Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Л. Фейгин, Абелианизация БГГ-резольвенты представлений алгебры Вирасоро, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 4, 72–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:09:56

Абелианизация БГГ-резольвенты представлений алгебры Виасоро*

© 2011. Б. Л. Фейгин

Памяти В. И. Арнольда

В работе строится резольвента, позволяющая вычислять t -характер представлений алгебры Виасоро из $(2, 2p + 1)$ -моделей, т. е. характеры присоединенных градуированных пространств относительно фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

§1. Введение

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли. На ее универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{a})$ имеется фильтрация Пуанкаре–Биркгофа–Витта, а присоединенная градуированная алгебра есть кольцо полиномов, т. е. $S^\bullet(\mathfrak{a})$. Аналогичная фильтрация есть на представлении π алгебры $\mathfrak{a}$, в котором фиксирован циклический вектор v . А именно, $F_0 = \{v\}$, $F_{i+1} = F_i + \mathfrak{a}F_i$. Присоединенное градуированное пространство π^{ab} естественным образом наделяется структурой представления над алгеброй $S^\bullet(\mathfrak{a})$. Такую конструкцию, т. е. переход от π к π^{ab} , мы будем называть абелианизацией. Выяснение структуры пространства π^{ab} — обычно довольно сложная задача. Случай $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n$ разобран в работе [6].

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Виасоро и π — неприводимое представление из $(2, 2p+1)$ -минимальной модели, p — натуральное число. Тогда представление π^{ab} имеет простое и явное описание (см. [4]). Зафиксируем в алгебре Виасоро базис L_i , $i \in \mathbb{Z}$. После абелианизации L_i^{ab} коммутируют, и пусть $a(z) = \sum L_i^{\text{ab}} z^{-i}$. На π^{ab} ток $a(z)$ удовлетворяет соотношению $a(z)^p = 0$. Более точно, операторы L_i^{ab} действуют на π^{ab} нулем, если $i \geq 0$, $\pi^{\text{ab}} \simeq \mathbb{C}[L_{-1}^{\text{ab}}, L_{-2}^{\text{ab}}, \dots]/J$, где идеал J порожден элементами $(L_{-1}^{\text{ab}})^s$, $s < p$, и $\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p = r} L_{\alpha_1}^{\text{ab}} \dots L_{\alpha_p}^{\text{ab}}$, $r \in \mathbb{Z}$, число s зависит от выбора неприводимого представления из минимальной модели (их всего p штук).

В теории представлений пространство π^{ab} появляется неожиданным образом при изучении интегрируемых $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ -модулей. Выберем в $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ стандартный базис $\{e, h, f\}$, а в $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ — базис $e(z)$, $h(z)$, $f(z)$; $e(z) = \sum e_i z^{-i}$. Пусть R — неприводимое интегрируемое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ уровня $k \geq 0$. На R ток $e(z)$ удовлетворяет соотношению $e(z)^{k+1} = 0$. Обозначим через $R^{\text{sub}}[e_i]$ -подмодуль в R , порожденный старшим вектором. Оказывается, что $R^{\text{sub}} \simeq \mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \dots]/J$, где J — тот же идеал, по которому мы факторизовали $\mathbb{C}[L_{-1}^{\text{ab}}, L_{-2}^{\text{ab}}, \dots]$ (L_{-i}^{ab} надо заменить на e_i); число s зависит от выбора интегрируемого модуля уровня k .

*Работа частично поддержана грантами РФФИ-CNRS-09-02-93-106 и грантом научных школ 34-72.2008.2.

Представления алгебры Вирасоро из минимальных моделей многими свойствами похожи на интегрируемые модули над алгебрами Каца–Мули. В частности, они имеют резольвенты типа Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда, составленные из модулей Верма. Наличие резольвенты позволяет написать формулу для характера неприводимого представления (см. [7]). Например, формула для характера вакуумного представления π из минимальной модели выглядит так:

$$\chi(\pi) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{q^{2i+(p+2)i(i-1)/2} (1 - q^{2i+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots}.$$

В абелианизированной ситуации тоже можно написать формулу для характера. Для факторпространства

$$\pi^{\text{ab}} = \mathbb{C}[e_{-2}, e_{-3}, \dots]/J, \quad J = \left\{ \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p = r} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_p} \right\}, \quad r \in \mathbb{Z},$$

формула выглядит следующим образом. Введем на π^{ab} две градуировки, положив $\deg_1 e_{-i} = i$, $\deg_2 e_{-i} = 1$; тогда

$$\pi^{\text{ab}} = \bigoplus \pi^{\text{ab}}[\alpha, \beta], \quad \chi(\pi^{\text{ab}}) = \sum q^{\alpha} t^{\beta} \dim \pi^{\text{ab}}[\alpha, \beta],$$

$$\begin{aligned} \chi(\pi^{\text{ab}}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{t^{2i} q^{2i+(k+3)i(i-1)/2}}{(1 - q^{i+1}t) \dots (1 - q^{2i}t)} \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^i)} \\ \times \frac{1}{(1 - q^{2(i+1)}t)(1 - q^{2(i+1)+1}t) \dots}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Видно, что $\chi(\pi^{\text{ab}})$ — это t -деформация характера $\chi(\pi)$. Подстановка $t = 1$ в $\chi(\pi^{\text{ab}})$ дает $\chi(\pi)$.

