Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Сферичность и умножение двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 3, 79–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:57:34

УДК 517.986.4+512.58+517.984.4+512.546.4

Сферичность и умножение двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп*

© 2011. Ю. А. НЕРЕТИН

Памяти В. И. Арнольда

Мы строим сферические подгруппы в бесконечномерных классических группах G (как правило, они не симметрические, и их аналоги в конечномерном случае сферическими не являются). Предъявляется структура полугруппы на пространствах двойных классов смежности $L \backslash G / L$ для различных подгрупп L в G , причем эти полугруппы действуют в пространствах L -неподвижных векторов в унитарных представлениях групп G . Строятся также полугрупповые оболочки групп G , обобщающие конструкции операторных узлов.

§1. Введение

1.1. Определение сферичности. Пусть G — группа, $K \subset G$ — подгруппа. Неприводимое унитарное представление ρ группы G в гильбертовом пространстве H называется K -сферическим, если в H есть единственный с точностью до пропорциональности K -неподвижный вектор v . Сферическая функция сферического представления задается формулой

$$\Phi(g) = \langle \rho(g)v, v \rangle.$$

Пусть G — полупростая группа Ли, а K — ее компактная подгруппа. Пара (G, K) называется сферической, если любое неприводимое унитарное представление группы G содержит не более одного ненулевого K -неподвижного вектора. Говорят также, что K — сферическая подгруппа группы G .

Согласно теореме Гельфанда [5], симметрические подгруппы¹⁾ сферичны. В частности, сферичны максимальные компактные подгруппы конечномерных полупростых групп.

Кремер [12] классифицировал сферические пары (G, K) с простой группой G ; классификация была распространена на полупростые группы в [15] и [2]. Все такие пары получаются из симметрических пар (G, K) небольшим уменьшением подгруппы K или небольшим увеличением G . О сферических функциях для несимметрических пар см. работу Кнопа [10].

1.2. Бесконечномерные классические группы. Мы рассматриваем гильбертовы пространства l_2 над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и над кватернионами $\mathbb{H}$. Назовем матрицу g с элементами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ финитной, если матрица $g - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых элементов. Мы определяем бесконечномерные классические

*Поддержано грантом FWF P22122.

¹⁾Пусть G — группа, а σ — ее инволютивный автоморфизм, $\sigma^2 = 1$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ образует подгруппу, такие подгруппы называются симметрическими. Подробности и классификацию см. в [7].

группы $U(\infty), O(\infty), GL(\infty, \mathbb{R}), Sp(2\infty, \mathbb{R}), U(\infty, \infty), \dots$ как группы финитных матриц, удовлетворяющих обычным соотношениям. Все такие группы $G(\infty)$ являются индуктивными пределами соответствующих конечномерных групп $G(n)$,

$$Sp(2\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim Sp(2n, \mathbb{R}), \quad U(\infty, \infty) = \varinjlim U(n_1, n_2), \quad \dots$$

Мы считаем, что $G(n)$ канонически вложены в $G(\infty)$ и действуют на первые базисные векторы. Если мы рассматриваем группы типа $O(\infty, \infty)$ и т. п. или произведения групп, то n в $G(n)$ понимается как $n = (n_1, \dots)$.

1.3. Тяжелые группы. Ортогональная группа $O(\infty)$, унитарная группа $U(\infty)$ и кватернионно-унитарная группа $Sp(\infty)$ играют ту же роль, что компактные группы в конечномерной теории. Мы будем называть их *тяжелыми*. Для тяжелой группы K мы обозначим через K^α стабилизатор первых α базисных элементов в соответствующем ℓ_2 . Мы изображаем элементы из K^α как блочные $(\alpha + \infty) \times (\alpha + \infty)$ -матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, где $h \in K$.

Пусть ρ — унитарное представление тяжелой группы K в гильбертовом пространстве H . Обозначим через $H^{[\alpha]}$ подпространство K^α -неподвижных векторов.

Теорема 1.1 [25]. *Следующие условия равносильны:*

- ρ непрерывно относительно слабой топологии на K ;
- ρ непрерывно относительно равномерной топологии на K ;
- $\bigcup H^{[\alpha]}$ плотно в H ;
- ρ продолжается до представления полугруппы операторов в ℓ_2 с нормой¹⁾ ≤ 1 , снабженной слабой операторной топологией.

Если ρ неприводимо, то эти условия равносильны также условию

- $H^{[\alpha]} \neq 0$ для какого нибудь α .

Такие представления мы будем называть *непрерывными*. Описание непрерывных представлений содержится в [25], все они получаются тензорными операциями из простейшего представления группы K в ℓ_2 .

Конечные произведения тяжелых групп мы тоже будем называть *тяжелыми*. Если $K = K_1 \times \dots \times K_p$, то мы полагаем $K^\alpha := K_1^{\alpha_1} \times \dots \times K_p^{\alpha_p}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ — мультииндекс. *Неприводимые представления тяжелой группы $K = K_1 \times \dots \times K_p$ являются тензорными произведениями представлений групп K_j .*

1.4. Список Ольшанского. Следующий список состоит из пар $(G, K) =$ (классическая группа, симметрическая тяжелая подгруппа). Явный вид вложений $K(\infty) \rightarrow G(\infty)$ достаточно очевиден.

Пары некомпактного типа:

- $(GL(\infty, \mathbb{R}), O(\infty)),$
- $(GL(\infty, \mathbb{C}), U(\infty)),$
- $(GL(\infty, \mathbb{H}), Sp(\infty)),$
- $(U(\infty, \infty), U(\infty) \times U(\infty)),$
- $(Sp(2\infty, \mathbb{R}), U(\infty)),$

Пары компактного типа:

- $(U(\infty), O(\infty)),$
- $(U(\infty) \times U(\infty), U(\infty)),$
- $(U(2\infty), Sp(\infty)),$
- $(U(2\infty), U(\infty) \times U(\infty)),$
- $(Sp(\infty), U(\infty)),$

¹⁾ Такие операторы мы будем называть *сжатиями*.

$(\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{C}), \mathrm{Sp}(\infty)),$	$(\mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty), \mathrm{Sp}(\infty)),$
$(\mathrm{Sp}(\infty, \infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)),$	$(\mathrm{Sp}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty) \times \mathrm{Sp}(\infty)),$
$(\mathrm{O}(\infty, \infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)),$	$(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty)),$
$(\mathrm{O}(\infty, \mathbb{C}), \mathrm{O}(\infty)),$	$(\mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty), \mathrm{O}(\infty)),$
$(\mathrm{SO}^*(2\infty), \mathrm{U}(\infty)).$	$(\mathrm{O}(2\infty), \mathrm{U}(\infty)).$

Есть еще три серии симметрических пар «конечного ранга»:

$(\mathrm{U}(p, \infty), \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(\infty)),$	$(\mathrm{U}(p + \infty), \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(\infty)),$
$(\mathrm{O}(p, \infty), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(\infty)),$	$(\mathrm{O}(p + \infty), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(\infty)),$
$(\mathrm{Sp}(p, \infty), \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(\infty)),$	$(\mathrm{Sp}(p + \infty), \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(\infty)).$

В парах (G, K) левого столбца группа G пробегает все неприводимые *бесконечномерные классические группы*¹⁾. В первой таблице в первом столбце подгруппа K — максимальная тяжелая подгруппа в G . Максимальные тяжелая подгруппа в $\mathrm{U}(p, \infty)$ — это $\mathrm{U}(\infty)$.

