Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр, *Функци. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 3, 16–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:09:44

Аutomорфизм Паскаля имеет непрерывный спектр*

© 2011. А. М. ВЕРШИК

В этой статье мы описываем автоморфизм Паскаля и излагаем план доказательства непрерывности его спектра в ортогональном дополнении к константам.

Памяти В. И. Арнольда — нарушителя спокойствия

У тех математиков, которые остаются только математиками, ум здравый, но лишь в том случае, если им все растолковать через определения и правила; иначе они глупы и несносны, потому что рассуждают здраво только, когда имеют перед собой ясные правила.

Блез Паскаль «Мысли», Серия XXII

Дима Арнольд очень любил Б. Паскаля (как и я), а Р. Декарта он не любил, считая его провозвестником ненавидимого им бурбакизма. Я же в юности к Бурбаки относился с пиететом, ценил его 5-й том и даже как-то написал ему (Н. Бурбаки) большое панегирическое письмо, чего Дима не одобрил. В ответ Н. Бурбаки (в воплощении Ж. Дьедонне) прислал в подарок только что вышедший очередной 6-й том «Интегрирование» — на тему, весьма близкую мне, но оказавшийся очень неудачным. Я расстроился и стал думать, что, наверно, в чем-то Арнольд прав.

Появившийся в последние годы жизни В. И. Арнольда острый интерес к комбинаторике и асимптотикам, сблизивший нас еще больше, был, как я думаю, еще и проявлением того, что всякие рамки, запреты были противны его разуму, он постоянно уходил от канонов, а лучше сказать, вводил новые, и это удавалось ему, поскольку он был (по Паскалю) не только математиком.

§1. Введение: определение адического автоморфизма Паскаля

Преобразования, порожденные классическими градуированными графами, такими, как обычный и многомерные графы Паскаля, граф Юнга, граф блужданий в камерах Вейля и др., доставляют примеры комбинаторного происхождения нового, очень интересного класса *адических преобразований*, введенных еще в [3].

В этой работе мы изучаем автоморфизмы Паскаля. Этот автоморфизм является естественным преобразованием пространства путей графа Паскаля (= бесконечного треугольника Паскаля), т. е. бесконечномерного куба. Если реализовать этот автоморфизм в виде сдвига в пространстве последовательностей нулей и единиц, то возникнет стационарная мера, названная мерой Паскаля, свойства которой мы изучаем. В частности, оказывается, что множество почти периодических по Безиковичу–Хэммингу последовательностей имеет по ней меру нуль,

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00379-а.

из чего в конечном итоге и следует непрерывность хотя бы спектра соответствующего оператора.

Решающую роль в намеченном доказательстве непрерывности части спектра автоморфизма Паскаля играют комбинаторные соображения, связанные со структурой повторяемости растущих самоподобных слов. Эти соображения имеют универсальный характер для широкого класса адических автоморфизмов. В изложении мы следуем традиции, поддерживавшейся В. И. Арнольдом (см. например, [1], [2]), которая состоит в выявлении природы эффекта, а не в формальном его описании.

1.1. Линейный порядок и другие структуры на множестве вершин куба. Определение автоморфизма Паскаля как одного из примеров адических преобразований было сформулировано в [3], [4], тогда же была поставлена задача вычисления его спектра. Его определение основывается на введении лексикографического (линейного) упорядочения пространства путей конечного или бесконечного графа Паскаля¹. В свою очередь, определение лексикографического порядка сводится к введению естественного линейного порядка на множестве всех подмножеств данной мощности множества из n элементов, или, на геометрическом языке, к определению линейного порядка на множестве вершин n -мерного координатного куба с данным количеством нулевых координат. Мы начнем с нескольких вариантов определения этого порядка.

1. Пусть $I_n = \{0, 1\}^n$ — множество вершин единичного n -мерного куба. Рассмотрим гиперплоскости, содержащие вершины с суммой координат k , $k = 0, 1, \dots, n$, и обозначим через $C_{n,k}$ множество вершин на k -й гиперплоскости; у этих вершин $m = n - k$ координат равны 0 и $k = n - m$ равны 1. Определим по индукции линейный порядок на всех $C_{n,k}$. При $n = 2$ порядок на одноточечных множествах $C_{2,0}$, $C_{2,2}$ тривиален, а на $C_{2,1}$ порядок таков: $(0, 1) \succ (1, 0)$. Пусть порядок задан на $C_{n,k}$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$; тогда на $C_{n+1,k}$ для пары вершин с одинаковой последней координатой порядок такой же, как для пары вершин из $C_{n,k}$, получающихся отбрасыванием последней координаты; если же последние координаты у пары вершин из $C_{n+1,k}$ различны, то больше та вершина, у которой эта координата равна 1. Минимальная в смысле этого порядка вершина в $C_{m+k,k}$ имеет координаты $(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_m)$, а максимальная — $(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_k)$.

2. То же самое, но несколько в других терминах выглядит так. Положив $k = n - m$, рассмотрим семейство $C_{n,k}$ всех C_n^k подмножеств мощности k линейно упорядоченного множества из $n = m + k$ элементов $\{1, \dots, k, k + 1, \dots, k + m\}$ и введем на этом семействе линейный лексикографический порядок: подмножество F больше подмножества G , если максимальный номер элемента из F , не

¹) Более распространен термин «треугольник Паскаля», но он, правда, относится, в основном, к конечному объекту, и в вершинах такого графа ставят биномиальные коэффициенты. Поэтому называть бесконечный граф Паскаля треугольником не вполне естественно. Но есть возражения и против самого термина «треугольник Паскаля»: прежде всего это то, что его открытие приписывают также индийцу Пингала (10 век), персу Омару Хайяму (12 век) и китайцу Хуэю (13 век). С другой стороны, при вызове в Google слов «граф Паскаля» появляется прежде всего граф Л. Н. Толстой, который тоже очень любил Паскаля, а также тема графических режимов в машинном языке «Паскаль».

входящего в G , больше, чем максимальный номер элемента из G , не входящего в F . Таким образом, мы линейно упорядочили все подмножества множества $C_{n,k}$.

3. Наконец, «числовая» интерпретация этого порядка состоит в следующем: вершина конечномерного единичного куба (координаты упорядочены) есть 0-1-вектор, который мы рассмотрим как двоичное разложение целого числа. Возьмем все числа, у которых в двоичном разложении заданное (одинаковое) число единиц (и нулей) и определим на них обычный порядок ($<$) как на множестве натуральных числах.

Эквивалентность трех независимых определений порядка легко проверить.