Формулу (1.1) можно доказывать по-разному. Самое известное доказательство опирается на идеи Шура, и его можно найти в книге Эндрюса [1]. Другое рассуждение — геометрическое. Формулу для $\chi(\pi^{\text{ab}})$ можно проинтерпретировать как формулу Лефшеца, вычисляющую знакопеременную сумму характеров действия тора на пространствах когомологий некоторого линейного расслоения. Пусть Gr — аффинный грассманиан, отвечающий алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, m — неподвижная точка максимального тора, отвечающая единице в группе Вейля, Sh — орбита точки m при действии группы токов в группу нильпотентных матриц (алгебра Ли этой группы порождена e_i), $\overline{Sh}$ — замыкание Sh в Gr . Тогда π^{ab} — это двойственное пространство к пространству сечений расслоения ξ^k , ограниченного на $\overline{Sh}$, где ξ — стандартное линейное расслоение на Gr . Ограничение расслоения ξ^k на $\overline{Sh}$ не имеет высших когомологий. Формула Лефшеца для характера представления π^{ab} — это сумма по неподвижным точкам, а вклады совпадают с отдельными членами в формуле (1.1) ([2], [3]).

В этой работе мы предлагаем интерпретацию характера представления π^{ab} как эйлеровой характеристики некоторого комплекса, который есть не что иное, как абелианизация БГГ-резольвенты.

Рассмотрим частный случай $p = 2$, $s = 0$, т. е. фактор

$$\pi^{\text{ab}} = \mathbb{C}[e_{-2}, e_{-3}, \dots]/\{S_j\}, \quad S_j = \sum_{\alpha + \beta = j} e_{\alpha} e_{\beta}.$$

Таким образом, π^{ab} — фактор кольца многочленов от бесконечного числа переменных по идеалу, порожденному набором квадратичных полиномов. Если бы система $\{S_j\}$ была бы регулярной, то можно было бы построить резольвенту представления π^{ab} стандартной в коммутативной алгебре конструкцией как комплекс Кошуля. Однако набор $\{S_j\}$ весьма далек от регулярной последовательности. Тем не менее конструкцию комплекса Кошуля можно модифицировать следующим образом. Добавим к алгебре $\mathbb{C}[e_{-2}, e_{-3}, \dots]$ фермионы $\psi_{-4}, \psi_{-5}, \dots$. Определим на алгебре $\mathbb{C}[\psi_{-4}, \psi_{-5}, \dots; e_{-2}, e_{-3}, \dots]$ дифференциал Q , $Q(\psi_\alpha) = S_\alpha$. Нулевые гомологии этого комплекса будут изоморфны π^{ab} , но будут и высшие гомологии. Профакторизуем $\mathbb{C}[\psi_{-4}, \psi_{-5}, \dots; e_{-2}, e_{-3}, \dots]$ по квадратичным соотношениям

$$\psi(z)\psi'(z), \quad \psi(z)\psi'''(z), \quad e(z)\psi'(z) - 2e'(z)\psi(z).$$

Здесь $\psi(z) = \sum \psi_i z^{-i}$ и $'$ означает производную по z . Нулевые гомологии после факторизации не изменятся, а старшие исчезнут. Наш основной результат состоит в том, что такая конструкция совпадает с абелианизацией БГГ-резольвенты. Формула (1.1) (при $p = 2$) получается как эйлерова характеристика профакторизованного комплекса Кошуля.

Минимальные модели типа $(2, 2p + 1)$ проще общих (p, q) -моделей во многих отношениях. Для всех представлений из минимальных теорий алгебры Вирасоро существуют двусторонние резольвенты Фельдера [5]. Члены этих резольвент — фоковские пространства, а дифференциалы конструируются с помощью скринингов. В случае $(2, 2p + 1)$ -модели эта конструкция очень упрощается, и мы ее приводим в §2. Такие комплексы суть представления некоторой решеточной вертекс-операторной алгебры V_p . В V_p мы выделяем подалгебру W_p , порожденную алгеброй Вирасоро и антикоммутирующим током. Резольвенты типа БГГ — представления этой подалгебры. После абелианизации представления W_p превращаются в профакторизованные комплексы Кошуля.

В §3 мы изучаем абелианизацию вертекс-операторной алгебры W_p , т. е. некоторую суперкоммутативную вертексную алгебру и ее представления. Мы показываем, что профакторизованные комплексы Кошуля имеют нетривиальные гомологии только в градуировке 0. В этой статье мы не занимаемся всеми представлениями из $(2, 2p + 1)$ -модели, в основном мы ограничиваемся только случаем вакуумного представления. Общий случай рассматривается аналогично.

Я благодарен М. А. Берштейну и Е. Б. Фейгину за обсуждения и помощь.