Теорема сферичности. *Все перечисленные выше пары (G, K) являются сферическими.*

Сферические представления расклассифицированы, см. [35], [26], [28], [27], [32], сферические функции задаются простыми явными формулами. Рассмотрим, например, $(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$. Сферические представления определяются конечными наборами вещественных параметров $s_1, \dots, s_p$, а также $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 0, 1$. Сферические функции задаются формулой

$$\Phi_{s,a,\sigma}(g) = |\det g|^{ia} \cdot \mathrm{sgn}(\det g)^\sigma \prod_k \prod_l \left(\frac{1 + is_k}{2} \lambda_l + \frac{1 - is_k}{2} \lambda_l^{-1} \right)^{-1/2},$$

где через λ_j обозначены сингулярные числа матрицы $g \in \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$, а sgn обозначает знак.

Замечание. Для пары $(\mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$ в настоящее время построен содержательный гармонический анализ ([31], [1]), он должен существовать и для других пар правого столбца, см. [18]. $\square$

Класс сферических представлений не замкнут относительно естественных операций (тензорных произведений, ограничений на подгруппы), и его естественно расширить.

1.5. Допустимые представления. Фиксируем пару (G, K) из списка. Назовем унитарное представление группы G *допустимым* [28], если оно непрерывно на тяжелой подгруппе K . Мы будем употреблять в качестве синонима термин *представление пары (G, K)* . Разумеется, допустимость можно определять в терминах подходящих топологий на G (см. обсуждение в [17]).

Лемма 1.2. *Сферические представления допустимы.*

Доказательство. Легко видеть, что подпространство $\bigcup_\alpha H^{[\alpha]}$ инвариантно относительно G . С другой стороны, оно непусто (сферический вектор есть). В силу неприводимости представления оно плотно. $\square$

¹⁾Разумеется, группы $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ — тоже классические, $p = 0$. *Неприводимая группа* — это группа, не разлагающаяся в прямое произведение.

Подчеркнем, что группы финитных матриц $GL(\infty, \mathbb{R})$, $U(\infty)$, $O(\infty, \mathbb{C})$ и т. п. не являются группами типа I и теория их унитарных представлений в обычном смысле слова невозможна¹⁾. Класс допустимых представлений обозрим, и содержательные работы по представлениям бесконечномерных классических групп в основном укладываются в эту схему.

Замечание. В списке присутствуют, например, пары $(O(2\infty), O(\infty) \times O(\infty))$, $(O(2\infty), U(\infty))$. Группа G в них одна и та же, однако условия непрерывности относительно K различны (см. [28]). Например, неодномерное сферическое представление одной пары не является допустимым для другой. $\square$

Замечание. В списке есть пара $(U(\infty) \times U(\infty), U(\infty))$. Ее представления не разлагаются в тензорные произведения $\rho_1 \otimes \rho_2$ представлений группы $U(\infty)$ (соответствующая конечномерная теорема, см. [6, 13.11.8], здесь «не работает»), о представлениях этой пары см. [34], [35], [28]. $\square$

1.6. Умножение двойных классов смежности и шлейф. Пусть ρ — допустимое представление пары (G, K) в пространстве H . Пусть по-прежнему $H^{[\alpha]}$ — подпространства K^α -неподвижных векторов. Обозначим через $P^{[\alpha]}$ оператор ортогонального проектирования на $H^{[\alpha]}$. Определим операторы

$$\bar{\rho}_{\alpha, \beta}(g) = P^{[\beta]} \rho(g): H^{[\alpha]} \rightarrow H^{[\beta]}.$$

Легко видеть, что для любых $h_1 \in K^\alpha$, $h_2 \in K^\beta$ выполнено равенство $\bar{\rho}_{\alpha, \beta}(h_2 g h_1) = \bar{\rho}_{\alpha, \beta}(g)$. Поэтому функция $\bar{\rho}_{\alpha, \beta}$ определена на двойных классах смежности $\mathfrak{g} \in K^\beta \backslash G / K^\alpha$.

Теорема мультипликативности. *Существует естественное ассоциативное умножение $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \mapsto \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$,*

$$K^\gamma \backslash G / K^\beta \times K^\beta \backslash G / K^\alpha \longrightarrow K^\gamma \backslash G / K^\alpha,$$

определенное для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$. Более того, для любого унитарного допустимого представления ρ пары (G, K)

$$\bar{\rho}_{\beta, \gamma}(\mathfrak{g}) \bar{\rho}_{\alpha, \beta}(\mathfrak{h}) = \bar{\rho}_{\alpha, \gamma}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}). \quad (1.1)$$

Мы получили категорию, которую назовем *шлейфом* $\mathfrak{T}(G, K)$ пары (G, K) . Ее объекты — индексы (мультииндексы) $\alpha \geq 0$, а морфизмы — двойные классы смежности. Формула (1.1) означает, что мы получили представление категории (см. [17, II.5]), т. е. функтор из $\mathfrak{T}(G, K)$ в категорию гильбертовых пространств и ограниченных линейных операторов.

Отображение $g \mapsto g^{-1}$ индуцирует отображение $K^\alpha \backslash G / K^\beta \rightarrow K^\beta \backslash G / K^\alpha$, мы обозначим его через $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^*$. Оно удовлетворяет условию

$$(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}^* \circ \mathfrak{g}^*.$$

Представление $\bar{\rho}$ является **-представлением* в следующем смысле: $\rho(\mathfrak{g}^*) = \rho(\mathfrak{g})^*$.

¹⁾Определение групп типа I , см., например, в [6]. Для групп не типа I множество унитарных представлений необозримо, разложение приводимого представления не единственно и множество всех таких разложений, в свою очередь, необозримо.

Свойство аппроксимации. Рассмотрим $*$ -представление τ категории $\mathfrak{T}(G, K)$. Пусть выполнены условия $\|\tau(\mathfrak{g})\| \leq 1$, $\tau(1) = 1$. Тогда представление τ имеет вид $\bar{\rho}$ для некоторого однозначно определенного представления ρ пары (G, K) .