Поскольку путь в конечном треугольнике Паскаля высоты n можно отождествить с последовательностью нулей и единиц, то мы фактически линейно упорядочили каждое из множеств путей, ведущих в какую-либо конечную вершину треугольника.

Определение 1. Для натуральных чисел m, k определим *опорное слово* $O(m, k)$ как 0-1-вектор, составленный из первых координат упорядоченных вершин множества $C_{m+k,m}$; эквивалентным образом, опорное слово $O(m, k)$ — это вектор четностей упорядоченных по возрастанию натуральных чисел, в двоичном разложении которых ровно k единиц и m нулей. Под опорным словом $O(0, 0)$ будем понимать слово (1). Длина вектора $O(m, k)$ равна C_{m+k}^m .

Пример:

$$O(1, 1) = (1, 0), \quad O(2, 2) = (1, 1, 0, 1, 0, 0),$$

$$O(4, 3) = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

1.2. Бесконечномерный куб и автоморфизм Паскаля. Рассмотрим теперь множество вершин бесконечномерного единичного куба, т. е. счетное произведение двоеточий: $I^\infty = \{0; 1\}^\infty$, мы будем его коротко называть бесконечномерным кубом. Число важных математических структур на этом замечательном объекте, их полезных интерпретаций и самых разных их применений огромно.

Прежде всего мы рассматриваем бесконечномерный куб как компактную аддитивную группу целых диадических чисел $\mathbf{Z}_2$. Мы реализуем ее как группу последовательностей вычетов по модулям 2^n и используем аддитивную запись. В нашей интерпретации целое диадическое число есть тоже бесконечная односторонняя последовательность нулей и единиц. Слабая топология на I^∞ порождает структуру стандартного измеримого пространства; мера Бернулли μ есть бесконечное произведение мер на сомножителях $\{0, 1\}$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$. Она является одновременно и мерой Хаара на кубе как на группе $\mathbf{Z}_2$. Можно также рассмотреть и другие бернуллиевские меры μ_p , каждая из которых является счетным произведением одинаковых сомножителей $(p, 1 - p)$, где $0 < p < 1$; они уже не инвариантны (а лишь квазиинвариантны) относительно сложения (но будут инвариантны относительно автоморфизма Паскаля). Бесконечномерный куб естественно отождествляется с пространством бесконечных путей графа Паскаля (нуль есть выбор левого, а единица — правого направления пути), и оно-то и будет фазовым пространством для автоморфизма Паскаля, определяемого ниже. Все эти интерпретации идентичны и мера одна и та

же; выбор удобной реализации — дело вкуса. Нам по большей части удобнее говорить о бесконечномерном кубе; топология пространства для нас не имеет особого значения.

Удобно записывать целые диадические числа в форме

$$0 \dots (m_1) \dots 01 \dots (k_1) \dots 1 ** = 0^{m_1} 1^{k_1} **.$$

Преобразование T сдвига на единицу в аддитивной группе $\mathbf{Z}_2$, т.е. преобразование $Tx = x + 1$, разумеется, сохраняет меру Хаара–Бернулли. Его называют в теории динамических систем *одометром* или *диадическим автоморфизмом*, оно является самым простым эргодическим автоморфизмом; его спектр (= множество собственных чисел) есть группа всех корней из единицы степеней 2^n , $n = 1, \dots$. Орбиты одометра — это классы смежности по (всюду плотной) подгруппе $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$. Общая адическая модель преобразований, сохраняющих меру, есть далекое обобщение одометра ([3], [4]).

Рассмотрим диадическую метрику ρ на аддитивной группе $\mathbf{Z}_2$ целых диадических чисел; она индуцирует слабую топологию на I^∞ . Метрика ρ выглядит так: $\rho(x, y) = \|x - x'\|$, где $\|g\| = 2^{-t(g)}$ — *каноническое нормирование*; здесь $t(g)$ есть номер первой ненулевой координаты элемента g . Метрика ρ , очевидно, инвариантна относительно одометра, но, как мы увидим, не относительно автоморфизма Паскаля.

Введем теперь упорядочение на $\mathbf{Z}_2 \sim I^\infty = \{0; 1\}^\infty$ следующим образом: назовем пару вершин (точек) бесконечномерного куба сравнимыми, если у них совпадают все координаты, начиная с некоторого места (одинаковый «хвост»), а число единиц до этого места у обеих последовательностей одинаково. Их двух сравнимых вершин больше по определению та, у которой начальный конечный отрезок больше в смысле определения, данного выше. Это и есть нужный лексикографический порядок на бесконечномерном кубе; обозначим его через $\prec$. Легко пересказать все приведенные выше описания порядка на конечномерном кубе для бесконечномерного куба.

Но каждая вершина бесконечномерного куба может рассматриваться как бесконечный путь на графе Паскаля. Сравнимыми в этом порядке оказываются пути с одинаковым «хвостом», т.е. с равными координатами, начиная с некоторого места. Тем самым введен линейный порядок на множестве путей графа Паскаля.

Определение 2. Введенный порядок на множестве вершин конечномерного или бесконечномерного куба назовем *адическим порядком*.

Тип упорядочения на классе сравнимых путей есть тип бесконечной в одну ($\mathbb{N}$) или обе ($\mathbb{Z}$) стороны цепи: бесконечным влево этот тип оказывается, если у соответствующей вершины куба лишь конечное число нулей, и бесконечным вправо, если конечно число единиц. Для всех остальных точек (путей) упорядочение имеет тип упорядочения группы $\mathbb{Z}$; они составляют множество полной меры по мере Бернулли. Можно сказать, что мы переопределили порядок на классах смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$, при этом почти каждый класс смежности распался на счетное число линейно упорядоченных подмножеств.

Определение 3. *Автоморфизм Паскаля* [4] определяется как отображение P бесконечномерного куба (в любой его интерпретации) в себя, переводящее точку в непосредственно следующую в смысле адического порядка ($\prec$).

Для всех точек, за исключением счетного числа, следующая точка существует, и все точки, за исключением счетного числа, имеют и предыдущую точку. Поэтому автоморфизм Паскаля и обратный к нему определены всюду за исключением счетного числа точек (а точнее, за исключением элементов группы $\mathbb{Z}$ как подгруппы группы $\mathbf{Z}_2$). Легко понять, что преобразование P измеримо и даже непрерывно в слабой топологии всюду, кроме указанных исключений.

Предложение 1. *Автоморфизм Паскаля сохраняет меры Бернулли $\mu_p = \prod_1^\infty \{p, 1-p\}$, $0 < p < 1$, на бесконечномерном кубе и эргодичен относительно всех μ_p , $0 < p < 1$.*

Эргодичность следует из закона 0-1 Хьюитта–Севиджа или, иначе, из эргодичности действия группы S_∞ на том же пространстве. См. более подробный анализ ниже.

