Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Варченко, Р. Римани, В. О. Тарасов,
В. В. Шехтман, Когомологии многообразия фла-
гов как алгебра Бете, *Функц. анализ и его прил.*,
2011, том 45, выпуск 4, 16–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3050>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:09:07

Когомологии многообразия флагов как алгебра Бете*

© 2011. А. В. ВАРЧЕНКО, Р. РИМАНИ, В. О. ТАРАСОВ, В. В. ШЕХТМАН

Памяти В. И. Арнольда

Мы представили алгебру эквивариантных когомологий $H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_\lambda, \mathbb{C})$ многообразия неполных флагов $\mathcal{F}_\lambda$, параметризующего последовательности подпространств $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N = \mathbb{C}^n$, $\dim F_i/F_{i-1} = \lambda_i$, как алгебру Бете $\mathcal{B}^\infty(\mathcal{V}_\lambda^\pm)$ для $\mathfrak{gl}_N$ -веса $\mathcal{V}_\lambda^\pm$ в $\mathfrak{gl}_N[t]$ -модуле $\mathcal{V}^\pm$.

§1. Введение

Алгебра Бете квантовой интегрируемой модели — это коммутативная алгебра линейных операторов (гамильтонианов), действующих на пространстве состояний модели. Интересная задача состоит в описании алгебры Бете как алгебры функций на подходящей схеме. Такое описание можно рассматривать как проявление геометрического соответствия Ленглендса, см. [9], [10].

Модель Годена, связанная с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_N$, дает пример квантовой интегрируемой модели ([6], [7]). Алгебра Бете $\mathcal{B}^K$ этой модели Годена является коммутативной подалгеброй алгебры токов $U(\mathfrak{gl}_N[t])$. Алгебра $\mathcal{B}^K$ зависит от параметров $K = (K_1, \dots, K_N) \in \mathbb{C}^N$. Для данного $\mathfrak{gl}_N[t]$ -модуля M мы получаем коммутативную подалгебру $\mathcal{B}^K(M) \subset \text{End}(M)$ как образ алгебры $\mathcal{B}^K$. Геометрическое описание алгебры $\mathcal{B}^K(M)$ как алгебры функций на схеме приводит к интересным объектам. Например, алгебра Бете $\mathcal{B}^{K=0}((\bigotimes_{s=1}^n L_{\Lambda_s}(z_s))_\lambda^{\text{sing}})$ для подпространства особых векторов $\mathfrak{gl}_N$ -веса λ в тензорном произведении конечномерных точечных представлений $\bigotimes_{s=1}^n L_{\Lambda_s}(z_s)$ интерпретируется как пространство функций на пересечении некоторых циклов Шуберта в многообразии Грассмана, см. [9]. Эта интерпретация устанавливает соответствие между теорией представлений и исчислением Шуберта, полезное для обеих сторон.

Одним из наиболее интересных представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ является ее представление в пространстве $\mathcal{V} = V^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ многочленов от $z_1, \dots, z_n$ со значениями в $V^{\otimes n}$, где $V = \mathbb{C}^N$ — стандартное векторное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. В пространстве $\mathcal{V}$ естественным образом действуют как алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$, так и симметрическая группа S_n , которая одновременно переставляет тензорные сомножители в $V^{\otimes n}$ и переменные $z_1, \dots, z_n$. Обозначим через $\mathcal{V}^+$ и $\mathcal{V}^-$ соответственно инвариантное и антиинвариантное подпространства пространства $\mathcal{V}$ относительно действия симметрической группы S_n . Действия $\mathfrak{gl}_N[t]$ и S_n в пространстве $\mathcal{V}$ коммутируют, поэтому $\mathcal{V}^+$ и $\mathcal{V}^-$ являются $\mathfrak{gl}_N[t]$ -подмодулями модуля $\mathcal{V}$.

*Первый автор поддержан грантом NSF No. DMS-0555327. Второй автор поддержан грантом NSA No. CON:H98230-10-1-0171. Третий автор поддержан грантом NSF No. DMS-0901616.