§2. Комплексы Фельдера $(2, 2p + 1)$ -минимальных моделей алгебры Вирасоро

Напомним, что комплексы Фельдера $(2, 2p + 1)$ -минимальных моделей суть представления некоторой решеточной вертекс-операторной алгебры V_p . Проще всего построить V_p как подалгебру в алгебре Клиффорда C_p . Генераторы алгебры C_p — это токи $\psi_1(z), \dots, \psi_{2p+1}(z)$ и $\psi_1^*(z), \dots, \psi_{2p+1}^*(z)$, которые удовлетворяют стандартным соотношениям

$$[\psi_\alpha(z), \psi_\beta(w)]_+ = 0, \quad [\psi_\alpha^*(z), \psi_\beta^*(w)]_+ = 0, \quad [\psi_\alpha(z), \psi_\beta^*(w)]_+ = \delta_{\alpha,\beta}(z/w),$$

где через $[\cdot, \cdot]_+$ обозначен антикоммутатор. Алгебра V_p — подалгебра в C_p , порожденная токами $\theta_p(z) = \psi_1(z) \cdots \psi_{2p+1}(z)$ и $\theta_p^*(z) = \psi_1^*(z) \cdots \psi_{2p+1}^*(z)$. Легко

видеть, что

$$\frac{\theta_p(z)\theta_p(w)}{(z-w)^{2p+1}} = \frac{\theta_p(w)\theta_p(z)}{(w-z)^{2p+1}},$$

операторы $\theta_p^*(z)$ удовлетворяют аналогичному соотношению и, кроме того,

$$\frac{1}{2p+1} \theta_p(z)\theta_p^*(w) = (z-w)^{-2p-1}I + (z-w)^{-2p}h(z) + (z-w)^{-2p+1}\bar{T}(z) + \dots, \quad (2.1)$$

где I — единичный оператор, $h(z)$ — ток, отвечающий алгебре Гейзенберга, а $\bar{T}(z)$ — ток, отвечающий алгебре Вирасоро. Алгебра V_p естественным образом градуирована: $\deg \theta_p(z) = 1$, $\deg \theta_p^*(z) = -1$. Категория ее представлений полупроста, имеется $2p+1$ неприводимых представлений $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_{2p}$. Представление $\mathcal{R}_j$ характеризуется тем, что в нем имеется вакуумный вектор v_j , такой, что $\theta_p[s]v_j = 0$, $s \geq j$, где $\theta_p(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \theta_p[s]z^{-s}$; $\mathcal{R}_0$ — вакуумное представление алгебры V_p . Неприводимые представления $\mathcal{R}_j$ наследуют градуировку. Положим $S = \theta_p^*[0]$. Ясно, что $S^2 = 0$ и поэтому каждое $\mathcal{R}_j$ является комплексом с дифференциалом степени -1 , равным S . В алгебре V_p есть две важные подалгебры: Гейзенберга и Вирасоро, которые появлялись в операторном произведении (2.1); $h(z) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=1}^{2p+1} : \psi_i(z) \psi_i^*(z) :$, $\bar{T}(z) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=1}^{2p+1} : \psi_i'(z) \psi_i^*(z) :$. Алгебру Вирасоро можно продеформировать: $T(z) = \bar{T}(z) + \beta h'(z)$, где β — некоторое комплексное число, так, чтобы ток $T(z)$ коммутировал с оператором S . Центральный заряд этой алгебры Вирасоро равен $1 - 3(2p-1)/(2p+1)$. Теорема Фельдера утверждает, что каждый комплекс $\mathcal{R}_j$ имеет ненулевые гомологии только в одной степени, причем пространство гомологий — неприводимое представление алгебры Вирасоро из $(2, 2p+1)$ -модели. Пространства $\mathcal{R}_j$ с дифференциалом S называются комплексами Фельдера.

Рассмотрим в V_p подалгебру W_p , порожденную алгеброй Вирасоро $T(z)$ и оператором $\theta_p(z)$. Заметим, что в терминологии конформной теории поля $\theta_p(z)$ — это примарное поле типа $\phi_{3,1}$. Алгебра W_p — расширение алгебры Вирасоро посредством поля $\phi_{3,1}$. Вакуумное представление алгебры W_p — подпространство в $\mathcal{R}_0$, порожденное из старшего вектора операторами из W_p . Обозначим это вакуумное представление через Vac_p . Из результатов Фельдера легко можно получить структуру Vac_p как модуля над алгеброй Вирасоро. Пусть M_λ — модуль Верма над алгеброй Вирасоро со старшим весом λ (центральный заряд зафиксирован и равен $1 - 3(2p-1)/(2p+1)$). Если $\lambda = \lambda_i = pi(i+1) + i(i-1)/2$, то модуль M_{λ_i} имеет особый вектор на уровне $2i+1$. Обозначим через $\bar{M}_i$ фактор модуля M_{λ_i} по подмодулю, порожденному этим особым вектором. Его характер равен

$$q^{pi(i+1)+i(i-1)/2} \frac{(1-q^{2i+1})}{\prod_{i>0}(1-q^i)}. \quad (2.2)$$

Предложение 2.1. *Представление Vac_p как модуль над алгеброй Вирасоро изоморфно $\bigoplus_{i>0} \bar{M}_i$.*

Алгебра W_p — дифференциальная вертекс-операторная алгебра. Дифференциал — это суперкоммутатор с оператором S . Операция суперкоммутирования дифференцирует операторное произведение. Отметим, что суперкоммутатор оператора S с $\theta_p(z)$ является потомком тока $T(z)$. Этот потомок отвечает

особому вектору в вакуумном представлении из $(2, 2p + 1)$ -модели алгебры Вирасоро. Из этого следует, что W_p — дифференциальная подалгебра в V_p .