§2. Автоморфизм Паскаля как результат замены времени в одометре и случайные подстановки на группе $\mathbb{Z}$

Перейдем к более детальному рассмотрению адического автоморфизма Паскаля. Покажем, что автоморфизм Паскаля сохраняет меру. Действительно, переход к следующей точке есть подстановка конечного числа координат, поэтому сохранение меры следует из того, что мера Бернулли с одинаковыми сомножителями инвариантна относительно действия бесконечной симметрической группы, действующей подстановками координат. Из предыдущего ясно, что каждая орбита автоморфизма Паскаля принадлежит одной орбите одометра, а именно тому же классу смежности по $\mathbb{Z}$. Поэтому элемент $x - Px$ группы диадических чисел лежит в подгруппе $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$ и, следовательно, автоморфизм Паскаля можно представлять себе как результат замены времени в одометре.

Подчеркнем еще раз, что разбиение на орбиты автоморфизма Паскаля совпадает mod 0 по любой мере Бернулли с разбиением на орбиты группы финитных подстановок натурального ряда и множество мер Бернулли совпадает с множеством эргодических инвариантных мер относительно автоморфизма Паскаля.

Если с помощью двоичных разложений отождествить с точностью до множества меры нуль группу $\mathbf{Z}_2$ с единичным отрезком, то автоморфизм Паскаля перейдет в преобразование отрезка, принадлежащее классу так называемых счетных рациональных перекладываний.

Ниже будут даны явные формулы, показывающие, какую замену времени надо сделать в одометре, чтобы получить автоморфизм Паскаля. Как мы увидим, автоморфизм Паскаля перепорядочивает точки на классах смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$ (т. е. на траекториях одометра) весьма сложным образом.

То, что делается далее, аналогично тому, что проделано в работе [11] в более простом по сравнению с автоморфизмом Паскаля случае, а именно там проведено детальное сравнение обычного порядка с морсовским порядком, возникающим из анализа автоморфизма Морса.

Из определения автоморфизма Паскаля легко вывести, что он задается следующей формулой:

$$x \mapsto Px, \quad P(0^m 1^k \mathbf{10} **) = 1^k 0^m \mathbf{01} **, \quad m, k = 0, 1, \dots$$

Автоморфизм P^{-1} удобно записать в аналогичной форме:

$$P^{-1}(1^k 0^m \mathbf{01} **) = 0^m 1^k \mathbf{10} **, \quad m, k = 0, 1, \dots$$

Переход от P к P^{-1} меняет ролями m и k , т.е. 0 и 1. Автоморфизм P и обратный к нему P^{-1} определены для всех x с бесконечным числом нулей и единиц, т.е. на множестве $\mathbf{Z}_2 \setminus \mathbb{Z}$. С другой стороны, поскольку Px лежит в том же классе смежности, что и x , можно спросить, чему равна разность $Px - x$. Подытожим ответ в лемме:

Лемма 1. Автоморфизм Паскаля задается формулами

$$P(0^m 1^k 10^{**}) = 1^k 0^{m+1} 1^{**}, \quad m, k \geq 0,$$

или, в числовом представлении,

$$P(2^{m+k+1} - 2^m + r) = 2^{m+k+1} + 2^k - 1 + r, \quad m, k \geq 0, r \in \text{Ker}(\theta_{m+k+1}),$$

здесь гомоморфизм θ_n определен формулой $\theta_n: \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2/\mathbf{Z}_{2^n}$ и его ядро состоит из последовательностей с нулями на первых n местах.

Соответственно формула для замены переменной при переходе от одометра T к автоморфизму Паскаля P такова:

$$Px = T^{n(x)}x \equiv x + n(x),$$

где $x = 0^m 1^k 10^{**}$,

$$n(x) = Px - x = 1^{\min(k,m)} 0^{|m-k|} 10^\infty$$

или, в числовой форме,

$$n(2^{m+k+1} - 2^m) = 2^m + 2^k - 1.$$

Этим автоморфизм Паскаля задан для любого элемента $x \in \mathbf{Z}_2$, в разложении которого есть фрагмент 10 и фрагмент 01, т.е. задан для любого целого диадического числа, отличного от чисел вида $0^m 1^\infty$, $m \geq 0$ (целых отрицательных) и чисел вида $1^k 0^\infty$ (целых положительных чисел). Приведенные формулы для $n(x)$ легко проверяются для каждого из случаев $m > k$ и $m \leq k$.

Определим теперь функции $n_k(x)$ так, что $P^k x = T^{n_k(x)}x = n_k(x) + x$ для всех натуральных $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$n_0(x) = 0, \quad n_1(x) = n(x), \quad n_k(x) = P^k x - x, \quad \dots,$$

рекуррентная формула для $n_k(x)$ следует из определения:

Лемма 2. $n_{k+1} = n_1(n_k(x) + x) + n_k(x)$.

Доказательство. $P^{k+1}x \equiv T^{n_{k+1}(x)}x = n_{k+1}(x) + x$. Но $P^{k+1}x = P(P^k)x = T^{n_1(P^k x)}P^k x$; поэтому $P^{k+1}x = T^{n_1(P^k x) + n_k(x)}x$, т.е. $x + n_{k+1}(x) = n_1(P^k x) + n_k(x) + x = n_1(x + n_k(x)) + n_k(x) + x$. $\square$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P^k x &= n_1(n_{k-1}(x) + x) + n_{k-1}(x) = \dots \\ &= x + n_1(x) + n_1(n_1(x) + x) + \dots + n_1(n_{k-1}(x) + x). \end{aligned}$$

Заметим, что формулы, выражающие функции $n_k(x)$, $k > 1$, через функцию $n_1(x) = n(x)$, имеют, конечно, универсальный характер — они верны для замены времени в произвольном автоморфизме. Мы будем использовать только функцию $n(\cdot) = n_1(\cdot)$.

Особая орбита $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$ одометра состоит из счетного числа конечных орбит автоморфизма Паскаля: а именно, любое целое положительное число $x \in \mathbb{N}$

принадлежит конечной орбите с концевой точкой — числом $2^s - 1$, где s — число единиц в двоичном разложении числа x , а любое отрицательное целое число принадлежит конечной орбите с начальной точкой — числом $-2^s + 1$. Все остальные орбиты автоморфизма P как линейно упорядоченные множества имеют порядковый тип $\mathbb{Z}$.