Алгебра Бете $\mathcal{B}^K$ сохраняет весовые разложения $\mathcal{V}^+ = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{V}_{\lambda}^+$ и $\mathcal{V}^- = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{V}_{\lambda}^-$ относительно действия $\mathfrak{gl}_N$. Алгебра Бете $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$ была описана в работе [10] как алгебра функций на подходящем пространстве квазиэкспонент $\{e^{K_i u}(u^{\lambda_i} + \Sigma_{i1} u^{\lambda_i-1} + \dots + \Sigma_{i\lambda_i})\}$, $i = 1, \dots, N$. В этой работе мы даем аналогичное описание для алгебры Бете $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ и изучаем предел алгебр $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$, $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^-)$, когда все координаты вектора K стремятся к бесконечности таким образом, что $K_i/K_{i+1} \rightarrow \infty$ при всех i . Мы показываем, что в этом пределе обе алгебры Бете $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$, $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ можно отождествить с алгеброй эквивариантных когомологий $H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C})$ многообразия неполных флагов $\mathcal{F}_{\lambda}$, параметризующего последовательности подпространств

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N = \mathbb{C}^n,$$

$\dim F_i/F_{i-1} = \lambda_i$. Для нас это отождествление мотивировалось рассмотрениями в работах [13], [14], где эквивариантные когомологии многообразия неполных флагов были использованы для того, чтобы построить некоторые конформные блоки в пространстве $V^{\otimes n}$.

Наше отождествление алгебры Бете с алгеброй операторов умножения в эквивариантных когомологиях $H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C})$ можно рассматривать как вырождение недавно полученного в работе [12] описания эквивариантных квантовых когомологий многообразия неполных флагов как алгебры Бете некоторой янгианной модели, связанной с $V^{\otimes n}$, ср. [2].

В §2 мы вводим алгебру Бете. §3 содержит основные результаты — теоремы 3.3, 3.4. Теорема 3.3 отождествляет алгебру эквивариантных когомологий $H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C})$ и алгебры Бете $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$, $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{V}_{\lambda}^-)$. Теорема 3.4 утверждает, что спаривание Шаповалова пространств $\mathcal{V}_{\lambda}^+$ и $\mathcal{V}_{\lambda}^-$ невырожденно. В §4 показано, что изоморфизмы из теоремы 3.3 являются предельными случаями геометрического соответствия Ленглендса. В §5 объясняется, каким образом алгебры Бете $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$, $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ связаны с квантовыми эквивариантными когомологиями $QH_{GL_n \times \mathbb{C}^*}(T^*\mathcal{F}_{\lambda})$ кокасательного расслоения $T^*\mathcal{F}_{\lambda}$ многообразия флагов $\mathcal{F}_{\lambda}$. В приложении содержится геометрическое описание действия алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве $\bigoplus_{\lambda} H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C})$.

Мы благодарим С. А. Локтева и А. Ю. Окунькова за полезные обсуждения.

§2. Представления алгебры токов $\mathfrak{gl}_N[t]$

2.1. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N$. Пусть e_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$, — стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, удовлетворяющие соотношениям $[e_{ij}, e_{sk}] = \delta_{js}e_{ik} - \delta_{ik}e_{sj}$. Обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_N$ подалгебру, порожденную элементами e_{ii} , $i = 1, \dots, N$. Обозначим через $U(\mathfrak{g})$ универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Вектор v в $\mathfrak{gl}_N$ -модуле M имеет вес $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$, если $e_{ii}v = \lambda_i v$ для всех $i = 1, \dots, N$. Обозначим через $M_{\lambda} \subset M$ весовое подпространство веса λ .

Пусть $V = \mathbb{C}^N$ — стандартное векторное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$ с базисом $v_1, \dots, v_N$, таким, что $e_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ для всех i, j, k . Тензорная степень $V^{\otimes n}$ векторного представления имеет базис $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$, где $i_j \in \{1, \dots, N\}$. Каждая такая последовательность $(i_1, \dots, i_n)$ определяет разложение $I = (I_1, \dots, I_N)$ множества $\{1, \dots, n\}$ на непересекающиеся подмножества $I_1, \dots, I_N$, $I_j = \{k \mid i_k = j\}$. Обозначим через v_I базисный вектор $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$.