1.7. Сравнение с конечномерным случаем. Пусть G — группа Ли, а L — ее компактная подгруппа, не обязательно максимальная. Обозначим через $\mathcal{M}(L \backslash G / L)$ пространство конечных мер, инвариантных относительно левых и правых сдвигов на элементы из L . Очевидно, что $\mathcal{M}(L \backslash G / L)$ — алгебра относительно свертки. Например, если G — это p -адическая $\mathrm{GL}(n)$, а L — ее ивахорическая подгруппа, мы получаем алгебру Гекке (см. [14]); если G — вещественная простая группа Ли ранга 1, а L — максимальная компактная подгруппа, то получается гипергруппа операторов обобщенного сдвига [11].

Пусть ρ — унитарное представление группы G в пространстве H . Обозначим через H^L пространство L -неподвижных векторов. Для $\mu \in \mathcal{M}(L \backslash G / L)$ оператор $\rho(\mu)$ имеет блочную форму $\begin{pmatrix} A(\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ относительно разложения $H = H^L \oplus (H^L)^\perp$. То есть мы получили функтор из унитарных представлений группы G в представления сверточной алгебры $\mathcal{M}(L \backslash G / L)$.

Оказывается, что для бесконечномерных групп операция свертки двойных классов смежности может вырождаться в умножение. Первый пример, видимо, был обнаружен Исмагиловым в [8], [9], далее примеры появлялись в [23], [25], [28], [16]; многочисленные примеры обсуждаются в [17].

1.8. Явный вид произведения. См. [28]. Рассмотрим для определенности пару $(G, K) = (\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$ и двойные классы смежности $K^\beta \backslash G / K^\alpha$. Иными словами, мы рассматриваем матрицы $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ размера $(\beta + \infty) \times (\alpha + \infty)$ с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_\beta & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где U, V — ортогональные матрицы, а 1_α обозначает единичную матрицу размера α . Умножение в категории $\mathfrak{T}$ задается формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 & Q \\ 0 & 1 & 0 \\ R & 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & B & AQ \\ CP & D & CQ \\ R & 0 & T \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Отметим, что похожая (но не буквально та же) алгебраическая структура известна как умножение операторных узлов, см., например, [3].

1.9. Характеристические функции. Оказывается (см. [17, IX.4]), что о-умножение можно преобразовать в более привычную операцию¹⁾ следующим

¹⁾Это аналог характеристической функции Лившица, известной в спектральной теории несамосопряженных операторов, см. [13], [33]. Сама функция Лифшица участвует в теории представлений пары $(\mathrm{U}(1 + \infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$, см. [30].

способом. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C} \cup \infty$. Напишем уравнение

$$\begin{pmatrix} p_+ \\ \lambda x \\ p_- \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & & 0 \\ C & D & & \\ & & 0 & \\ 0 & & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{t-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ y \\ q_- \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все векторы $(p_+, p_-) \oplus (q_+, q_-) \in \mathbb{C}^{2\beta} \oplus \mathbb{C}^{2\alpha}$, для которых это уравнение имеет решение как уравнение на x, y . Мы получаем подпространство $\chi(\lambda)$ половинной размерности в $\mathbb{C}^{2\beta} \oplus \mathbb{C}^{2\alpha}$, зависящее от λ , которое мы рассматриваем как отношение (многозначное отображение) из $\mathbb{C}^{2\alpha}$ в $\mathbb{C}^{2\beta}$.

На этом языке $\circ$ -умножение соответствует произведению характеристических функций, т. е. поточечному произведению отношений.

Отметим, что $\chi(\lambda)$ является рациональным отображением сферы Римана в лагранжев грассманиан в $\mathbb{C}^{2\alpha} \oplus \mathbb{C}^{2\beta}$. Функция $\chi(\lambda)$ является также J -сжимающей в смысле Потапова [33].

1.10. Самоподобие. См. [29]. Пусть $(G, K) = (GL(\infty, \mathbb{R}), O(\infty))$. Обозначим через $G^\alpha \subset G$ подгруппу в G , состоящую из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Тогда пара (G^α, K^α) изоморфна (G, K) . Похожие подгруппы определены и во всех остальных случаях, только определять их надо чуть аккуратней: мы берем базисные векторы, оставляемые на месте подгруппой K^α , и их стабилизатор в G .

Фиксируем неприводимое унитарное представление ρ пары (G, K) . Его ограничение на достаточно малую подгруппу $(G^\alpha, K^\alpha) \simeq (G, K)$ содержит сферическое подпредставление. Все сферические подпредставления пары (G, K) , полученные таким образом, эквивалентны (для всех α).

1.11. Мантия. Пусть $(G, K) = (GL(\infty, \mathbb{R}), O(\infty))$. Разобьем $\mathbb{N}$ на два счетных подмножества, $\mathbb{N} = \Xi \sqcup \Omega$ (скажем, на нечетные и четные числа). Обозначим через $G^\Xi \subset G$ (соответственно $G(\Xi)$) стабилизатор базисных векторов, занумерованных элементами из Ξ (соответственно Ω). Иными словами, G^Ξ и $G(\Xi)$ состоят соответственно из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где блоки отвечают разложению $\ell_2(\mathbb{N}) = \ell_2(\Xi) \oplus \ell_2(\Omega)$. Очевидно, что $(G(\Xi), K(\Xi))$ изоморфна (G, K) . Мы фиксируем изоморфизм

$$i_\tau: (G, K) \rightarrow (G(\Xi), K(\Xi)),$$

индуцированный какой-нибудь биекцией $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \Xi$.

Пусть ρ — унитарное представление пары (G, K) в пространстве H . Обозначим через $H^{[\Xi]}$ подпространство K^Ξ -неподвижных векторов. Через $P^{[\Xi]}$ мы обозначим проектор на $H^{[\Xi]}$.

Лемма о самоограничении. Пространство $H^{[\Xi]}$ является $G(\Xi)$ -инвариантным. Представление $\rho \circ i_\tau$ пары (G, K) в $H^{[\Xi]}$ эквивалентно ρ .

С другой стороны, по элементу $g \in G$ мы строим оператор $\bar{\rho}_{\Xi, \Xi}(g): H^{[\Xi]} \rightarrow H^{[\Xi]}$ как $\bar{\rho}_{\Xi, \Xi}(g) = P^{[\Xi]}\rho(g)$. Как и выше, $\bar{\rho}$ есть функция на двойных классах смежности.

Вариант теоремы мультипликативности. Множество двойных классов смежности $\Gamma_\infty = K^\Xi \backslash G / K^\Xi$ обладает естественной структурой полугруппы (мантия пары (G, K)), отображение $\bar{\rho}_{\Xi, \Xi}$ есть представление полугруппы Γ_∞ .

Умножение задается той же формулой (1.3), только теперь все блоки матрицы бесконечны.

Теперь заметим, что группа $G(\Xi) \simeq G$ вкладывается в $K^\Xi \backslash G / K^\Xi$ изоморфно, и, таким образом, мы можем считать, что представление полугруппы $K^\Xi \backslash G / K^\Xi$ продолжает представление ρ группы $G(\Xi) \simeq G$.

В итоге мы получаем следующий результат:

Теорема о мантии. Любое унитарное представление пары (G, K) канонически продолжается до представления полугруппы Γ_∞ .

