [55], [56], [58], Сегре [53], [54], Чеботарёва-сына [14], Морозова [52], Хованского [33]–[35], Булера и Рейхштейна [12] (ср. с попытками Н. Г. Чеботарёва «одевания» (Einkleidung) конечных групп). По-моему, после знаменитой теоремы Колмогорова–Арнольда о суперпозициях непрерывных функций самым интересным остается вопрос о наименьшем числе переменных в представлении ростка *однозначной ветви* функции u_n в точке, не лежащей на ее множестве ветвления, суперпозициями ростков голоморфных функций. Методы данной статьи работают либо во всем пространстве, либо в окрестности *наиболее особой* точки функции u_n — начала координат.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Косы алгебраических функций и когомологии ласточкиных хвостов*, УМН, **23**:4 (1968), 247–248.
- [2] В. И. Арнольд, *О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций*, Труды ММО, т. 21, МГУ, М., 1970, 27–46.
- [3] В. И. Арнольд, *О классах когомологий алгебраических функций, инвариантных относительно преобразований Чирнгаузена*, Функц. анализ и его прил., **4**:1 (1970), 84–85.
- [4] В. И. Арнольд, *Топологические инварианты алгебраических функций*. II, Функц. анализ и его прил., **4**:2 (1970), 1–9.
- [5] V. I. Arnold, G. Shimura, *Superposition of algebraic functions*, in: Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems, Proc. Symposia in Pure and Applied Mathematics, vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976, 45–46.
- [6] В. И. Арнольд, *И. Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика*, УМН, **57**:4(346) (2002), 197–207.
- [7] В. И. Арнольд, *От проблемы Гильберта о суперпозициях до динамических систем*, в кн.: Математические события XX века, Фазис, Москва, 2003, 19–51.
- [8] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **4**:1 (1925), 47–72.
- [9] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math., **48**:1 (1947), 101–126.
- [10] E. Artin, *Braids and permutations*, Ann. of Math., **48**:3 (1947), 643–649.
- [11] L. Bers, H. L. Royden, *Holomorphic families of injections*, Acta Math., **157**:3–4 (1986), 259–286.
- [12] J. Buhler, Z. Reichstein, *On the essential dimension of a finite group*, Compositio Math., **106**:2 (1997), 159–179.
- [13] A. Cayley, *Note sur deux formules données par M. M. Eisenstein et Hesse*, J. Reine Angew. Math., **29** (1845), 54–57.
- [14] Г. Н. Чеботарёв, *К проблеме резольвент*, Учен. зап. Казанского ун-та, **114**:2 (1954), 189–193.
- [15] J. Dixmier, *Histoire du 13^e problème de Hilbert*, in: Analyse diophantienne et géométrie algébrique, Cahiers Sémin. Hist. Math., Sér. 2, vol. 3, Univ. Paris VI, Paris, 1993, 85–94.
- [16] C. J. Earle, I. Kra, *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces*, in: Contributions to Analysis. A collection of papers dedicated to L. Bers, Acad. Press, New York, 1974, 107–124.
- [17] C. J. Earle, I. Kra, *On sections of some holomorphic families of closed Riemann surfaces*, Acta Math., **137**:1–2 (1976), 49–79.
- [18] G. Eisenstein, *Über eine merkwürdige identische Gleichung*, J. Reine Angew. Math., **27** (1844), 105–106 (см. также: Mathematische Werke, Band I, Chelsea, New York, 1975, 1989).
- [19] E. Fadell, L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand., **10** (1962), 111–118.

- [20] Y. Feler, *Configuration spaces of tori*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **18**:2 (2007), 139–151.
- [21] Y. Feler, *Spaces of geometrically generic configurations*, J. Eur. Math. Soc., **10**:3 (2008), 601–624.
- [22] L. R. Ford, *Automorphic Functions*, Chelsea, 1951.
- [23] Е. А. Горин, В. Я. Лин, *Группа кос и алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами*, УМН, **24**:2 (1969), 225–226.
- [24] Е. А. Горин, В. Я. Лин, *Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос*, Мат. сб., **78**:4 (1969), 579–610.
- [25] J. H. Hubbard, *Sur la non-existence de sections analytiques à la courbe universelle de Teichmüller*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **274** (1972), A978–A979.
- [26] J. H. Hubbard, *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mem. Amer. Math. Soc., **4**:166 (1976).
- [27] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1: Teichmüller theory*, Matrix Edition, Ithaca, NY, 2006.
- [28] Ш. И. Калиман, *Голоморфная универсальная накрывающая пространства полиномов без кратных корней*, Функц. анализ и его прил., **9**:1 (1975), 71.
- [29] Ш. И. Калиман, *Голоморфные эндоморфизмы многообразия комплексных полиномов с дискриминантом 1*, УМН, **31**:1 (1976), 251–252.
- [30] Ш. И. Калиман, *Голоморфная универсальная накрывающая пространства полиномов без кратных корней*, в сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 25, ХГУ, Харьков, 1977, 25–35.
- [31] Ш. И. Калиман, *Голоморфные эндоморфизмы комплексных камер Вейля серии D_n* , УМН, **34**:2 (1979), 201–202.
- [32] Sh. I. Kaliman, *The holomorphic universal covers of polynomials without multiple roots*, Selecta Math. Soviet., **12**:4 (1993), 395–405.