Рассмотрим весовое разложение

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, |\lambda|=n} (V^{\otimes n})_{\lambda}.$$

Обозначим через $\mathcal{J}_{\lambda}$ множество всех индексов I , таких, что $|I_j| = \lambda_j$, $j = 1, \dots, N$. Векторы $\{v_I, I \in \mathcal{J}_{\lambda}\}$ образуют базис подпространства $(V^{\otimes n})_{\lambda}$. Его размерность равна мультиномиальному коэффициенту $d_{\lambda} := n! / (\lambda_1! \dots \lambda_N!)$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ билинейную форму на $V^{\otimes n}$, относительно которой базис $\{v_I\}$ ортонормирован. Назовем ее *формой Шаповалова*.

2.2. Алгебра токов $\mathfrak{gl}_N[t]$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_N[t] = \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{C}[t]$ многочленов со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}_N$ и поточечным коммутатором. Мы отождествляем алгебру $\mathfrak{gl}_N$ с подалгеброй $\mathfrak{gl}_N \otimes 1$ постоянных многочленов в $\mathfrak{gl}_N[t]$. Таким образом, каждый модуль над алгеброй $\mathfrak{gl}_N[t]$ обладает канонической структурой модуля над алгеброй $\mathfrak{gl}_N$.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ имеет базис $e_{ij} \otimes t^r$, $i, j = 1, \dots, N$, такой, что

$$[e_{ij} \otimes t^r, e_{sk} \otimes t^p] = \delta_{js} e_{ik} \otimes t^{r+p} - \delta_{ik} e_{sj} \otimes t^{r+p}.$$

Удобно объединить элементы алгебры $\mathfrak{gl}_N[t]$ в производящие ряды по переменной u . Для каждого $g \in \mathfrak{gl}_N$ положим $g(u) = \sum_{s=0}^{\infty} (g \otimes t^s) u^{-s-1}$.

Подалгебра $\mathfrak{z}_N[t] \subset \mathfrak{gl}_N[t]$ с базисом $\sum_{i=1}^N e_{ii} \otimes t^r$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, является центральной.

2.3. Модули $\mathcal{V}^{\pm}$ над $\mathfrak{gl}_N[t]$. Рассмотрим группу перестановок S_n множества из n элементов. Для каждого представления M группы S_n обозначим через M^{+} (соответственно M^{-}) подпространство инвариантов (соответственно антиинвариантов) относительно действия S_n .

Группа S_n действует в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ перестановками переменных. Обозначим через $\sigma_s(\mathbf{z})$, $s = 1, \dots, n$, s -й элементарный симметрический многочлен от $z_1, \dots, z_n$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{V}$ многочленов от переменных $z_1, \dots, z_n$ с коэффициентами в $V^{\otimes n}$:

$$\mathcal{V} = V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{z}].$$

Симметрическая группа S_n действует на $\mathcal{V}$ одновременными перестановками тензорных сомножителей в $V^{\otimes n}$ и переменных $z_1, \dots, z_n$:

$$\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes p(z_1, \dots, z_n)) = v_{(\sigma^{-1})_1} \otimes \dots \otimes v_{(\sigma^{-1})_n} \otimes p(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_n}), \quad \sigma \in S_n.$$

Нас интересуют подпространства $\mathcal{V}^{+}, \mathcal{V}^{-} \subset \mathcal{V}$ инвариантов и антиинвариантов относительно действия S_n .

