Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Родин, Смещение пространств с помощью преобразований Харди и Беллмана, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 89–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:54:01

УДК 517.5

Смещение пространств с помощью преобразований Харди и Беллмана

© 2000. В. А. Родин

Преобразование тригонометрического ряда с помощью замены его коэффициентов на их арифметические средние порождает оператор Харди [1]: для функции $f \in L_1$, имеющей косинус-ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots\}), \quad (1)$$

положим

$$H(f)(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\bar{a}) \cos kx, \quad \text{где } H_k(\bar{a}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i. \quad (2)$$

Для функции $g \in L_p$, $p > 1$, имеющей ряд Фурье вида (1), определим оператор Беллмана B следующим образом [2]:

$$B(g)(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\bar{a}) \cos kx, \quad \text{где } B_k(\bar{a}) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{i}. \quad (3)$$

Известно, что для $1 \leq p < \infty$ пространства L_p инвариантны относительно H , а L_∞ — нет [1]. Для $1 < p \leq \infty$ эти пространства инвариантны относительно B , а пространство L_1 не инвариантно. Расширяя рамки рассматриваемых пространств, П. Л. Ульянов (см. [3]) поставил задачу о нахождении необходимых и достаточных условий на N -функцию в шкале пространств Орлича L_N , гарантирующих инвариантность данного пространства относительно H и B . Эта задача была решена Е. Алшынбаевой [3]. Затем в работах К. Андерсена [4] и О. Я. Берчияна [5] были получены аналогичные результаты для широкого класса симметричных пространств.

Изучение поведения операторов H и B в других пространствах, «близких» к краям шкалы L_p , а именно в Re^+H и BMO , описано в работах Б. И. Голубова [6, 8]. Подводя итоги изложенному выше, можно заметить, что для различных пространств выяснялись условия их инвариантности относительно преобразований Харди и Беллмана или доказывалась их неинвариантность. Не инвариантные относительно оператора Харди пространства «находились около» L_∞ , а не инвариантные относительно оператора Беллмана — около пространства L_1 . При этом закон «искажения» пространств (например, BMO) не исследовался. В настоящей работе для некоторых классов симметричных пространств, в частности для пространств Орлича, а также для пространств BMO и Re^+H установлена точная граница смещения пространств — образов операторов H и B относительно пространств их определения.

Далее все функции из области определения операторов будем считать суммируемыми на $[0, \pi]$, продолженными четным образом на $[-\pi, \pi]$ и 2π -периодическими. Пусть φ и ψ — вогнутые возрастающие на $[0, \pi]$ функции. Пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M(\psi)$, так же, как пространство Орлича L_N ,

являются важнейшими представителями класса симметричных пространств. Определение симметричных пространств см. в [7].

ТЕОРЕМА 1. (1) Для $0 < \beta < \infty$ оператор H ограниченно действует из пространства Марцинкевича $M(\tau \ln^\beta(e\pi/\tau))$ в пространство Марцинкевича $M(\tau \ln^{1+\beta}(e\pi/\tau))$.

(2) Оператор H является неограниченным как оператор из $M(\tau \ln^\beta(e\pi/\tau))$ в любое симметричное пространство, строго вложенное в $M(\tau \ln^{1+\beta}(e\pi/\tau))$, т. е. такое, что $E \subsetneq M(\tau \ln^{1+\beta}(e\pi/\tau))$.

Известно (см. [10, с. 248]), что пространство Орлича с быстро растущей N -функцией совпадает с пространством Марцинкевича. Поэтому из теоремы 1 в качестве следствия получаем такое утверждение:

ТЕОРЕМА 2. (1) Для $0 < \alpha < \infty$ оператор H ограниченно действует из пространства Орлича $L_{N(\alpha)}$, где $(N(\alpha))(u) = \exp(|u|^\alpha) - 1$, в пространство Орлича $L_{\bar{N}(\alpha)}$, где $(\bar{N}(\alpha))(u) = \exp(|u|^{\alpha/(\alpha+1)}) - 1$.

(2) Оператор H является неограниченным как оператор из $L_{N(\alpha)}$ в любое симметричное пространство E , если $E \subsetneq L_{\bar{N}(\alpha)}$.

Для случая $\alpha = 1$ данное утверждение доказано в работе [10]. Утверждения теорем 1 и 2 справедливы и в предельном случае $\beta = 0$ и $\alpha = \infty$.

ТЕОРЕМА 3. (1) Оператор H ограниченно действует из L_∞ в $M(\tau \ln(e\pi/\tau))$ (или в L_N с $N(u) = \exp |u| - 1$).

(2) Оператор H является неограниченным как оператор из L_∞ в любое симметричное пространство, если $E \subsetneq M(\tau \ln(e\pi/\tau))$.