1.12. Сферический характер. Теперь заметим, что $Z := K^\Xi \backslash G^\Xi / K^\Xi \subset K^\Xi \backslash G / K^\Xi$ является центральной подполугруппой в мантии. В любом неприводимом представлении ρ пары (G, K) она действует скалярными операторами. Поэтому определен мультипликативный характер $\Phi_\rho: Z \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Если ρ сферично, то Φ_ρ совпадает со сферической функцией представления ρ , в общем случае он совпадает со сферическими функциями из разд. 1.10.

1.13. Нестандартные пары. До сих пор мы говорили о парах (G, K) из списка Ольшанского. Положим теперь $G = \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$, и пусть $K \subset G$ — группа $O(\infty)$, вложенная в G по диагонали.

(а) Пара (G, K) сферична. Отметим, что у этого утверждения нет конечномерных аналогов. Для этой пары верна и теорема мультипликативности.

(б) Нессонов ([21], [22]) получил описание всех сферических представлений этой пары.

(с) В [20] получена конструкция характеристических функций, пригодная в данном случае.

Встает вопрос: в какой общности верны приведенные выше (разд. 1.4–1.12). утверждения?

1.14. Цели работы. Мы вводим класс (G, L) -пар, где G — классическая группа, L — тяжелая подгруппа, для которых остаются в силе

- теорема мультипликативности,
- свойство аппроксимации,
- конструкция мантии,
- существование сферических характеров.

Кроме того, для них «работает» конструкция характеристических функций из [20].

Мы вводим подкласс чистых (G, L) -пар, для которых дополнительно выполнены

- теорема о сферичности,
- свойство самоподобия.

Определение (G, L) -пар содержится в §2, доказательства — в §3 (повторно мы теорем не формулируем), §4 содержит гипотезы и дополнительные комментарии.

§2. Определения

2.1. Правильные вложения тяжелых групп. Пусть сначала тяжелые группы L, K неприводимы, т.е. имеют вид $U(\infty), O(\infty), Sp(\infty)$. Имеются очевидные гомоморфизмы

$$\begin{aligned} O(\infty) &\rightarrow U(\infty), & O(\infty) &\rightarrow Sp(\infty), & U(\infty) &\rightarrow Sp(\infty), \\ U(\infty) &\rightarrow O(2\infty), & Sp(\infty) &\rightarrow O(4\infty), & Sp(\infty) &\rightarrow U(2\infty). \end{aligned}$$

Кроме того, поэлементное комплексное сопряжение определяет изоморфизм группы $U(\infty)$ на себя. Такие гомоморфизмы, а также тождественные гомоморфизмы $g \mapsto g$, мы будем называть *тривиальными*.

Пусть теперь K неприводима, а $L = L_1 \times \cdots \times L_p$. Гомоморфизм $L \rightarrow K$ мы назовем *правильным*, если он имеет вид

$$(g_1, \dots, g_p) \mapsto \begin{pmatrix} 1_a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1(g_{m_1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_N(g_{m_N}) \end{pmatrix}, \quad g_k \in L_k, \quad (2.1)$$

где τ_j — тривиальные гомоморфизмы. Единичная матрица 1_a может иметь любой размер $0, 1, 2, \dots, \infty$. Число N может быть любым в пределах $0 < N < \infty$. Гомоморфизм не обязательно является точным.

Пусть теперь $L = L_1 \times \cdots \times L_p$, $K = K_1 \times \cdots \times K_q$. Тогда *правильный гомоморфизм* — это произведение правильных гомоморфизмов $L \rightarrow K_1, \dots, L \rightarrow K_q$.

2.2. (G, L) -пары. Назовем *классической группой* $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ конечное произведение неприводимых классических групп (список приведен выше). Пусть $K = K_1 \times \cdots \times K_q$ — максимальная тяжелая подгруппа в G . Пусть L — правильно вложенная тяжелая подгруппа в K . Полученный объект (G, L) мы будем называть *(G, L) -парой*.

Пару (G, L) мы будем называть *чистой*, если централизатор подгруппы L в G тривиален¹⁾. Равносильное условие: в матрицах (2.1) отсутствует единичный блок 1_a , а среди множителей G_j отсутствуют группы $U(p, \infty), O(p, \infty), Sp(p, \infty)$ с $p > 0$ ²⁾.

Назовем пару *конечной*, если блоки 1_a в формуле (2.1) для всех множителей K_i имеют конечные размеры. Конечные пары появятся лишь в гипотезах в последнем параграфе.

2.3. Определение умножения двойных классов смежности. Пусть L неприводима. Фиксируем $\alpha \geq 0$ и рассмотрим последовательность $\Theta_m^{[\alpha]} \in L$,

¹⁾ Например, пара $(G, L) = (GL(3\infty, \mathbb{R}), O(\infty) \times O(\infty) \times O(\infty))$ чистая. Централизатор подгруппы L в группе всех ограниченных операторов равен $(\mathbb{R}^\times)^3$. Но он не содержится в группе финитных матриц $G = GL(3\infty, \mathbb{R})$. Пара $(O(1 + 3\infty, \mathbb{R}), O(\infty) \times O(\infty) \times O(\infty))$ не чистая, централизатор в $O(1 + 3\infty, \mathbb{R})$ изоморфен $\mathbb{Z}_2$.

²⁾ Данную оговорку приходится произнести, потому что для этих групп максимальная тяжелая подгруппа не является точным аналогом максимальной компактной.

заданную формулой

$$\rho(\Theta_m^{[\alpha]}) = \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Если L приводима, $L = L_1 \times \cdots \times L_p$, то мы фиксируем мультииндекс α и рассматриваем направленность, индексированную мультииндексом m ,

$$\Theta_m^{[\alpha]} = (\Theta_{m_1}^{[\alpha_1]}, \dots, \Theta_{m_p}^{[\alpha_p]}).$$

Пусть

$$\mathfrak{g} \in K^{[\gamma]} \backslash G / K^{[\beta]}, \quad \mathfrak{h} \in K^{[\beta]} \backslash G / K^{[\alpha]}.$$

Выберем представителей $g \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$. Рассмотрим последовательность

$$z_m = g\Theta_m^{[\beta]}h \in G.$$

Предложение 2.1. (а) Двойной класс смежности $\mathfrak{z}_m = K^{[\gamma]}z_mK^{[\alpha]}$ стабилизируется, начиная с некоторого места.

(б) Результат $g \circ h = \lim \mathfrak{z}_m$ не зависит от выбора представителей $g \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$.

(с) Полученная операция на двойных классах смежности ассоциативна, т. е. для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и для любых

$$\mathfrak{f} \in K^\delta \backslash G / K^\gamma, \quad \mathfrak{g} \in K^\gamma \backslash G / K^\beta, \quad \mathfrak{h} \in K^\beta \backslash G / K^\alpha$$

выполнено равенство $(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}) \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})$.