Пространство $\mathcal{V}$ является модулем над $\mathfrak{gl}_N[t]$:

$$g \otimes t^r (v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes p(\mathbf{z})) = \sum_{s=1}^n v_1 \otimes \dots \otimes g v_s \otimes \dots \otimes v_n \otimes z_s^r p(\mathbf{z}).$$

Образ подалгебры $U(\mathfrak{z}_N[t]) \subset U(\mathfrak{gl}_N[t])$ в $\text{End}(\mathcal{V})$ есть алгебра операторов умножения на многочлены из $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^{+}$. Действия $\mathfrak{gl}_N[t]$ и S_n на $\mathcal{V}$ коммутируют. Следовательно, $\mathcal{V}^{+}$ и $\mathcal{V}^{-}$ являются $\mathfrak{gl}_N[t]$ -подмодулями в $\mathcal{V}$. Подпространства $\mathcal{V}^{+}$ и $\mathcal{V}^{-}$ являются свободными модулями над $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^{+}$ ранга N^n .

Рассмотрим весовые разложения относительно $\mathfrak{gl}_N$:

$$\mathcal{V}^+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, |\lambda|=n} \mathcal{V}_{\lambda}^+, \quad \mathcal{V}^- = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, |\lambda|=n} \mathcal{V}_{\lambda}^-.$$

Для каждого λ подпространства $\mathcal{V}_{\lambda}^+$ и $\mathcal{V}_{\lambda}^-$ являются свободными модулями над $\mathbb{C}[z]^+$ ранга d_{λ} .

Обозначим через $\frac{1}{D}\mathcal{V}^-$ векторное пространство всех рациональных функций со значениями в $V^{\otimes n}$ вида $\frac{1}{D}x$, $x \in \mathcal{V}^-$, $D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$. Форма Шаповалова индуцирует билинейное отображение

$$\mathcal{S}_{+-}: \mathcal{V}^+ \otimes \frac{1}{D}\mathcal{V}^- \rightarrow \mathbb{C}[z]^+,$$

которое устанавливает контравариантное соответствие между представлениями алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространствах $\mathcal{V}^+$ и $\frac{1}{D}\mathcal{V}^-$:

$$\mathcal{S}_{+-}((e_{ij} \otimes t^r)x, \frac{1}{D}y) = \mathcal{S}_{+-}(x, (e_{ji} \otimes t^r)\frac{1}{D}y) \quad \text{для всех } i, j, x, y.$$

2.4. Алгебра Бете. Для матрицы A размера $N \times N$ с возможно некоммутирующими матричными элементами a_{ij} зададим ее определитель по строкам формулой

$$\text{rdet } A = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{N\sigma(N)}.$$

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $K = (K_1, \dots, K_N)$. Обозначим через ∂ оператор дифференцирования по переменной u . Определим универсальный дифференциальный оператор $\mathcal{D}^K$ формулой

$$\mathcal{D}^K = \text{rdet} \begin{pmatrix} \partial - K_1 - e_{11}(u) & -e_{21}(u) & \dots & -e_{N1}(u) \\ -e_{12}(u) & \partial - K_2 - e_{22}(u) & \dots & -e_{N2}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -e_{1N}(u) & -e_{2N}(u) & \dots & \partial - K_N - e_{NN}(u) \end{pmatrix}.$$

Это дифференциальный оператор по переменной u , коэффициенты которого являются формальными степенными рядами от u^{-1} с коэффициентами в $U(\mathfrak{gl}_N[t])$,

$$\mathcal{D}^K = \partial^N + \sum_{i=1}^N B_i^K(u) \partial^{N-i},$$

где $B_i^K(u) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^K u^{-j}$ и $B_{ij}^K \in U(\mathfrak{gl}_N[t])$ для всех $i = 1, \dots, N$, $j \geq 0$.

Обозначим через $\mathcal{B}^K$ подалгебру с единицей в $U(\mathfrak{gl}_N[t])$, порожденную элементами B_{ij}^K при $i = 1, \dots, N$, $j \geq 0$. Она называется *алгеброй Бете с параметрами K* .

Теорема 2.1. *Алгебра $\mathcal{B}^K$ коммутативна и коммутирует с подалгеброй $U(\mathfrak{h}) \subset U(\mathfrak{gl}_N[t])$. Если $K = 0$, то алгебра $\mathcal{B}^{K=0}$ коммутирует с подалгеброй $U(\mathfrak{gl}_N) \subset U(\mathfrak{gl}_N[t])$. $\square$*

Теорема доказана для $K = 0$ в работе [15] и для ненулевого K в работах [5], [8].