Из теоремы 2 можно получить утверждения о поведении оператора H в пространстве BMO .

ТЕОРЕМА 4. Оператор H ограниченно действует из BMO в пространство Орлича L_Φ с $\Phi(u) = \exp |u|^{1/2} - 1$ и является неограниченным как оператор из BMO в любое симметричное пространство, если $E \subsetneq L_\Phi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 4 следует инвариантность пространства BMO относительно оператора H , ранее доказанная Голубовым [6]. Действительно, если $E = L_N$, где $N(u) = \exp |u| - 1$, то, поскольку $L_N \subset L_\Phi$, в силу теоремы 4 оператор H является неограниченным оператором из BMO в L_N . Неравенство Джона–Ниренберга (см. [11, с. 231]) можно интерпретировать как строгое вложение $BMO \subsetneq L_N$; следовательно, H не является ограниченным оператором из BMO в BMO . Операторы H и B в определенном смысле (см. [6]) двойственны, а пространство Марцинкевича является сопряженным к пространству Лоренца (см. [8, с. 54]). В связи с этим для оператора Беллмана справедливы результаты, двойственные к теоремам 1–4.

Сформулируем один из них.

ТЕОРЕМА 5. (1) Для $0 \leq \beta < \infty$ оператор B ограниченно действует из пространства Орлича $L(\ln^+ L)^{1+\beta}$ в пространство Орлича $L(\ln^+ L)^\beta$.

(2) Оператор B является неограниченным как оператор из симметричного пространства F в $L(\ln^+ L)^\beta$, если $F \not\supseteq L(\ln^+ L)^{1+\beta}$.

Автор выражает благодарность Б. И. Голубову за предоставленную им информацию и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H. Messenger of Math., **58**, 50–52 (1928). 2. Bellman R. Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 741–744 (1994). 3. Алишынбаева Е. Матем. заметки, **25**, № 5, 645–651 (1979). 4. Andersen K. C. Pacif. J. Math., **100**, No. 2, 243–248 (1982). 5. Берчиан О. Я. Матем. заметки, **53**, № 4, 3–12 (1993). 6. Голубов Б. И. Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. МФТИ, М., 1995, с. 56–64. 7. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978. 8. Голубов В. И. Матем. сборник, **185**, № 11, 31–40 (1994). 9. Родин В. А. Phystech journal, **3**, No. 4, 79–83 (1997). 10. Андриенко В. А. В кн.: Математический анализ. 1970, Итоги науки, ВИНТИ, М., 1971, с. 203–262. 11. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.

Воронежский госуниверситет,
математический факультет

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.

УДК 517.5

Совместный спектральный радиус и инвариантные подпространства

© 2000. Ю. В. ТУРОВСКИЙ, В. С. ШУЛЬМАН

Пусть M — ограниченное множество элементов (комплексной) нормированной алгебры A , $\|M\| = \sup\{\|a\| : a \in M\}$ и M^n — множество всех произведений по n элементов из M . Число $\rho(M) = \inf \|M^n\|^{1/n}$ называется [1] *спектральным радиусом* множества M . Если $\rho(M) = 0$, то M называется *квазинильпотентным*. Множество называется *конечно (компактно) квазинильпотентным*, если все его конечные (соответственно предкомпактные) подмножества квазинильпотентны. Для множества операторов $M \subset B(\mathfrak{X})$ мы также рассматриваем *существенный спектральный радиус* $\rho_e(M)$, равный спектральному радиусу образа множества M в алгебре Калкина $B(\mathfrak{X})/K(\mathfrak{X})$, где $B(\mathfrak{X})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и $K(\mathfrak{X})$ — ее идеал, состоящий из всех компактных операторов. Первые применения этих понятий в теории инвариантных подпространств были найдены в [2], где установлено, что алгебра вольтеровых (т. е. компактных квазинильпотентных) операторов имеет гиперинвариантное (инвариантное относительно всех операторов из алгебры и ее коммутанта) подпространство (ГИП), и в [3] (подробнее см. в [4]), где, в частности, доказано, что два коммутирующих триангулируемых семейства компактных операторов триангулируемы одновременно. Развитие этой техники в [5] позволило первому автору решить проблему вольтеровской полугруппы, т. е. доказать, что любая (мультипликативная) полугруппа вольтеровских операторов имеет (здесь и далее подразумевается нетривиальное) ГИП. Мы приводим другие приложения в теории инвариантных подпространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset B(\mathfrak{X})$ — предкомпактное множество операторов, такое, что $\rho_e(M) < \rho(M) = 1$. Если порожденная им полугруппа неограничена, то она имеет ГИП.