Заметим, что Vas_p — дифференциальный модуль над W_p . Дифференциал S коммутирует с действием алгебры Вирасоро и потому получается комплекс

$$R_0: 0 \leftarrow \bar{M}_0 \leftarrow \bar{M}_1 \leftarrow \bar{M}_2 \leftarrow \dots$$

Предложение 2.2. *Комплекс R_0 имеет нетривиальные гомологии только в нулевом члене. Пространство гомологий изоморфно вакуумному представлению из $(2, 2p + 1)$ -модели.*

Замечание 2.3. Комплекс R_0 является версией резольвенты Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда для алгебры Вирасоро. Напомним, что для интегрируемых представлений алгебр Каца–Мути имеются резольвенты, составленные их параболических модулей Верма. Комплекс R_0 — это аналог такой резольвенты.

Введем теперь на алгебре W_p фильтрацию, аналогичную фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта на универсальных обертывающих алгебрах алгебр Ли. Положим $F_0(W_p) \simeq \mathbb{C}$, $F_1(W_p) = \mathbb{C} \oplus \{T(z), \theta_p(z)\}$ и $F_i(W_p) = F_1(W_p) \cdot F_{i-1}(W_p)$ (точка здесь — операторное произведение). Символом W_p^{ab} мы обозначим присоединенную градуированную алгебру; это вертекс-операторная алгебра в том смысле, что на W_p^{ab} имеется структура операторного произведения.

§3. Суперкоммутативные дифференциальные вертекс-операторные алгебры

Простейший пример суперкоммутативной дифференциальной вертекс-операторной алгебры — полубесконечный комплекс Кошуля K . В нем (в соответствующей вертексной алгебре) имеется два генератора: $\psi(z)$, $a(z)$, причем $[\psi(z)\psi(w)]_+ = 0$, $[a(z), a(w)] = 0$, $[\psi(z), a(w)] = 0$, дифференцирование Q задается формулами $Q\psi(z) = a(z)$, $Qa(z) = 0$. Заметим, что в K есть стягивающая гомотопия — это «обратный дифференциал», т. е. дифференцирование B , такое, что $Ba(z) = \psi(z)$, $B\psi(z) = 0$, $[Q, B]_+ = 1$. Определим представление $V(K)$ алгебры K как представление, индуцированное с тривиального представления подалгебры $\{a_i, \psi_i, i \geq -1\}$, $a(z) = \sum a_i z^{-i}$, $\psi(z) = \sum \psi_i z^{-i}$. Представление $V(K)$ мы будем называть вакуумным. Операторы Q и B действуют на $V(K)$, гомологии оператора Q изоморфны $\mathbb{C}$, гомологии оператора B также одномерны.

Алгебру K можно профакторизовать по дифференциальному идеалу, не изменяя гомологий. А именно, положим

$$K_{(1)} = K / \{\psi(z)\psi'(z), a(z)\psi'(z) - a'(z)\psi(z)\}.$$

Заметим, что $Q(\psi(z)\psi'(z)) = a(z)\psi'(z) - a'(z)\psi(z)$. Идеал в K , порожденный элементами $\psi(z)\psi'(z)$, $a(z)\psi'(z) - a'(z)\psi(z)$, устойчив относительно дифференцирования B , а потому гомологии алгебры $K_{(1)}$ изоморфны $\mathbb{C}$.

Теорема 3.1. *Алгебры $K_{(1)}$ и W_1^{ab} изоморфны.*

При $p = 1$ центральной заряд алгебры Вирасоро равен 0. Гомологии представления Vas_1 — вакуумного представления алгебры W_1 — изоморфны $\mathbb{C}$. Отметим, что в этом случае операторы $\theta_1(z)$ и $\theta_1^*(z)$ порождают $(N=2)$ -супералгебру. Суперкоммутатор операторов $\theta_1(z)$ и $\theta_1^*(z)$ — линейная комбинация операторов из алгебры Гейзенберга и алгебры Вирасоро, которые тоже

лежат в $(N=2)$ -супералгебре. Суперкоммутатор оператора $\theta_1(z)$ с S есть в точности $T(z)$, т.е. ток, отвечающий алгебре Вирасоро. Ток $\theta_1(z)$ — произведение трех фермионов и потому $\theta_1(z)\theta'_1(z) = 0$, а значит, $[S, \theta_1(z)\theta'_1(z)] = T(z)\theta'_1(z) - \theta_1(z)T'(z) = 0$. Это соотношение, связывающее операторы $T(z)$ и $\theta_1(z)$, вытекает из того, что $\theta_1(z)$ — примарное поле типа $\phi_{3,1}$. После перехода к присоединенной градуированной алгебре соотношения, которым удовлетворяют операторы $\theta_1(z)$ и $T(z)$, переходят в соотношения в алгебре $K_{(1)}$ между операторами $\psi(z)$ и $a(z)$. Определим теперь для алгебры $K_{(1)}$ аналог вакуумного представления $V(K_{(1)})$, которое есть фактор представления $V(K)$ по подпространству $\psi(z)\psi'(z)V(K) + Q(\psi(z)\psi'(z))V(K)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что характеры представлений Vac_1 и $V(K_{(1)})$ совпадают. Для этого мы построим мономиальный базис в пространстве $V(K_{(1)})$. Алгебра $K_{(1)}$ градуирована: $\deg \psi(z) = 1$, $\deg a(z) = 0$, поэтому градуировано и представление $V(K_{(1)}) = \bigoplus_{j \geq 0} V[j]$.