Каждый элемент B_{ij}^K зависит от $K_1, \dots, K_N$ полиномиально. Определим $\mathcal{B}^\infty$ как подалгебру с единицей в $U(\mathfrak{gl}_N[t])$, порожденную главными членами элементов B_{ij}^K , $i = 1, \dots, N$, $j \geq 0$, при K , стремящемся к бесконечности так, что $K_i/K_{i+1} \rightarrow \infty$ для всех i .

Лемма 2.2. *Алгебра $\mathcal{B}^\infty$ совпадает с подалгеброй с единицей, порожденной элементами $e_{ii} \otimes t^j$ при $i = 1, \dots, N$, $j \geq 0$.*

Доказательство. Мы имеем $B_{i0}^K = (-1)^i K_1 \cdots K_i (1 + o(1))$ и

$$B_{ij}^K = (-1)^i K_1 \cdots K_{i-1} \left(\sum_{m=i}^N e_{mm} \otimes t^{j-1} + o(1) \right)$$

при $j > 0$, где $o(1)$ обозначает слагаемые, исчезающие при K , стремящемся к бесконечности. $\square$

Замечание. Существует $N!$ асимптотических зон, нумеруемых элементами группы S_N , в которых K может стремиться к бесконечности. Можно предполагать, что для каждого $\sigma \in S_N$ все координаты вектора K стремятся к бесконечности так, что $K_{\sigma_i}/K_{\sigma_{i+1}} \rightarrow \infty$ при всех i . Нетрудно проверить, что предельная алгебра Бете $\mathcal{B}^\infty$ не зависит от σ .

Алгебра $\mathcal{B}^\infty$ коммутативна и содержит $U(\mathfrak{sl}_N[t])$. Она коммутирует с подалгеброй $U(\mathfrak{h}) \subset U(\mathfrak{gl}_N[t])$.

Как подалгебра алгебры $U(\mathfrak{gl}_N[t])$ алгебра Бете $\mathcal{B}^K$ действует в любом модуле M над $\mathfrak{gl}_N[t]$. Поскольку $\mathcal{B}^K$ коммутирует с $U(\mathfrak{h})$, она сохраняет весовые подпространства M_λ . Если $K = 0$, то $\mathcal{B}^{K=0}$ сохраняет подпространства M_λ^{sing} особых весовых векторов. Мы будем изучать действие алгебры $\mathcal{B}^\infty$ в весовых подпространствах $\mathcal{V}_\lambda^+$, $\mathcal{V}_\lambda^-$.

Лемма 2.3. *Элемент $\sum_{i=1}^N e_{ii} \otimes t^r \in U(\mathfrak{sl}_N[t])$ действует на $\mathcal{V}$ как оператор умножения на $\sum_{s=1}^n z_s^r$.* $\square$

Если подпространство $L \subset M$ инвариантно относительно действия $\mathcal{B}^K$, то образ алгебры $\mathcal{B}^K$ в $\text{End}(L)$ будет называться *алгеброй Бете для L* и обозначаться через $\mathcal{B}^K(L)$.

§ 3. Эquivariantные когомологии многообразия неполных флагов

3.1. Многообразия неполных флагов. Для заданного $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, $|\lambda| = n$, рассмотрим многообразие неполных флагов $\mathcal{F}_\lambda$, параметризующее последовательности подпространств

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_N = \mathbb{C}^n,$$

таких, что $\dim F_i/F_{i-1} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, N$.

Обозначим через $T^n \subset GL_n$ подгруппу диагональных матриц. Группа T^n действует в пространстве $\mathbb{C}^n$ и, следовательно, на многообразии $\mathcal{F}_\lambda$. Множество неподвижных точек $\mathcal{F}_\lambda^{T^n}$ относительно действия этой группы состоит из координатных флагов $F_I = (F_0 \subset \cdots \subset F_N)$, $I = (I_1, \dots, I_N) \in \mathcal{I}_\lambda$, где подпространство F_i натянуто на базисные векторы $v_j \in \mathbb{C}^n$ с $j \in I_1 \cup \cdots \cup I_i$. Неподвижные точки находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $\mathcal{I}_\lambda$ и, следовательно, с базисными векторами подпространства V_λ .