В итоге мы получаем категорию, которую мы по-прежнему обозначаем через $\mathfrak{T}(G, L)$ и называем *шлейфом* пары (G, L) .

Вместо формального доказательства для общего случая мы приведем примеры, показывающие, почему так получается.

2.4. Пример. Рассмотрим пару $(\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$. Для упрощения обозначений положим $\gamma = \beta = \alpha$. Возьмем $g, h \in G$. Запишем g, h как блочные матрицы порядка $\alpha + N + \infty$. Пусть N достаточно велико. Тогда g, h имеют вид

$$g = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & t & 0 \\ 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Произведение $g\Theta_{N+k}^{[\alpha]}h$ равно

$$\begin{pmatrix} ap & aq & 0 & b & 0 & 0 \\ cp & cq & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_k & 0 \\ r & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}.$$

Так как мы рассматриваем двойные классы смежности, мы можем переставлять местами строки (столбцы) этой матрицы с номерами $> \alpha$. Таким образом мы

можем привести матрицу к одной (любой) из двух удобных форм

$$S_1 = \begin{pmatrix} ap & aq & b & 0 \\ cp & cq & d & 0 \\ r & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{2k+\infty} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} ap & b & aq & 0 \\ cp & d & cq & 0 \\ r & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{2k+\infty} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что результат не зависит от k . Теперь надо проверить, что он не зависит от выбора представителей, т.е. что gu, vh с $u, v \in K_\alpha$ дают тот же самый двойной класс смежности. Без ограничения общности мы можем считать, что $u, v \in O(N)$ (иначе мы с самого начала возьмем большее N). Мы заменяем g, h из (2.3) на

$$g = \begin{pmatrix} a & bu & 0 \\ c & du & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ vr & vt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

с ортогональными матрицами u, v . Тогда новая матрица S_2 равна

$$\begin{pmatrix} ap & bu & aq & 0 \\ cp & du & cq & 0 \\ vr & 0 & vt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & v & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap & b & aq & 0 \\ cp & d & cq & 0 \\ r & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & u & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ассоциативность ясна из формулы (1.3).

2.5. Два примера. (а) Рассмотрим пару, состоящую из группы $G = \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$ и ее диагональной подгруппы $L = O(\infty)$. Мы имеем конечный набор матриц $g_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ с точностью до эквивалентности

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_q & b_q \\ c_q & d_q \end{pmatrix} \right\} \\ \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1_\beta & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1_\beta & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_q & b_q \\ c_q & d_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда $\circ$ -умножение определяется покомпонентно формулой (1.3).

(б) Пусть $G = \mathrm{U}(2\infty)$, $K = O(\infty) \times O(\infty)$. Теперь мы имеем унитарные матрицы g , определенные с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} \\ c_{11} & d_{11} & c_{12} & d_{12} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} \\ c_{21} & d_{21} & c_{22} & d_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & u_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} \\ c_{11} & d_{11} & c_{12} & d_{12} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} \\ c_{21} & d_{21} & c_{22} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & v_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & v_2 \end{pmatrix},$$

где $u_1, u_2, v_1, v_2 \in O(\infty)$. Произведение задается формулой

$$g \circ g' = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & a_{12} & b_{12} & 0 \\ c_{11} & d_{11} & 0 & c_{12} & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{21} & 0 & a_{22} & b_{22} & 0 \\ c_{21} & d_{21} & 0 & c_{22} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & b'_{11} & a'_{12} & 0 & b'_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_{11} & 0 & d'_{11} & c'_{12} & 0 & d'_{12} \\ a'_{21} & 0 & b'_{21} & a'_{22} & 0 & b'_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c'_{21} & 0 & d'_{21} & c'_{22} & 0 & d'_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Двойные классы смежности берутся относительно группы матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & u_{11} & u_{12} & & \\ & u_{21} & u_{22} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & v_{11} & v_{12} \\ & & & & v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in O(2\infty).$$

§ 3. Доказательства

3.1. Мультипликативность (аналог разд. 1.6).

Лемма 3.1. *Для любого унитарного представления π тяжелой группы L последовательность $\pi(\Theta_m^{[\alpha]})$ (см. (2.2)) слабо сходится к проектору $P^{[\alpha]}$ на $H^{[\alpha]}$.*

См. [17, теорема VIII.1.4]. Там априорное доказательство дано в случае симметрической группы $S(\infty)$, доказательство для групп $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ такое же. С другой стороны, это утверждение легко выводится из явной классификации представлений [25] тяжелых групп, см. также [17]. $\square$

Докажем теорему мультипликативности для произвольной пары (G, L) . Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, g, h$ — те же, что в разд. 2.3. Тогда

$$\overline{\rho}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}) = P^{[\gamma]} \rho(g \Theta_m^{[\alpha]} h): H^{[\alpha]} \rightarrow H^{[\gamma]}$$

для достаточно больших m . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P^{[\gamma]} \rho(g \Theta_m^{[\alpha]} h) &= \lim_{m \rightarrow \infty} P^{[\gamma]} \rho(g) \rho(\Theta_m^{[\alpha]}) \rho(h) \\ &= P^{[\gamma]} \rho(g) \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\Theta_m^{[\alpha]}) \right) \rho(h) = P^{[\gamma]} \rho(g) P^{[\beta]} \rho(h) = \overline{\rho}(\mathfrak{g}) \overline{\rho}(\mathfrak{h}). \end{aligned}$$

Итак, по каждому унитарному представлению пары (G, L) мы построили представление категории $\mathfrak{T}(G, L)$. Теперь предьявим обратную конструкцию.

3.2. Свойство аппроксимации. Пусть $\alpha < \beta$ (соответственно $L^\alpha \supset L^\beta$). Обозначим через $\lambda_{\alpha, \beta}$ двойной класс смежности $L^\beta \cdot 1 \cdot L^\alpha$. Положим $\mu_{\beta, \alpha} := \lambda_{\alpha, \beta}^*$. Тогда выполнены равенства

$$\mu_{\beta, \alpha} \circ \lambda_{\alpha, \beta} = 1^{[\alpha]}, \quad \lambda_{\beta, \gamma} \lambda_{\alpha, \beta} = \lambda_{\alpha, \gamma}, \quad (3.1)$$

где $1^{[\alpha]}$ обозначает единицу $L^\alpha \cdot 1 \cdot L^\alpha$ полугруппы $L^\alpha \backslash G / L^\alpha$. Мы получаем структуру упорядоченной категории в смысле [17, III.4].