В связи с формулой для Px возникает важный вопрос, упомянутый ранее: как преобразуются классы смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$, т. е. орбиты одометра, под действием автоморфизма Паскаля? Определим следующую подстановку множества всех целых чисел $\mathbb{Z}$:

$$\sigma_x: k \mapsto n(x + k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, автоморфизм Паскаля задает случайную (параметр случайности — это $x \in \mathbf{Z}_2$) бесконечную подстановку σ_x , отображающую $\mathbb{Z}$ (как счетное множество) на себя и имеющую бесконечное число бесконечных циклов. Образ меры Бернулли на $\mathbf{Z}_2$ при отображении $x \mapsto \sigma_x$ есть мера на группе $S^{\mathbb{Z}}$ всех бесконечных подстановок множества $\mathbb{Z}$. Эта мера существенно отличается от той меры, которая возникает при аналогичном анализе преобразования Морса [11] (там подстановки одноцикловые); анализ этой меры представляет значительный интерес и может быть использован для изучения свойств автоморфизма Паскаля.

Общий принцип состоит в том, что всякая замена времени в некоторой динамической системе с инвариантной мерой определяет меру на группе бесконечных подстановок времени, и свойства этой меры позволяют делать заключение о системе. Именно это придает смысл формулировке, что действие группы с инвариантной мерой может рассматриваться как действие случайной подстановки на этой группе. Но для этого надо выбрать *reference action* — отправную динамическую систему, в которой производится замена. В нашем случае (группа $\mathbf{Z}$) отправной системой служит действие одометра.

§3. Автоморфизм Паскаля и σ -конечная инвариантная мера

Оказывается, автоморфизм Паскаля (без упоминания и этого термина, и связи с треугольником Паскаля) был определен и использован в 1972 г. в работе Хаджана, Ито и Какутани [7] и в 1976 г. в работе Какутани [8].¹⁾ Авторы статьи [7] используют продакт-меры (меры Бернулли) с неравными вероятностями $((p, 1 - p), 0 < p < 1/2)$ на произведении двоеточий; эти меры инвариантны относительно автоморфизма Паскаля, но лишь квазиинвариантны относительно одометра. Используя коцикл Радона-Никодима, авторы строят новый автоморфизм R прямого произведения $\mathbf{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ с R -инвариантной σ -конечной мерой. Этот автоморфизм R является также специальным автоморфизмом над базой, в которой действует автоморфизм Паскаля, а «потолочная функция» (ceiling-function) равна определенной выше функции $n(x)$. Напомним, что поскольку $\int n(x) dm(x) = \infty$, глобальная мера сигма-конечна. Эргодичность автоморфизма R следует из эргодичности автоморфизма Паскаля, т. е. из закона 0-1 или из тривиальности «перестановочной» сигма-алгебры. В этом примере впервые обнаружено свойство некоторых эргодических автоморфизмов с бесконечной

¹⁾ Я благодарен профессору А. Хаджану, который после моего доклада об автоморфизме Паскаля в университете North-Eastern (Бостон) в апреле 2011 г. сообщил мне об этой работе.

мерой коммутировать с автоморфизмами, которые не сохраняют меру, — для автоморфизмов, сохраняющих конечную меру, такого быть не может. Весьма существенно, что траекторное разбиение автоморфизма Паскаля в естественном представлении есть подразбиение траекторного разбиения одометра на *счетное число частей*. В другой работе [8] автоморфизм Паскаля и приведенная выше формула $P(0^m 1^k 10^*) = 1^k 0^{m+1} 1^*$ использовались для одной статистической задачи («задачи Какутани»). Мы вернемся к этой связи в другом месте и свяжем этот вопрос со случайными блужданиями на группе $\mathbb{Z}$.

§4. Стационарная модель и кодирование автоморфизма Паскаля; мера Паскаля

Представим теперь действие автоморфизма Паскаля в более традиционных терминах, а именно, в виде сдвига в пространстве двусторонних последовательностей нулей и единиц (т. е. в двусторонне бесконечномерном кубе), снабженном некоторой мерой, инвариантной относительно сдвига. Именно это представление будет использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим стационарную модель автоморфизма Паскаля.

Определение 4. Определим для каждого $x \in \mathbf{Z}_2$ новую двустороннюю последовательность из нулей и единиц $y_n(x)$ следующим образом:

$$y_n = (P^n x)_1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

здесь $(\cdot)_1$ означает первый разряд (т. е. 0 или 1) диадического числа, стоящего в скобках. Тем самым задано отображение

$$S: \prod_1^\infty \{0; 1\} \equiv \mathbf{Z}_2 \longrightarrow Y = 2^{\mathbb{Z}} = \prod_{-\infty}^\infty \{0; 1\};$$

$$\mathbf{Z}_2 \ni x \mapsto Sx = y \equiv \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : y_n(x) = (P^n x)_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отображение S переводит меру Бернулли ν на бесконечномерном кубе $\prod_1^\infty \{0; 1\}$ в некоторую меру $S_*\nu \equiv \pi$ на другом (двусторонне бесконечномерном) кубе $Y = \prod_{-\infty}^\infty \{0; 1\}$, которую мы назовем *мерой Паскаля*.

В терминах путей в графе Паскаля приведенное отображение есть сопоставление пути как последовательности вершин графа Паскаля последовательности изменений первого ребра в процессе адической эволюции пути.

Теорема 1. *Разбиение пространства $\mathbf{Z}_2$ на два множества по значениям первой координаты есть (односторонняя) образующая автоморфизма Паскаля. Иначе говоря, почти всякая точка однозначно восстанавливается по значениям последовательности первых координат ее образов под действием положительных степеней автоморфизма Паскаля:*

$$x \leftrightarrow \{(P^n x)_1\}_{n \in \mathbb{N}}$$

есть биекция для почти всех $x \in \mathbf{Z}_2$. Таким образом, отображение S осуществляет изоморфизм пространств с мерой, переводящий автоморфизм Паскаля P пространства $\mathbf{Z}_2$ с мерой Бернулли ν в двусторонний (правый) сдвиг в пространстве $Y = 2^{\mathbb{Z}}$ со стационарной мерой $\pi = S_*\nu$.

Доказательство. Легко видеть, что два несовпадающих элемента группы $\mathbf{Z}_2$, отличающиеся разрядом с минимальным номером n , порождают последовательности первых координат $(P^k x)_1$, которые будут различаться хотя бы один раз в разрядах с номерами, меньшими 2^n . $\square$

Замечание. 1. Разбиение пространства последовательностей по значению первой координаты, очевидно, не является образующим для одометра.

2. Множество, на котором сосредоточена мера Паскаля, представляет большой интерес, и мы изучаем его далее. В работе [16] (см. также [10]) доказано, что число цилиндров в образе («сложность» автоморфизма Паскаля), т. е. число слов длины n , асимптотически равно $n^3/6$.