Лемма 3.2. *Следующий набор векторов порождает пространство $V[j]$:*

$$\psi_{\alpha_{j-1}} \psi_{\alpha_{j-2}} \cdots \psi_{\alpha_1} \psi_{-2} \cdot a_{-2-j+1}^{s_2} a_{-3-j+1}^{s_3} \cdots a_{-l-j+1}^{s_l} v,$$

где $l > 2$, $s_j \geq 0$, $\alpha_1 \leq -5$, $\alpha_i - \alpha_{i-1} \leq -3$, и

$$\psi_{\beta_j} \psi_{\beta_{j-1}} \cdots \psi_{\beta_1} \cdot a_{-2-j}^{s_2} a_{-3-j}^{s_3} \cdots a_{-l-j}^{s_l} v,$$

где $l > 2$, $s_j \geq 0$, $\beta_1 \leq -3$, $\beta_i - \beta_{i-1} \leq -3$.

Для доказательства нужно воспользоваться соотношениями в алгебре $K_{(1)}$: любой моном можно выразить через указанные в лемме. Вакуумное представление Vac_1 тоже градуировано, и характер компоненты $\text{Vac}_1[j]$ равен $q^{(3j^2+j)/2} (1 - q^{2j+1}) / \prod_{i>0} (1 - q^i)$ (см. (2.2) при $p = 1$). Характер пространства $V[j]$ не может быть меньше характера пространства $\text{Vac}_1[j]$ (точнее, каждый коэффициент в характере $\sum c_m q^m$ пространства $V[j]$ больше или равен соответствующему коэффициенту в характере пространства $\text{Vac}_1[j]$). С другой стороны, если подсчитать характер комбинаторных данных в лемме, то получится в точности характер пространства $\text{Vac}_1[j]$.

Перейдем теперь к случаю $p > 1$. Алгебра $K_{(p)}$ определяется так:

$$K_{(p)} = K/J_p,$$

где идеал J_p порожден элементами $\psi(z)\psi^{(r)}(z)$, $r < 2p$, и $a(z)\psi'(z) - pa'(z)\psi(z)$ ($\psi^{(r)}(z)$ обозначает r -ю производную). Снабдим алгебру $K_{(p)}$ дифференциалом Q , положив $Qa(z) = 0$, $Q\psi(z) = a(z)^p$.

Лемма 3.3. *Дифференциал Q определен корректно, иными словами идеал J_p устойчив относительно действия Q .*

Эта лемма проверяется прямым вычислением. Например, возьмем соотношение $\psi(z)\psi'(z) = 0$ и применим к нему дифференциал Q :

$$Q(\psi(z)\psi'(z)) = a(z)^p \psi'(z) - \psi(z)(a^p(z))' = a^{p-1}(z)(a(z)\psi'(z) - p\psi(z)a'(z)).$$

Это значит, что $Q(\psi(z)\psi'(z)) \in J_p$.

Теорема 3.4. $K_{(p)}$ и W_p^{ab} изоморфны как дифференциальные градуированные суперкоммутативные вертекс-операторные алгебры.

Мы покажем сначала, что вакуумное представление алгебры $K_{(p)}$ — это комплекс, имеющий нетривиальные гомологии только в нулевой градуировке. Вакуумное представление алгебры $K_{(p)}$ определяется условиями зануления вакуумного вектора; $V(K_{(p)})$ порождено вектором v , таким, что $a_i v = 0$ при $i > -2$, $\psi_i v = 0$ при $i > -2p$. Аналогичные условия зануления выполняются для вакуумного представления алгебры W_p .

Нам понадобится следующая абелианизация вакуумного представления из $(2, 2p + 1)$ -модели. В вертексной алгебре алгебры Вирасоро при $c = 1 - 3(2p - 1)/(2p + 1)$ есть поле $T^{(p)}(z)$, отвечающее особому вектору на уровне $2(p + 1)$. Профильтруем вертексную алгебру так: $F_1 = \{\mathbb{C} + T(z) + T^{(p)}(z)\}$. На вакуумном представлении индуцируется фильтрация. Опишем теперь присоединенную градуированную алгебру.