Отметим, что $\psi_{\alpha, \beta} := \lambda_{\alpha, \beta} \circ \mu_{\beta, \alpha}$ как подмножество в G совпадает с L^α . Но это нетривиальный идемпотент в $L^\beta \backslash G / L^\beta$:

$$\psi_{\alpha, \beta}^2 = \psi_{\alpha, \beta}, \quad \psi^* = \psi_{\alpha, \beta}.$$

Рассмотрим $*$ -представление R шлейфа $\mathfrak{T}(G, L)$ сжимающими операторами, и пусть единицы полугрупп эндоморфизмов переходят в единичные операторы. Обозначим через $H^{[\alpha]}$ гильбертово пространство, соответствующее (мульти)индексу α . В силу (3.1) оператор $R(\lambda_{\alpha, \beta})$ является оператором изометрического вложения $H^{[\alpha]} \rightarrow H^{[\beta]}$. Проектор на образ этого оператора — это

$\psi_{\alpha,\beta}$. Теперь мы имеем цепочку изометричных вложений (для определенности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — биндекс):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & H^{\alpha_1+1, \alpha_2} & & & \\
 \dots & & \searrow & & \swarrow & & \dots \\
 & & H^{\alpha_1, \alpha_2} & & & H^{\alpha_1+1, \alpha_2+1} & \\
 \dots & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \dots \\
 & & & H^{\alpha_1, \alpha_2+1} & & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Предельное гильбертово пространство обозначим через H .

Группа G является объединением конечномерных групп $G(\alpha)$. Заметим, что группа $G(\alpha)$ изоморфно вкладывается в полугруппу $L^\alpha \backslash G / L^\alpha$. Поэтому мы имеем представление группы $G(\alpha)$ в пространстве $H^{[\alpha]}$. Операторы представления являются сжимающими вместе со своими обратными. Следовательно, они унитарны.

Поэтому группа G действует в H . Отслеживание дальнейших деталей мы опускаем.

3.2. Сферичность.

Лемма 3.2. *Для чистых (G, L) -пар полугруппа $L \backslash G / L$ коммутативна.*

Дело в том, что операция умножения в этом случае сводится к «приставлению» одной матрицы к другой. Например, формула (2.5) в этом случае сводится к такой:

$$g \circ g' = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d'_{11} & d'_{12} \\ d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & d'_{11} & 0 & d'_{12} \\ d_{21} & 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & d'_{21} & 0 & d'_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить $g' \circ g$, мы сопрягаем правую часть матрицей

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_N & 0 \\ 0 & 1_\infty & 0 & \\ 1_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

с достаточно большим N . □

Итак, $L \backslash G / L$ — абелева полугруппа с инволюцией. Ее неприводимые представления одномерны. С другой стороны, неприводимость представления пары (G, L) равносильна неприводимости соответствующего представления шлейфа $\mathfrak{T}(G, L)$, а у неприводимого представления упорядоченной категории представления всех полугрупп эндоморфизмов неприводимы (см. [17, лемма III.4.3]). Отсюда также вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Сферические функции пары (G, L) являются гомоморфизмами¹⁾ полугруппы $L \backslash G / L$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^\times$.*

3.4. Самоподобие. Рассмотрим чистую пару (G, L) . Рассмотрим ее подгруппу G^α , как в разд. 1.8.

Лемма 3.4. *Образ G^α в $L^\alpha \backslash G / L^\alpha$ является центральной полугруппой, канонически изоморфной $L \backslash G / L$.*

¹⁾Разумеется, не произвольными.

Доказательство. Изоморфизм индуцируется отображением «сдвига» $G \rightarrow G^\alpha$, т.е. $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Пусть $g \in G$, $h \in G^\alpha$. Легко видеть, что при достаточно большом m

$$g(\Theta_m^{[\alpha]} h \Theta_m^{[\alpha]}) = (\Theta_m^{[\alpha]} h \Theta_m^{[\alpha]})g \implies L^\alpha \cdot g \Theta_m^{[\alpha]} h \cdot L^\alpha = L^\alpha \cdot h \Theta_m^{[\alpha]} g \cdot L^\alpha. \quad \square$$

Далее заметим, что при $\alpha < \beta$ есть естественное отображение $K^\beta \backslash G / K^\beta \rightarrow K^\alpha \backslash G / K^\alpha$, которое может быть задано также формулой

$$\Pi: \mathfrak{g} \mapsto \mu_{\beta, \alpha} \circ \mathfrak{g} \circ \lambda_{\alpha, \beta}.$$

Лемма 3.5. *Проекция $\Pi: K^\beta \backslash G^\beta / K^\beta \rightarrow K^\alpha \backslash G^\alpha / K^\alpha$ центральных полу-групп совпадает с их изоморфизмом, индуцированным изоморфизмом сдвига $G^\beta \rightarrow G^\alpha$.*

Доказательство. Элемент $g \in G^\alpha$ и соответствующий ему элемент $\tilde{g} \in G^\beta$ сопряжены в G^α с помощью элемента группы K^α . $\square$

Поэтому полугруппа $L \backslash G / L$ действует во всем пространстве H . Если представление ρ неприводимо, то эта полугруппа действует скалярными операторами. Соответствующий характер совпадает со сферическими функциями групп (G^α, K^α) , действующих в H .

3.5. Самоограничение. Проведем сначала доказательство в случае $(G, L) = (\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty))$. Мы сохраняем обозначения разд. 1.11.

Отображение $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \Xi$ определяет 0-1-матрицу, обозначим ее через A , ее норма равна 1. Согласно теореме 1.1, представления тяжелых групп продолжаются по слабой непрерывности до представлений полугрупп сжатий. В частности, матрице A соответствует оператор $\pi(A)$ в пространстве любого непрерывного представления π группы L в гильбертовом пространстве H .

Лемма 3.6. *Оператор $\pi(A)$ — изометричное отображение пространства H на подпространство $H^{[\Xi]}$.*

Доказательство. Прежде всего, $(\pi(A))^* \pi(A) = \pi(A^* A) = \pi(1) = 1$. Поэтому $\pi(A)$ — изометричное вложение. Аналогично, $\pi(A) \pi(A)^* = \pi(AA^*)$. Оператор AA^* — это проектор на $\ell_2(\Xi)$ в пространстве $\ell_2(\mathbb{N})$. Далее мы опять ссылаемся на явный вид представлений тяжелых групп [25]. $\square$

Рассмотрим допустимое представление ρ пары (G, L) . Обозначим через π ограничение представления ρ на L . Продолжим π на полугруппу сжатий.

Лемма 3.7. *Оператор $\pi(A)$ сплетает представление π пары (G, L) в пространстве H и представление $\pi \circ i_\tau$ в пространстве $H^{[\Xi]}$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность матриц-перестановок B_m , сходящуюся слабо к A . Тогда $\pi(B_m)$ сходится слабо к $\pi(A)$. Группа G является индуктивным пределом редуктивных групп $G(n)$. Для каждой группы $G(n)$ оператор $\pi(B_m)$ с достаточно большим номером m является сплетающим. Поэтому предел является сплетающим оператором для всей группы G . $\square$

Пусть $L = L_1 \times \cdots \times L_p$. Каждый из множителей — это группа унитарных операторов в некотором пространстве $\ell_1 = \ell_2(\mathbb{N})$. Мы разбиваем каждую копию $\mathbb{N}$ на два счетных подмножества, $\mathbb{N} = \Xi_j \cup \Omega_j$. Фиксируем биекции $\tau_j: \mathbb{N} \rightarrow \Xi_j$. Далее повторяем все те же самые слова.