Определение 5. Будем называть S -образ точки x *паскалевским образом*. Он определен для всех $x \in \mathbf{Z}_2$ с бесконечным числом нулей и единиц.

Для изучения автоморфизма Паскаля удобно параметризовать целые диадические числа, т. е. элементы из $\mathbf{Z}_2$, содержащие бесконечное число 0 и 1, с помощью последовательностей пар натуральных чисел $(m_i(x), k_i(x))$, которые определяются из равенства

$$x = (0^{m_1(x)} 1^{k_1(x)} 100^{m_2(x)} 1^{k_2(x)} 1000^{m_3(x)} 1^{k_3(x)} \dots).$$

Иначе говоря, числа $m_i(x) \geq 0$, $k_i(x) \geq 0$ определяют длины слов из нулей ($m_i(x)$) и единиц ($k_i(x)$), стоящих между двумя последовательными $((i-1)$ -м и i -м) вхождениями слова «10» в двоичное разложение целого диадического числа x . Разумеется, обычные координаты x_i тривиально восстанавливаются по последовательности пар $(m_i(x), k_i(x))$. Будем называть эти координаты *парными координатами*.

Очевидно, что векторы $(m_i(x), k_i(x))$ как функции от x образуют последовательность (по $i \in \mathbb{Z}$) независимых одинаково распределенных случайных двумерных векторов, а распределение парных координат при всех i таково:

$$\Pr\{m_i = m, k_i = k\} = 2^{-(m+k-2)}, \quad m, k = 0, 1, 2, \dots$$

Определенное выше отображение $S: \mathbf{Z}_2 \rightarrow Y = \prod_{-\infty}^{+\infty} \{0; 1\}$ можно представить в более конкретной форме. Это приводит к понятию *опорных слов*, введенному выше.

Предположим, что первая парная координата элемента $x \in \mathbf{Z}_2$ равна $m_1(x) = m \geq 0$, $k_1(x) = k \geq 0$; рассмотрим элементы $x, Px, P^2x, \dots, P^s x$, $s = C_{m+k+1}^m$, и выпишем первые координаты этих элементов. Мы получим слово длины s , которое по определению и будет началом S -образа элемента x .

Лемма 3. Первые координаты элементов $x, Px, P^2x, \dots, P^s x$, $s = C_{m+k+1}^m$, образуют опорное слово $O(m+1, k)$ в смысле определения из §1.

Правила изменения парных координат под действием автоморфизма Паскаля, т. е. выражения $m_i(Px)$, $k_i(Px)$ через $m_i(x)$, $k_i(x)$, легко выписать, но для нас важно лишь правило изменения первой координаты под действием автоморфизма Паскаля.

Непосредственно проверяется следующее индукционное правило изменения парных координат:

$$\begin{aligned} &\text{если } m_1(x) = 0, \text{ то } m_1(Px) = \delta_{k_1(x)}, \quad k_1(Px) = k_1(x) + 1; \\ &\text{если } m_1(x) > 0, \text{ то } m_1(Px) = (m_1(x) - 1)\delta_{k_1(x)}, \quad k_1(Px) = k_1(x) - 1. \end{aligned}$$

Однако наиболее существенна структура опорных слов, конкатенации которых и составляют почти все траектории по мере Паскаля (т. е. ансамбль Паскаля).

Пример. Экзотическая последовательность. Рассмотрим S -образ протейшей $(1/2, 1/2)$ -последовательности, а именно точки $x = (10)^\infty \in \mathbf{Z}_2$ (x как вещественное число равно $2/3$). Отвечающий ей путь в графе Паскаля есть центральный путь, проходящий через вершины графа Паскаля с координатами $(n, [(n+1)/2])$, $n = 0, \dots$,

$$00 \rightarrow 11 \rightarrow 21 \rightarrow 32 \rightarrow \dots \rightarrow 43 \rightarrow 54.$$

Вот начало паскалевского образа точки $x = (10)^\infty$ (или соответствующего пути в графе Паскаля:

$$\begin{aligned} x = 1010101010* \rightarrow Px = 01101010* \rightarrow \dots \\ \rightarrow P^5x = 11000110* \rightarrow \dots \rightarrow P^{14}x = 00011110* . \end{aligned}$$

Соответствующая конкатенация опорных слов, составляющая последовательность Sx в ансамбле Паскаля, есть

$$Sx = O(0, 0)O(1, 0)O(2, 1)O(3, 2)O(4, 3) \dots O(n, n+1) \dots$$

Явный вид опорного слова $(4, 3)$ приведен ниже.

Иначе говоря, паскалевский (S)-образ этой последовательности есть последовательность первых координат адически упорядоченных вершин средних гиперплоскостей кубов, размерность которых последовательно увеличивается на единицу, $n = 1, 2, \dots$.

Проще описать эту последовательность следующим образом. Рассмотрим множество F_n всех натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит в точности $2n+1$ знаков (старший знак равен 1) (т. е. всех целых чисел в интервале $(2^{2n}, 2^{2n+1} - 1)$), причем число нулей равно $n+1$, т. е. на единицу больше числа единиц (n); упорядочим эти числа в каждом множестве F_n согласно адическому порядку, а затем соединим их в единую последовательность $F_1, F_2, \dots$. Мы получим последовательность натуральных чисел, начало которой таково:

$$F_0 = \{0\}, \quad F_1 = \{1, 2, 4\}, \quad F_2 = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24\}, \quad F_3 = \dots,$$

т. е.

$$0, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, \dots$$

Тогда S -образ точки $x = (10)^\infty$ есть последовательность *четностей* этих чисел; в данном случае

$$Sx = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

Определение 6. Назовем паскалевский образ Sx точки $x = (10)^\infty$ *экзотической последовательностью нулей и единиц*.

Легко выписать теперь паскалевский образ для общего элемента $x \in \mathbf{Z}_2$, т. е. для общего пути в графе Паскаля. Для этого выпишем для данного x (т. е. для

пути в графе Паскаля) все номера координат $r_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, для которых $x_{r_i} x_{r_i+1} = 10$. Положим

$$\sum_{t=1}^{r_i(x)} x_t = \bar{k}_i(x), \quad \bar{m}_i(x) = r_i(x) - \bar{k}_i(x).$$

Нетрудно выразить $\bar{m}_i$, $\bar{k}_i$ через суммы парных координат $m_i(x)$, $k_i(x)$, $i = 1, \dots$. В разобранным примере, где $x = (10)^\infty$, очевидно, имеем $r_i = 2i - 1$, $k_i = i - 1$, $\bar{m}_i = i$.