Пусть $A = \mathbb{C}[b_{-2}, b_{-3}, \dots]$ — кольцо многочленов от бесконечного числа переменных, $b(z) = \sum_{i \geq 2} b_{-i} z^i$, $b(z)^p = z^{2p} b_{-2}^p + \dots = \sum_{\alpha \geq 2p} z^\alpha b_{-\alpha}^{[p]}$. Введем в A фильтрацию, положив $F_0 \simeq \mathbb{C}$, $F_1 = F_0 + \{b_i, b_j^{[p]}\}$, $F_s = F_1 \cdot F_{s-1}$, и пусть A_p^{gr} — присоединенная градуированная алгебра. Образующие алгебры A_p^{gr} — это токи $\bar{b}(z) = \sum_{i \geq 2} \bar{b}_{-i} z^i$ и $c(z) = \sum_{j \geq 2p} c_{-j} z^j$, они отвечают элементам $b(z)$ и $b(z)^p$ в алгебре A .

Лемма 3.5. *Определяющие соотношения в алгебре A_p^{gr} выглядят так:*

$$\bar{b}(z)^p = 0, \quad p \bar{b}'(z) c(z) = \bar{b}(z) c'(z).$$

Заметим, прежде всего, что в алгебре A_p^{gr} эти соотношения выполняются. Разберем теперь случай $p = 2$. Соотношения в A_2^{gr} квадратичны, а потому можно указать мономиальный базис. Ситуация напоминает то, с чем мы встречались в доказательстве теоремы 3.1. Там в алгебре $K_{(1)}$ операторы $\psi(z)$ и $a(z)$ удовлетворяли квадратичным соотношениям похожего вида. Градуируем A_2^{gr} — положим $\deg c(z) = 0$, $\deg \bar{b}(z) = 1$, $A_2^{\text{gr}} = \bigoplus_{j \geq 0} A_2^{\text{gr}}[j]$. Компонента $A_2^{\text{gr}}[j]$ порождается следующими мономами:

$$\bar{b}_{-2} \bar{b}_{\alpha_1} \bar{b}_{\alpha_2} \cdots \bar{b}_{\alpha_{j-1}} \cdot c_{-2p-j+1}^{s_0} c_{-2p-1-j+1}^{s_1} \cdots c_{-2p-l-j+1}^{s_l},$$

где $l \geq 0$, $s_j \geq 0$, $\alpha_1 \leq -4$, $\alpha_i - \alpha_{i-1} \leq -2$, и

$$\bar{b}_{\beta_1} \bar{b}_{\beta_2} \cdots \bar{b}_{\beta_j} \cdot c_{-2p-j}^{s_0} c_{-2p-1-j}^{s_1} \cdots c_{-2p-l-j}^{s_l},$$

где $l \geq 0$, $s_j \geq 0$, $\beta_1 \leq -3$, $\beta_i - \beta_{i-1} \leq -2$. Характер пространства A_2^{gr} не может быть меньше $(1 - q^2)^{-1} (1 - q^3)^{-1} \dots$ (это характер пространства A). С другой стороны характер указанных выше комбинаторных данных в точности равен характеру пространства A . Действительно, если подсчитать характер пространства $A_2^{\text{gr}}[j]$, предполагая, что все мономы линейно независимы, то получится

$$\frac{q^{j(j+1)} (1 - q^j) (1 - q^{j+1}) (1 - q^{2j+1})}{\prod_{i \geq 1} (1 - q^i)}.$$

Наше утверждение вытекает из легко проверяемого тождества, а именно

$$\sum_{j \geq 0} q^{j(j+1)} (1 - q^j) (1 - q^{j+1}) (1 - q^{2j+1}) = 1 - q.$$

При общем p мономиальный базис указать трудно. Доказательство использует бесконечное тождество Гордона (т. е. тождество Гордона, в котором число частиц полагается равным бесконечности, см. [1]). Введем в алгебре A_2^{gr} фильтрацию, положив $F_0 = \mathbb{C}$, $F_1 = F_0 + \{\bar{b}(z), c(z), \bar{b}(z)c(z)\}$, $F_i = F_1 \cdot F_{i-1}$. Присоединенная градуированная алгебра порождается компонентами токов $b_1(z)$, $b_2(z)$ и $c(z)$, которые отвечают токам $\bar{b}(z)$, $\bar{b}(z)c(z)$ и $c(z)$ соответственно. Токи $b_1(z)$, $b_2(z)$ удовлетворяют мономиальным квадратичным соотношениям

$$\begin{aligned} b_1(z)^2 = 0, \quad b_1(z)b_2(z) = 0, \quad b'_1(z)b_2(z) = 0, \quad b_2(z)^2 = 0, \\ (b'_2(z))^2 = 0, \quad b_1(z)c(z) = 0, \quad b'_1(z)c(z) = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а кроме того, $3b'_2(z)c(z) - 2b_2(z)c(z) = 0$. Эти соотношения являются определяющими в присоединенной градуированной алгебре. Для того чтобы показать это, введем на алгебре с образующими $b_1(z)$, $b_2(z)$, $c(z)$ фильтрацию, взяв $\{\mathbb{C}, b_1(z), b_2(z), b_1(z)c(z), c(z)\}$ в качестве F_1 . В присоединенной градуированной алгебре этим токам будут отвечать образующие, которые мы обозначим через $b_1(z)$, $b_2(z)$, $b_3(z)$, $c(z)$. Эти образующие удовлетворяют квадратичным соотношениям, аналогичным (3.1). Эту процедуру «измельчения» можно продолжить бесконечное число раз, и в конце мы получим алгебру с образующими $b_i(z)$, $i = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$b_i(z)b_j^{(n)}(z) = 0, \quad i \leq j, n < 2i. \quad (3.2)$$

Токи $b_j(z)$ имеют следующие разложения: $b_j(z) = \sum_{l \leq -2j} b_j[l]z^{-l}$.