3.6. Мантия. Теорема о мантии следует из теоремы мультипликативности и леммы о самоограничении.

3.7. Сферический характер, см. разд. 1.12. Рассмотрим (G, L) -пару, действующую в прямой сумме пространств ℓ_2 , как в разд. 2.1–2.2. Рассмотрим все базисные векторы e_μ в $\bigoplus \ell_2$, которые фиксируются группой L . Рассмотрим подгруппу $G_{\min} \subset G$, стабилизирующую все e_μ .

Пример. Пусть $(G, L) = (\mathrm{GL}(7 + 2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{O}(\infty) \times \mathrm{O}(\infty))$. Тогда $G_{\min} = \mathrm{GL}(2\infty, \mathbb{R})$.

Предложение 3.8. *Мантия пары (G, L) содержит центральную подгруппу, канонически изоморфную $L \backslash G_{\min} / L$.*

Объясним это на примере. Пусть $(G, L) = (\mathrm{U}(p + \infty) \times \mathrm{U}(\infty), \mathrm{U}(\infty))$, причем подгруппа $L \simeq \mathrm{U}(\infty)$ вложена в произведение по диагонали, и $G_{\min} = \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)$. Переобозначим (G, L) как $(\mathrm{U}(p + 2\infty) \times \mathrm{U}(2\infty), \mathrm{U}(2\infty))$, будем записывать ее элементы как пары блочных унитарных матриц (g, h) , где g имеет порядок $p + \infty + \infty$, а h — порядок $\infty + \infty$. Рассмотрим подгруппу $Z \simeq \mathrm{U}(\infty) \times \mathrm{U}(\infty)$, состоящую из пар матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & d_2 \end{pmatrix} \right\},$$

где $d_1, d_2 \in \mathrm{U}(\infty)$. В ней рассмотрим подгруппу M , состоящую из пар, удовлетворяющих условию $d_1 = d_2$. Тогда мантия — это подгруппа $M \backslash G / M$. В нее вкладывается в качестве центральной подгруппы $M \backslash Z / M$. Центральность — версия леммы 3.4. $\square$

§4. Обсуждение

4.1. Общие гипотезы. Пусть пара (G, L) конечна, см. разд. 2.2.

- (a) Унитарные представления пары (G, L) имеют тип I .
- (b) Существует лишь счетное число неприводимых представлений с данным сферическим характером.

(c) Пусть $(G, L) \rightarrow (G', L')$ — вложение пар, причем вложение $L \rightarrow L'$ правильное в смысле разд. 2.1. Тогда ограничение неприводимого представления ρ пары (G', L') на (G, L) имеет чисто дискретный спектр. В частности, это так для тензорных произведений неприводимых представлений.

(d) Возможна явная классификация сферических представлений. Точнее, все они получаются конструкцией, описанной в [17, IX.5] (разница между симметрическими и несимметрическими (G, L) -парами объясняется в [17, IX.5.6]).

(e) В [20] для элемента $\mathfrak{g} \in L^\alpha \backslash G / L^\beta$ были построены спектральные данные: «характеристическая функция» (внутренняя функция матричного аргумента) и «собственная поверхность» (гиперповерхность в грассманиане). По этим данным $\mathfrak{g}$ однозначно восстанавливается.

4.2. Характеристические функции: пример. Мы рассмотрим следующую (G, K) -пару (возможно, не самую естественную с точки зрения теории представлений, но простейшую с точки зрения характеристических функций). Рассмотрим группу $H = \mathrm{U}(\alpha + n\infty)$ и ее подгруппу $K = \mathrm{U}(\infty)$, состоящую из

матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u \end{pmatrix},$$

где $u \in U(\infty)$. Положим $G = H \times K$, подгруппа $K \subset G$ вложена в произведение по диагонали. Тогда двойные классы смежности $K \backslash G / K$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности $U(\alpha + n\infty)$ относительно подгруппы K .

Запишем элемент $g \in U(\alpha + n\infty)$ как блочную матрицу

$$g = \begin{pmatrix} a & b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_p & d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть S — матрица размера $p \times p$. Пусть $x_1, \dots, x_p$ — векторы из ℓ_2 , и пусть $p, q \in \mathbb{C}^\alpha$. Рассмотрим следующий «извращенный аналог» характеристического уравнения $Ay = \lambda y$:

$$\begin{pmatrix} q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_p & d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n \\ \vdots \\ s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Исключая переменные $x_1, \dots, x_n$, мы получаем зависимость

$$q = \chi_g(S)p,$$

где $\chi_g(S)$ — матрица размера $\alpha \times \alpha$. Эту рациональную функцию $\text{Mat}(n) \rightarrow \text{Mat}(\alpha)$ мы назовем *характеристической функцией*.

Собственную поверхность $\Xi_g \subset \text{Mat}(n)$ мы определим уравнением

$$\det \left(\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \right) = 0.$$

Мы рассматриваем ее как дивизор в смысле алгебраической геометрии, т.е. набор неприводимых компонент алгебраического многообразия с учетом кратностей.

Теорема 4.1. (а) *Характеристическая функция и собственная поверхность зависят лишь от двойного класса смежности $\mathfrak{g} \in K \backslash G / K$, содержащего g .*

(б) $\chi_{\mathfrak{g}}(S)$ *есть рациональная функция от S , причем ее особенности содержатся в $\Xi_{\mathfrak{g}}$.*

(с) *Выполнено следующее тождество:*

$$\chi_{\mathfrak{g}_1}(S)\chi_{\mathfrak{g}_2}(S) = \chi_{\mathfrak{g}_1 \circ \mathfrak{g}_2}(S).$$

Обозначим через B_k множество матриц размера $k \times k$ с нормой < 1 .

Теорема 4.2. (a) *Отображение χ_g голоморфно на B_n и переводит B_n в B_α .*
 (b) *Если χ_g определено в точке $S \in U(n)$, то $\chi_g(S) \in U(\alpha)$.*

4.3. Внутренние отображения. Назовем рациональное отображение $\text{Mat}(n) \rightarrow \text{Mat}(\alpha)$ *внутренним*, если оно удовлетворяет заключению предыдущей теоремы.

Напомним, что внутренние отображения единичного круга B_1 в себя — классический предмет теории функций (см., например, [4]), а внутренние отображения $B_1 \rightarrow B_n$ — классический предмет теории операторов, см. [33].

Обозначим через $\text{Int}(B_n, B_\alpha)$ множество всех внутренних отображений $B_n \rightarrow B_\alpha$, а через $\text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$ множество характеристических функций χ_g .