Теорема 2. Для $x \in \mathbf{Z}_2$ образ $Sx \in \prod_{-\infty}^{\infty} \{0; 1\}$ есть последовательность конкатенаций опорных слов с монотонно возрастающими индексами. Для положительных индексов она выглядит так:

$$O(\bar{m}_1(x), \bar{k}_1(x)) O(\bar{m}_2(x), \bar{k}_2(x)) \dots,$$

где параметры $\bar{m}_i$, $\bar{k}_i$ определены выше.

Таким образом, паскалевский образ Sx точки x есть соответствующая последовательность первых координат (или четностей в числовой интерпретации). В частности, для случая точки $x = (10)^\infty$ получаем экзотическую последовательность.

Наращение параметров опорных слов $O(\bar{m}, \bar{k})$ контролируется следующим простым правилом:

Лемма 4. Параметры $(\bar{m}_i, \bar{k}_i)$ очередного опорного слова $O(\bar{m}_i, \bar{k}_i)$ выражаются через параметры предыдущего опорного слова $(\bar{m}_{i-1}, \bar{k}_{i-1})$ следующим образом:

$$\bar{m}_i = \bar{m}_{i-1} + 1, \quad \bar{k}_i = \bar{k}_{i-1} + \delta_{m_i} k_i,$$

где $m_i = m_i(x)$, $k_i = k_i(x)$ — определенные выше парные координаты ($\delta_t = 1$, если $t = 0$, $\delta_t = 0$, если $t > 0$).

Напомним, что $m_i(x)$, $r_i(x)$ — независимые (между собой и по i) случайные величины с геометрическим распределением. Любопытно, что координата m (первая парная координата) растет детерминированно, увеличиваясь каждый раз на единицу: $m \mapsto m + 1$, а вторая координата k растет случайно со средним значением приращения, равным $+1$.

Таким образом, почти всякая последовательность по мере Паскаля есть конкатенация растущих по длине опорных слов $O(m + 1, k)$, которые строятся по элементу $x \in \mathbf{Z}_2$, т. е. по пути в графе Паскаля, а точнее, по его парным координатам $m_i(x)$, $k_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}$. Нам достаточно изучить лишь положительную часть последовательности ($i > 0$), так как лишь по ней можно судить о дискретности или непрерывности спектра автоморфизма Паскаля. Нетрудно доказать, что координаты с отрицательными номерами однозначно определяются по координатам с положительными номерами для почти всех точек по мере Паскаля.

Пример динамики автоморфизма Паскаля. Рассмотрим пример фрагмента траектории автоморфизма Паскаля:

$$m_1 = 3, \quad k_1 = 3, \quad x = 00011110.$$

Длина фрагмента равна $C_{m_1+k_1+1}^{k_1}$, но удобнее начать фрагмент с последнего слова предыдущего фрагмента, поэтому у нас число слов $C_7^3 + 1 = 36$: $x \rightarrow$

$Px = 11100001 \rightarrow P^2x \rightarrow \dots \rightarrow P^{35} = 00001111$ (напомним, что следить нужно за первым появлением слова **10** и затем применять алгоритм). Мы расположили цепочку из 36 последовательных образов точки x в таблицу 6×6 :

00011110	11100001	11010001	10110001	01110001	11001001
10101001	01101001	10011001	01011001	00111001	11000101
10100101	01100101	10011001	01010101	00110101	10001101
01001101	00101101	00011101	11000011	10100011	10001101
10010011	01010011	00011101	10001011	01001011	00101011
00011011	10000111	01000111	00100111	00010111	00001111

Последовательность первых знаков приведенного отрезка траектории есть опорное слово $O(4, 3)$; см. §1.

Следующие данные дают представление о распределении вероятностей по мере Паскаля цилиндров длин от 6 до 10.¹⁾

Длина слова	Число групп	Число элементов по группам	Мера групп
6	3	5	0,312484741
		12	0,374969482
		20	0,312213898
7	4	2	0,124998093
		14	0,437492371
		16	0,249990463
		24	0,187408447
8	5	1	0,062498093
		12	0,374994278
		19	0,296865463
		20	0,156238556
		28	0,109274864
9	5	10	0,312494278
		22	0,343740463
		24	0,187488556
		24	0,093736649
		32	0,062393188
10	6	8	0,249994278
		21	0,328117371
		28	0,218738556
		29	0,113267899
		28	0,054672241
		36	0,03504467

Обращает на себя внимание разделение цилиндров на несколько групп, внутри которых вероятности цилиндров равны. Это упрощает получение нижних оценок роста масштабированной энтропии, необходимых для доказательства непрерывности спектра автоморфизма Паскаля по энтропийному сценарию [6], приведенному ниже.

¹⁾Эти вычисления проделали по моей просьбе аспиранты И. Е. Манаев и А. Р. Минабутиных.

§5. Критерии непрерывности спектра автоморфизма

Мы формулируем несколько необходимых и достаточных условий того, что спектр автоморфизма является чисто непрерывным, точнее, что в ортогональном дополнении к константам в пространстве $L^2(I^\infty, \mu)$ спектр унитарного оператора U_P , ассоциированного с автоморфизмом с помощью формулы $U_P f(x) = f(Px)$, непрерывен. Эта задача для автоморфизма Паскаля вместе с его определением была поставлена автором в 1980 г. [6] и рассматривалась позже в серии работ [14], [16]–[19] и др, где были изучены различные полезные свойства автоморфизма Паскаля, однако задача до сих пор не была решена.

5.1. Энтропийный подход. Первоначальный план решения этой задачи был связан с масштабированной энтропией, усреднением метрик и др. (см. [6], [10]). Предлагавшийся способ доказательства непрерывности спектра (см. [6]) был основан на том, что условие чистой непрерывности спектра равносильно тому, что усреднение любой полуметрики вдоль траектории есть тривиальная (постоянная) метрика, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \rho(P^s x, P^s x') = \text{const}$$

для почти всех по мере $\mu \times \mu$ пар x, x' .

В частности, в работе [6] доказана следующая теорема. Для того чтобы спектр унитарного оператора U_T в $L^2(X, \mu)$, отвечающего автоморфизму T пространства Лебега (X, μ) , был в ортогональном дополнении к константам чисто непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любой допустимой полуметрики, у которой предельное усреднение допустимо, масштабирующая последовательность энтропии была ограниченной.