Формула Гордона (бесконечная) утверждает, что алгебра с образующими $b_j[m]$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям (3.2), имеет характер $\chi = \prod_{j>1} (1 - q^j)^{-1}$. Точнее говоря, χ — ряд Гильберта этой алгебры, если на ней ввести градуировку $\deg b_j[m] = -m$. Как следствие мы получаем, что все присоединенные градуированные алгебры суть алгебры с квадратичными соотношениями. Лемма теперь следует из того, что алгебру A_p^{gr} можно профильтровать аналогичным образом. Эту процедуру фильтрации можно применить бесконечное число раз, и на выходе как присоединенная градуированная алгебра получится та же самая алгебра с образующими $b_j[m]$ и соотношениями (3.2). Покажем, как это сделать в случае $p = 3$. Построим на A_3^{gr} фильтрацию, положив $F_1 = \{\mathbb{C}, \bar{b}(z), \bar{b}(z)^2, c(z)\}$. В присоединенной градуированной алгебре соответствующие образующие обозначим через $b_1(z)$, $b_2(z)$, $c(z)$. Эти образующие удовлетворяют квадратичным соотношениям (3.1).

Предложение 3.6. *Комплекс $V(K_{(p)})$ имеет ненулевые гомологии только в градуировке 0, причем характер пространства гомологий совпадает с характером вакуумного представления $(2, 2p + 1)$ -модели.*

Алгебра $K_{(p)}$ порождена генераторами $\psi(z)$, $a(z)$. Введем на ней фильтрацию: $F_1 = \{\mathbb{C}, \psi(z), a(z), a(z)^p\}$, $F_i = F_{i-1} \cdot F_1$. Присоединенная градуированная алгебра имеет образующие $\psi(z)$, $a(z)$, которые отвечают старым образующим, а также новую образующую $c(z)$, отвечающую $a(z)^p$. Дифференциал Q действует на $K_{(p)}^{\text{gr}}$ таким образом: $Q\psi(z) = c(z)$, $Qc(z) = Qa(z) = 0$. Определяющие

соотношения в алгебре $K_{(p)}^{\text{gr}}$ выглядят так:

$$\begin{aligned} a(z)^p &= 0, \quad pa'(z)c(z) = a(z)c'(z), \quad pa'(z)\psi(z) = a(z)\psi'(z), \\ \psi(z)\psi^{(r)}(z) &= 0, \quad c(z)\psi^{(r)}(z) - \psi(z)c^{(r)}(z) = 0, \quad r < 2p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что $Q(\psi(z)\psi^{(r)}(z)) = c(z)\psi^{(r)}(z) - \psi(z)c^{(r)}(z)$. Доказательство этого факта является некоторым усложнением доказательства леммы 3.5, и мы его опускаем.

Определим на алгебре $K_{(p)}^{\text{gr}}$ «обратный» дифференциал B формулами $B\psi(z) = 0$, $Ba(z) = 0$, $Bc(z) = \psi(z)$. Из вида соотношений в алгебре $K_{(p)}^{\text{gr}}$ вытекает, что дифференциал B определен корректно. А кроме того, подалгебра порожденная $\psi(z)$, $c(z)$, «стягиваема», т.е. гомологии дифференциала Q , суженные на эту подалгебру, изоморфны $\mathbb{C}$. Гомологии всего комплекса нетривиальны только в градуировке 0 и порождены током $a(z)$.

Все эти рассуждения можно применять как к самой вертексной алгебре $K_{(p)}^{\text{gr}}$, так и к ее представлениям, например, к $V(K_{(p)}^{\text{gr}})$. Получится, что гомологии $V(K_{(p)}^{\text{gr}})$ — это представление алгебры с образующей $a(z) = \sum a_i z^{-i}$, $a(z)^p = 0$, в нем имеется старший (вакуумный) вектор v , такой что $a_i v = 0$, $i \geq -1$. Таким образом, гомологии пространства $V(K_{(p)}^{\text{gr}})$ совпадают с абелианизацией вакуумного представления из $(2, 2p+1)$ -модели (см. введение).

Докажем теперь теорему 3.4. Нам осталось проверить, что характеры пространств $V(K_{(p)})$ и Vas_p совпадают. В случае $p = 1$ мы проверили это утверждение, явно указав мономиальный базис в $V(K_{(1)})$. В общем случае это делается точно так же, базис состоит из векторов

$$\psi_{\alpha_{j-1}} \psi_{\alpha_{j-2}} \cdots \psi_{\alpha_1} \psi_{-2p} \cdot a_{-2-j+1}^{s_2} a_{-3-j+1}^{s_3} \cdots a_{-l-j+1}^{s_l} v,$$

где $l > 2$, $s_j \geq 0$, $\alpha_1 \leq -4p-1$, $\alpha_i - \alpha_{i-1} \leq -2p-1$, и

$$\psi_{\beta_j} \psi_{\beta_{j-1}} \cdots \psi_{\beta_1} \cdot a_{-2-j}^{s_2} a_{-3-j}^{s_3} \cdots a_{-l-j}^{s_l} v,$$

где $l > 2$, $s_j \geq 0$, $\beta_1 < -2p$, $\beta_i - \beta_{i-1} \leq -2p-1$.