- [33] А. Г. Хованский, *О представимости алгеброидных функций суперпозициями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной*, Функц. анализ и его прил., **4**:2 (1970), 74–79.
- [34] А. Г. Хованский, *О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде*, УМН, **59**:4 (2004), 69–146.
- [35] А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде*, МЦНМО, Москва, 2008.
- [36] Ф. Клейн, *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*, Наука, Москва, 1989.
- [37] В. Я. Лин, *Алгеброидные функции и голоморфные элементы гомотопических групп комплексного многообразия*, ДАН СССР, **201**:1 (1971), 28–31.
- [38] В. Я. Лин, *О представлениях группы кос перестановками*, УМН, **27**:3 (1972), 192.
- [39] В. Я. Лин, *Алгебраические функции с универсальным дискриминантным многообразием*, Функц. анализ и его прил., **6**:1 (1972), 81–82.
- [40] В. Я. Лин, *О суперпозициях алгебраических функций*, Функц. анализ и его прил., **6**:3 (1972), 77–78.
- [41] В. Я. Лин, *Представления кос перестановками*, УМН, **29**:1 (1974), 173–174.
- [42] В. Я. Лин, *Суперпозиции алгебраических функций*, Функц. анализ и его прил., **10**:1 (1976), 37–45.
- [43] В. Я. Лин, *Косы Артина и связанные с ними группы и пространства*, в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 17, ВИНТИ, М., 1979, 159–227.
- [44] В. Я. Лин, *Лиувиллевские накрытия комплексных пространств и аменабельные группы*, Матем. сб., **132(174)**:2 (1987), 202–224.

- [45] V. Ya. Lin, *Around the 13th Hilbert problem for algebraic functions*, in: Proc. of the Hirzebruch 65 Conf. on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conference Proc., vol. 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, 307–327.
- [46] V. Ya. Lin, *Braids, Permutations, Polynomials-I*, Max-Planck-Institut für Math., Preprint MPI 96-118, 1996.
- [47] V. Ya. Lin, M. G. Zaidenberg, *Liouville and Carathéodory coverings in Riemannian and complex geometry*, in: Voronezh Winter Mathematical School, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 111–130.
- [48] V. Ya. Lin, *Configuration Spaces of $\mathbb{C}$ and $\mathbb{CP}^1$: Some Analytic Properties*, Max-Planck-Institut für Math., Preprint MPI 96-118, 2003.
- [49] V. Ya. Lin, *Braids and Permutations*, <http://arxiv.org/abs/math/0404528v1>.
- [50] V. Ya. Lin, *Configuration Spaces of $\mathbb{C}$ and $\mathbb{CP}^1$: Some Analytic Properties*, <http://arxiv.org/abs/math/0403120v3>.
- [51] А. А. Марков, *Основы алгебраической теории кос*, в кн.: Труды МИАН, т. 16, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1945.
- [52] В. В. Морозов, *О некоторых вопросах проблемы резольвент*, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та, **114**:2 (1954), 173–187.
- [53] B. Segre, *The algebraic equations of degrees 5, 9, 157, ..., and the arithmetics upon an algebraic variety*, Ann. of Math., **46** (1945), 287–301.
- [54] B. Segre, *Arithmetical questions on algebraic varieties*, Athlorn Press, London, 1951.
- [55] N. G. Tschebotaröw, *Über ein algebraisches Problem von Herren Hilbert*, Math. Ann., **104**:1 (1931), 459–471.
- [56] N. G. Tschebotaröw, *Über ein algebraisches Problem von Herren Hilbert-II*, Math. Ann., **105**:1 (1931), 240–255.
- [57] N. G. Tschebotaröw, *Über das Klein-Hilbertsche Resolventenproblem*, Изв. Казанск. физ.-мат. общ., **6** (1932-1933), 5–22.
- [58] Н. Г. Чеботарёв, *Проблема резольвент и критические многообразия*, Изв. АН СССР, сер. матем.; Собр. соч., т. 1, стр. 305–326, **7** (1943), 123–146.
- [59] В. А. Васильев, *Когомологии группы кос и сложность алгоритмов*, Функц. анализ и его прил., **22**:3 (1988), 15–24.
- [60] В. А. Васильев, *Топология дополнений к дискриминантам*, Фазис, М., 1997.
- [61] A. G. Vitushkin, *On representation of functions by means of superpositions and related topics*, Monographie No. 25 de l'Enseignement Mathématique. Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, No. 6, Enseignement Mathématique Université de Genève, Genève, 1978.
- [62] А. Г. Витушкин, *13-я проблема Гильберта и смежные вопросы*, УМН, **59**:1 (2004), 11–24.
- [63] A. Wiman, *Über die Anwendung der Tschirnhausentransformation auf die Reduktion algebraischer Gleichungen*, Nova Acta R. Soc. Sci. Uppsalientis, vol. extra ordin. editum, 1927, 3–8.
- [64] В. М. Зинде, *Аналитические свойства пространств регулярных орбит групп Кокстера серий B и D*, Функц. анализ и его прил., **11**:1 (1977), 69–70.
- [65] В. М. Зинде, *Голоморфные отображения пространств регулярных орбит групп Кокстера серий B и D*, Сиб. мат. журнал, **18**:5 (1978), 1015–1026.