Оговорка о допустимости предельного усреднения не нужна, потому что его допустимость имеет место для любой начальной допустимой метрики, как показано в [6]; первоначально допустимость предельного усреднения была доказана для класса компактных и ограниченных допустимых полуметрик. С другой стороны, в [6] доказано, что постоянство усредненной полуметрики равносильно неограниченности масштабирующей последовательности для энтропии, т. е. тому, что ε -энтропия пространств, полученных последовательными усреднениями, стремится к бесконечности. Для метрик Хэмминга близкий факт был ранее доказан в [15]. Поэтому можно было бы доказывать непрерывность спектра, ограничивая снизу рост энтропии допредельных усредненных метрик некоторой растущей последовательностью. Более того, это было бы достаточно сделать только для разрезных полуметрик, которые всегда фигурировали в эргодической теории не как метрики, а как образующие разбиения. Напомним, что *разрезной полуметрикой* называется полуметрика, определяемая конечным разбиением пространства с мерой на измеримые подмножества $\{A_i\}$, $i = 1, \dots, k$, следующим образом:

$\rho(x, y) = \delta_i(x) \delta_i(y)$, где $i(x)$ — номер множества A_i , в котором лежит точка x .

Подводя итог, можно сформулировать следующий критерий непрерывности спектра автоморфизма.

Теорема 3. *Спектр оператора U_T в ортогональном дополнении к константам автоморфизма T непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

(1) *предел усреднений произвольной разрезной полуметрики ρ есть константа:*

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(T^k x, T^k y) = \text{const} \quad \text{n. н.}$$

(2) *Энтропия усреднений метрики неограниченно растет для произвольной начальной полуметрики.*

Подчеркнем, что разбиение, порождающее разрезную полуметрику, в этой теореме отнюдь не предполагается образующим.

5.2. Почти периодичность по Безиковичу–Хэммингу и свойство ВНН. Рассмотрим следующие полуметрики в пространствах бесконечных в одну или обе стороны последовательностей $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) символов $x_n \in A$ в конечном алфавите A :

$$\rho(x, y) = \liminf_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \#\{k : |k| \leq n, \{x_k \neq y_k\}\}$$

для бесконечных в обе стороны последовательностей;

$$\rho(x, y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k : k = 1, \dots, n, \{x_k \neq y_k\}\}$$

для односторонне бесконечных последовательностей. Эту полуметрику следует называть метрикой Безиковича–Хэмминга (ВН), поскольку она является предельной для метрик Безиковича B_p при $p \rightarrow \infty$ и предельной по n для метрик Хэмминга на конечных последовательностях.

Для любой стационарной (инвариантной относительно одностороннего или двустороннего сдвига) меры μ на пространстве $A^{\mathbb{Z}}$ ($A^{\mathbb{N}}$) в определении метрики $\liminf$ можно заменить на $\lim$ для почти всякой последовательности (на основании эргодической теоремы).

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *почти периодической по Безиковичу–Хэммингу* (ВН-почти периодической), если совокупность ее сдвигов (двусторонних или односторонних) относительно компактна в полуметрике ВН.

В основе плана доказательства не дискретности спектра лежит следующий известный факт:

Лемма 5. *Для того чтобы сдвиг S в пространстве $A^{\mathbb{Z}}$ последовательностей в конечном алфавите $A = \{1, \dots, l\}$ со стационарной (инвариантной относительно сдвига) мерой μ имел чисто точечный спектр, необходимо и достаточно, чтобы почти все реализации $\{x_n\} \in A^{\mathbb{Z}}$ ($\{x_n\} \in A^{\mathbb{N}}$) являлись ВН-почти периодическими на $\mathbb{Z}$ (на $\mathbb{N}$) со значениями в A .*

Действительно, достаточно сослаться на теорему фон Неймана о дискретном спектре и заметить, что ограничение всякой ограниченной измеримой функции

на компактной абелевой группе на счетную $\mathbb{Z}$ -подгруппу, рассматриваемое как функция на $\mathbb{Z}$, является ВН-почти периодическим.¹⁾

Таким образом, поскольку ВН-почти периодичность траектории равносильна на относительной ВН-компактности сдвигов траектории, для установления наличия непрерывного спектра необходимо убедиться в некомпактности сдвигов почти любой траектории. Таким образом, процедура состоит в том, чтобы доказать, что *почти всякая по данной стационарной мере траектория отделена от периодических траекторий на ненулевое, не зависящее от длины периода ВН-расстояние*. Фактически достаточно доказать отделенность не от всех периодических последовательностей, а от тех, у которых периоды есть произвольные конечные подслова данной последовательности.

Как правило, это свойство достаточно доказывать только для одной типичной траектории.

Пример. Для доказательства существования непрерывной компоненты в спектре автоморфизма Морса (см. [11]) достаточно сначала проверить, что расстояние между знаменитой последовательностью Морса–Туэ (последовательность 0110100110010110..., т.е. неподвижная точка подстановки Морса–Хедлунда) и любой периодической последовательностью не меньше $1/2$. Перенос этого факта на почти любую в смысле меры Морса траекторию не представляет труда, так как почти любая траектория имеет структуру, сходную со структурой последовательности Морса–Туэ. Действительно, чтобы получить почти любую последовательность по мере Морса, нужно в последовательности Морса–Туэ в независимые случайные моменты вида $2^{n(\omega)}$ с геометрическим распределением по n сделать замену («совершить сбой») $0 \leftrightarrow 1$. При этом оценка расстояния, о котором шла речь выше, между измененными словами и периодическими не изменится. Этот факт не зависит даже от распределения моментов «сбоев».

В то же время автоморфизм Морса имеет дискретную часть спектра, что согласуется с тем фактом, что после отождествления траектории с ее «антиподом» $\{x_n\} \leftrightarrow \{\bar{x}_n\}$, $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$, факторавтоморфизм автоморфизма Морса на факторпространстве совпадает с одометром.

Для доказательства полной непрерывности спектра автоморфизма в нашей ситуации надо проверить наличие более сложного свойства (которое не имеет места для автоморфизма Морса), а именно *равномерной не почти периодичности*.

Рассмотрим произвольную цилиндрическую функцию $f(\cdot)$, например, со значениями $\{0; 1\}$, зависящую от конечного числа координат $x_1, \dots, x_k$, и все ее сдвиги $f(T^k \cdot)$, $k \in \mathbb{Z}$. Слова длины k разобьем на m групп, обозначим их $b_1, \dots, b_m$, $b_i \in B$. Цилиндрическим разбиением пространства $A^{\mathbb{Z}}$ называется конечное разбиение пространства, элементами которого являются элементарные цилиндры (элементарный цилиндр определяется как множество всех

¹⁾ Следует отметить большой разницей в терминологии в теории почти периодических функций. Например, почти периодической последовательностью называют (см. [13]) минимальные или рекуррентные последовательности, т.е. такие, у которых каждое встречающееся слово повторяется бесконечное число раз. Но они, вообще говоря, не являются даже ВН-почти периодическими, хотя последнее условие нужно считать самым слабым условием почти периодичности. По традиции, введенной фон Нейманом, почти периодичность всегда связана с относительной компактностью множества групповых сдвигов.