Теорема 4.3. (a) *Если $F_1, F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$, то $F_1 F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$.*
 (b) *Если $F_1 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$, $F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\beta)$, то $F_1 \oplus F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_{\alpha+\beta})$.*
 (c) *Если $F_1 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$, $F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\beta)$, то $F_1 \otimes F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_{\alpha\beta})$.*
 (d) *Если $F_1 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_m)$, $F_2 \in \text{Int}^\circ(B_m, B_k)$, то $F_2 \circ F_1 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_k)$.*
 (e) *Если $F_1 \in \text{Int}(B_n, B_\alpha)$, $F_2 \in \text{Int}(B_n, B_\beta)$, $F_1 \oplus F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_{\alpha+\beta})$, то $F_1 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha)$, $F_2 \in \text{Int}^\circ(B_n, B_\beta)$.*

Гипотеза 4.4. $\text{Int}^\circ(B_n, B_\alpha) = \text{Int}(B_n, B_\alpha)$.

4.4. Почему мы рассматриваем лишь такие пары? Есть много вложений группы $U(n)$ в унитарные группы большого размера $U(N)$. Например, $g \mapsto g \otimes g$ задает вложение $U(n) \rightarrow U(n^2)$. Однако для $g \in U(\infty)$ матрица $g \otimes g$ не является финитной. То есть формально вложения $U(n)$ в $U(\cdot)$, отличные от прямых вложений, не выживают в пределе при $n \rightarrow \infty$.

Понятно, что это довод не достаточен. Можно искать естественные подгруппы в полной операторной группе в $\ell_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, содержащие матрицы $g \otimes g$. Но таких подгрупп не видно¹⁾.

4.5. Сферичность. Есть примеры сферических пар, не являющихся чистыми, скажем $(U(1 + \infty) \times U(\infty), U(\infty))$, $(O(1 + 2\infty), U(\infty))$, см. [30].

Кроме того, есть много случаев сферичности относительно подгрупп вида $L \times M$, где L — тяжелая подгруппа, а M — компактная (например, упоминавшаяся выше пара $(U(p + \infty), U(p) \times U(\infty))$).

4.6. Симметрические группы. Похожая картина возникает и для симметрических групп, пример обсуждается в [19].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*, Ann. of Math. (2), **161**:3 (2005), 1319–1422.
- [2] M. Brion, *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compositio Math., **63**:2 (1987), 189–208.
- [3] М. С. Бродский, *Унитарные операторные узлы и их характеристические функции*, УМН, **33**:4(202) (1978), 141–168.
- [4] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [5] И. М. Гельфанд, *Сферические функции на римановых симметрических пространствах*, ДАН СССР, **70** (1950), 5–8.
- [6] Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.

¹⁾ Например, подгруппа порожденная финитными унитарными матрицами и матрицами $g \otimes g$, разлагается в прямое произведение двух порождающих подгрупп.

- [7] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
- [8] Р. С. Исмагилов, *Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем P , не являющимся локально компактным, относительно подгруппы матриц с целыми элементами*, Изв. АН СССР, сер. матем., **31**:2 (1967), 361–390.
- [9] Р. С. Исмагилов, *Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов которого бесконечно*, Функц. анализ и его прил., **4**:1 (1970), 42–51.
- [10] F. Knop, *Semisymmetric polynomials and the invariant theory of matrix vector pairs*, Represent. Theory, **5** (2001), 224–266.
- [11] T. H. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, in: Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications, Math. Appl., Reidel, Dordrecht, 1984, 1–85.
- [12] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math., **38**:2 (1979), 129–153.
- [13] М. С. Лившиц, *Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Матем. сб., **19(61)**:2 (1946), 239–262.
- [14] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Univ. Press, New York, 1995 [Имеется перевод первого издания: И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984.].
- [15] И. В. Микитюк, *Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородным конфигурационным пространством*, Матем. сб., **129**:4 (1986), 514–534.
- [16] Ю. А. Неретин, *Категории бистохастических мер и представления некоторых бесконечномерных групп*, Матем. сб., **183**:2 (1992), 52–76.
- [17] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, Эдиториал УРСС, М., 1998, 2009.
- [18] Yu. A. Neretin, *Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups*, Duke Math. J., **114**:2 (2002), 239–266.
- [19] Yu. A. Neretin, *Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories*, Int. Math. Res. Notices, 2011, doi: 10.1093/imrn/rnr027; <http://arxiv.org/abs/0909.4739>.
- [20] Yu. A. Neretin, *Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions*, Analysis and Mathematical Physics, в печати; <http://arxiv.org/abs/1006.2275>.
- [21] Н. И. Нессонов, *Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$* , Матем. физика, анализ, геометрия, **10**:4 (2003), 167–187.
- [22] Н. И. Нессонов, *Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$* . II, Матем. физика, анализ, геометрия, **10**:4 (2003), 524–556.
- [23] Г. И. Олшанский, *Новые «большие» группы типа I*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 16, ВИНТИ, М., 1980, 31–52.
- [24] Г. И. Олшанский, *Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Хау*, ДАН СССР, **269**:1 (1983), 33–36.
- [25] Г. И. Олшанский, *Бесконечномерные классические группы конечного R -ранга: описание представлений и асимптотическая теория*, Функц. анализ и его прил., **18**:1 (1984), 28–42.
- [26] Г. И. Олшанский, *Унитарные представления группы $SO_0(\infty, \infty)$ как пределы унитарных представлений групп $SO_0(n, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$* , Функц. анализ и его прил., **20**:4 (1986), 46–57.
- [27] Г. И. Олшанский, *Метод голоморфных расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп*, Функц. анализ и его прил., **22**:4 (1988), 23–37.

- [28] G. I. Olshanski, *Unitary representations of infinite dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe*, in: Representation of Lie Groups and Related Topics, Adv. Stud. Contemp. Math., vol. 7, Gordon and Breach, New York, 1990, 269–463.
- [29] Г. И. Олшанский, *Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$* , Алгебра и анализ, **1**:4 (1989), 178–209.
- [30] G. I. Olshanski, *Caractères généralisés du groupe $U(\infty)$ et fonctions intérieures*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1, **313**:1 (1991), 9–12.
- [31] G. I. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group*, J. Funct. Anal., **205**:2 (2003), 464–524.
- [32] D. Pickrell, *Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces*, J. Funct. Anal., **90**:1 (1990), 1–26.
- [33] В. П. Потапов, *Мультипликативная структура J -нерастягивающей матричной функции*, Труды ММО, **4** (1955), 125–236.
- [34] S. Strătilă, D. Voiculescu, *Representations of AF-Algebras and of the Group $U(\infty)$* , Lecture Notes in Math., vol. 486, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Paris, 1975.
- [35] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечномерной унитарной группы*, ДАН СССР, **267**:2 (1982), 272–276.

University of Vienna

Институт теоретической и экспериментальной физики

Московский государственный университет

e-mail: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию

24 января 2011 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 24.06.2011. Подписано к печати 22.7.2011. Формат 70×100/16

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,8 тыс. Бум. л. 3,0

Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 215 экз. Заказ 1506.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56

Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,

117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6