Алгебра $K_{(p)}$ может быть продеформирована, а именно, существует ее «разностная» версия. Зафиксируем число $t \neq 0$. При $p = 1$ положим $K_{(1)}(t) = K/J$ (напомним, что K порождена $a(z)$ и $\psi(z)$), где J — идеал, порожденный токами $\psi(z)\psi(z)$ и $Q(\psi(z)\psi(z)) = a(z)\psi(z) - \psi(z)a(z)$. Гомологии алгебры $K_{(1)}(t)$ одномерны, что доказывается посредством той же самой стягивающей гомотопии B . Если $p \geq 1$, то $K_{(p)}(t) = K/J_p$, где идеал J_p порожден $\psi(z)\psi(z)$, $\psi(z)\psi(z^2)$, $\dots$, $\psi(z)\psi(z^p)$, а также $a(z)\psi(z) - \psi(z)a(z)$; $K_{(p)}(t)$ — дифференциальная алгебра, дифференциал Q определяется равенствами $Q\psi(z) = a(z)a(tz) \cdots a(z)^p$, $Qa(z) = 0$.

Предложение 3.7. *Дифференциал Q на $K_{(p)}(t)$ определен корректно и имеет нетривиальные гомологии только в градуировке нуль. Алгебра гомологий порождена током $a(z)$, удовлетворяющим соотношению $a(z)a(tz) \cdots a(z)^p = 0$.*

Замечание 3.8. Комплекс Vas_p (подкомплекс комплекса Фельдера) — циклическое представление вертексной алгебры W_p . Точнее, Vas_p — это индуцированное представление, т.е. оно может быть описано как фактор W_p/I , где I — правый идеал, порожденный элементами L_i , $i \geq -1$, и $\theta_p[i]$, $i \geq -2p+1$.

(W_p здесь понимается как ассоциативная алгебра, т. е. алгебра, порожденная компонентами токов вертекс-операторной алгебры.) Условие зануления старшего вектора можно ослабить. Например, сделаем так: положим $Y_p = W_p/J$, где J — правый идеал, порожденный элементами L_i , $i \geq 0$, $\theta_p[i]$, $i \geq -p+1$, $L_0 - h$, где $h = -(p-1)(p-3)/(8p)$. Число h — это старший вес «серединного» представления T в таблице Каца старших весов неприводимых представлений из $(2, 2p+1)$ -модели, h — наименьший из всех старших весов в этой таблице. Дифференциал Q действует на Y_p . Комплекс Y_p — это резольвента представления T . Можно показать, что Y_p — это стандартная БГГ-резольвента представления T . Это означает, что комплекс

$$0 \leftarrow T \leftarrow Y_p[0] \leftarrow Y_p[1] \leftarrow \dots$$

ацикличесок и каждая компонента $Y_p[i]$, $i > 0$, есть прямая сумма двух модулей Верма, а $Y_p[0]$ изоморфна модулю Верма.

Заключение. Феномен, справедливый для представлений алгебры Вирасоро из $(2, 2p+1)$ -минимальной модели, имеет место и для многих других вертекс-операторных алгебр. Первый пример, в котором это нетрудно проверить, — это некоторые классы представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Более сложный случай — представления W -алгебр, например, модели типа $(3, p)$ алгебры W_3 . Абелианизация резольвент типа БГГ приводит к комплексам Кошуля, профакторизованным по относительно простым соотношениям. С точки зрения коммутативной алгебры это означает, что для некоторых алгебр, весьма далеких от полного пересечения, тем не менее существует аналог комплекса Кошуля. Наличие такого комплекса приводит к весьма неожиданным формулам для ряда Гильберта. Причину этого очень хотелось бы выяснить. Кроме того, построенный в этой работе комплекс хотелось бы проинтерпретировать геометрически как некий факт о грассманиане алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дж. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [2] B. Feigin, A. Stoyanovski, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold*, RIMS-942, <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9308079>.
- [3] Б. Л. Фейгин, А. В. Стояновский, *Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта*, Функци. анализ и его прил., **28:1** (1994), 68–90.
- [4] B. Feigin, E. Frenkel, *Coinvariants of nilpotent subalgebras of the Virasoro algebra and partition identities*, in: I. M. Gelfand Seminar, Adv. in Soviet Math., vol. 16, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 139–148.
- [5] G. Felder, *BRST approach to minimal models*, Nuclear Phys. B, **317:1** (1989), 215–236.
- [6] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n* , Transformation Groups, **16:1** (2011), 71–89.
- [7] A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, in: Vertex Operators in Mathematical Physics (Berkeley, Calif., 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 3, Springer-Verlag, New York, 1985, 451–473.