последовательностей, у которых на данных местах, например, на местах $n = 1, 2, \dots, k$, стоит одно из слов набора $b_i = x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i$. Цилиндрическому разбиению отвечает цилиндрическая факторизация, т. е. естественное отображение пространства $A^{\mathbb{Z}}$ в пространство $B^{\mathbb{Z}}$, коммутирующее со сдвигом. Если $m > 1$ (т. е. B состоит из двух или более наборов слов), то цилиндрическая факторизация называется нетривиальной.

Определение 8. NVH-последовательностью называется последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, обладающая следующим свойством: для любой цилиндрической функции $f = f(x_1, \dots, x_k)$ с нулевым интегралом последовательность $\{f(T^k \cdot)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, не является ВН-почти периодической последовательностью (по k); разумеется, в частности, и сама последовательность $\{x_n\}$ не почти периодична. Будем кратко именовать NVH-последовательности *вполне не почти периодическими*.

Теорема 4. Для того чтобы сдвиг S в пространстве $A^{\mathbb{Z}}$ последовательностей в конечном алфавите $A = \{1, \dots, l\}$ со стационарной (инвариантной относительно сдвига) мерой μ имел чисто непрерывный спектр (в ортогональном дополнении к константам), необходимо и достаточно, чтобы почти все реализации $\{x_n\} \in A^{\mathbb{Z}}$ являлись NVH-последовательностями.

Доказательство. Из определения и предыдущей теоремы следует, что при любой цилиндрической факторизации непрерывная часть в спектре присутствует. Требуется проверить это для произвольной факторизации, т. е. для факторизации по произвольному конечному разбиению. Мы используем следующий аргумент. Прежде всего, любое конечное разбиение можно сколь угодно точно аппроксимировать цилиндрическими разбиениями. Если перейти к соответствующим *разрезным полуметрикам*, то это означает, что в топологии сходимости по мере

$$(\mu \times \mu)\{(x, y) : |\rho(x, y) - \rho'(x, y)| > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Среднее расстояние между точками для всех полуметрик ρ_ε можно считать фиксированным и равным среднему расстоянию D по метрике ρ .

Рассмотрим усреднение этих неравенств и используем эргодическую теорему:

$$(\mu \times \mu)\left\{(x, y) : \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} |\rho(T^k x, T^k y) - \rho'(T^k x, T^k y)| > \varepsilon\right\} < \varepsilon(1 - \varepsilon) + 2D\varepsilon.$$

Поскольку предельное усреднение метрики ρ_ε есть постоянная метрика, равная для почти всех пар среднему расстоянию D , и поскольку ε произвольно, то усреднение метрики ρ также есть постоянная метрика. Согласно упомянутому выше результату, это означает непрерывность спектра одометра T . $\square$

5.3. Основная лемма. Главное комбинаторное свойство почти всякой (по мере Паскаля) последовательности, т. е. последовательности четностей конкатенаций опорных слов, отвечающих почти всем точкам $\mathbf{Z}_2$, состоит в следующем:

Лемма 6. Паскалевский образ почти любой по любой бернуллиевской мере μ_p , $0 < p < 1$, точки $x \in \mathbf{Z}_2$ обладает свойством NVH, т. е. является последовательностью нулей и единиц, вполне не почти периодической по ВН-метрике.

Доказательство будет приведено в другом месте; его структура идентична для почти всех точек указанного типа, и поэтому оно сводится к доказательству этого факта лишь для одной последовательности, например той, которая названа выше экзотической. Коротко говоря, все основывается на том, что любая достаточно длинная конечная периодическая последовательность с периодом, составленным из любого фрагмента экзотической (или ей подобной) последовательности, отстоит в смысле ВН-метрики от достаточно длинного фрагмента самой этой последовательности на некоторую универсальную константу. Это обстоятельство имеет чисто комбинаторную (или числовую) природу. В приведенном выше более простом примере с автоморфизмом Морса доказательство не почти периодичности основывалось на аналогичном свойстве.

Следствие 1. *Аutomорфизм Паскаля (относительно образа любой меры Бернулли) имеет в ортогональном дополнении к константам непрерывный спектр.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Экспериментальное наблюдение математических фактов*, МЦНМО, М., 2006.
- [2] V. Arnold, *Statistics of the symmetric group representations as a natural science question on asymptotic of Young diagrams*, in: Representation Theory, Dynamical Systems, and Asymptotic Combinatorics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 217, 2006, 1–8.
- [3] А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*, ДАН СССР, **259**:3 (1981), 526–529.
- [4] А. Вершик, *Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **115** (1982), 72–82.
- [5] A. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants*, Markov Processes Related Fields, **16**:1 (2010), 169–185.
- [6] А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром*, Алгебра и анализ, **23**:1 (2011), 111–135.
- [7] A. Hajan, Y. Ito, S. Kakutani, *Invariant measure and orbits of dissipative transformations*, Adv. in Math., **9**:1 (1972), 52–65.
- [8] S. Kakutani *A problem of equidistribution on the unit interval* $[0, 1]$, in: Lecture Notes in Math., vol. 541, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 369–375.
- [9] А. Кушниренко, *О метрических инвариантах типа энтропии*, УМН, **22**:5(137) (1967), 57–65.
- [10] А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля*, в сб.: Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы, вып. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, **378** (2010), 58–72.
- [11] A. Vershik, *Orbit theory, locally finite permutations and Morse arithmetic*, in: Dynamical Numbers: Interplay between Dynamical Systems and Number Theory, Contemp. Math., vol. 532, 2010, 115–136.
- [12] А. Вершик, С. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, ВИНТИ, М., 1985, 3–56.
- [13] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*, УМН, **64**:5(389) (2009), 21–96.
- [14] K. Petersen, K. Schmidt, *Symmetric Gibbs measures*, Trans. Amer. Math. Soc., **349**:7 (1997), 2775–2811.

- [15] S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel Math. J., **100** (1997), 180–207.
- [16] X. Mela, *Dynamical properties of the Pascal adic and related systems*. PhD Thesis, Univ. North Carolina at Chapel Hill, 2002.
- [17] É. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli*, Ann. Inst. H. Poincaré (B), Prob. Statist., **40**:2 (2004), 133–139.
- [18] X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25**:1 (2005), 227–256.
- [19] É. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation*, Stoch. Dyn., **5**:1 (2005), 1–25.

Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
28 февраля 2011 г.