Мы рассматриваем эквивариантные когомологии

$$H_{\lambda} = H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C}).$$

Обозначим через $\Gamma_i = \{\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{i\lambda_i}\}$ множество корней Черна расслоения над $\mathcal{F}_{\lambda}$ со слоем F_i/F_{i-1} . Обозначим через $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ корни Черна, отвечающие сомножителям группы T^n . Тогда

$$H_{\lambda} = \mathbb{C}[\mathbf{z}; \Gamma_1; \dots; \Gamma_N]^{S_n \times S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_N}} \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{\lambda_i} (1 + u\gamma_{ij}) = \prod_{i=1}^n (1 + uz_i) \right\rangle. \quad (3.1)$$

Пространство когомологий H_{λ} является модулем над $H_{GL_n}^*(\text{pt}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\mathbf{z}]^+$.

Рассмотрим идеал $J_H \subset H_{\lambda}$, порожденный многочленами $\sigma_i(\mathbf{z})$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $H_{\lambda}/J_H = H^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C})$.

3.2. Интегрирование по $\mathcal{F}_{\lambda}$. Нам понадобится отображение интегрирования $\int: H_{\lambda} \rightarrow H_{GL_n}^*(\text{pt}, \mathbb{C})$. Приведенная ниже формула (3.2) задает отображение интегрирования в терминах множества неподвижных точек $\mathcal{F}_{\lambda}^{T^n}$.

Для заданного подмножества $A \subset \{1, \dots, N\}$ положим $\mathbf{z}_A = \{z_a, a \in A\}$. Для заданного $I = (I_1, \dots, I_N) \in \mathcal{I}_{\lambda}$ положим

$$R(\mathbf{z}_{I_1} | \mathbf{z}_{I_2} | \dots | \mathbf{z}_{I_m}) = \prod_{i < j} \prod_{a \in I_i, b \in I_j} (z_b - z_a).$$

Эквивариантная теорема о локализации Атьи–Ботта [1] утверждает, что для всякого $[h(\mathbf{z}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N)] \in H_{\lambda}$

$$\int [h] = \sum_{I \in \mathcal{I}_{\lambda}} \frac{h(\mathbf{z}, \mathbf{z}_{I_1}, \dots, \mathbf{z}_{I_N})}{R(\mathbf{z}_{I_1} | \mathbf{z}_{I_2} | \dots | \mathbf{z}_{I_N})}. \quad (3.2)$$

Точнее говоря, достаточно проверить это тождество после замены базы $H_{GL_n}^*(\mathcal{F}_{\lambda}) \rightarrow H_{T^n}^*(\mathcal{F}_{\lambda})$, где $T^n \subset GL_n$ — максимальный тор. В случае же T^n -эквивариантных когомологий формула (3.2) совпадает с формулой локализации Атьи–Ботта. Отметим, что выражение для R есть не что иное, как класс Эйлера касательного пространства в неподвижной точке действия T^n , см. формулу (2.5) в работе [14].

Очевидно, что правая часть равенства в формуле (3.2) принадлежит $\mathbb{C}[\mathbf{z}]^+$. Отображение интегрирования задает спаривание

$$(\ , \) : H_{\lambda} \otimes H_{\lambda} \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{z}]^+, \quad [h] \otimes [g] \mapsto \int [hg].$$

После факторизации по идеалу J_H мы получаем невырожденное спаривание Пуанкаре

$$(\ , \) : H^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C}) \otimes H^*(\mathcal{F}_{\lambda}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

3.3. H_λ и $\mathcal{V}^\pm$.

Лемма 3.1. *Отображения*

$$\begin{aligned} i_\lambda^+ : H_\lambda &\rightarrow \mathcal{V}_\lambda^+, & [h(z, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N)] &\mapsto \sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} v_I \otimes h(z, z_{I_1}, \dots, z_{I_N}), \\ i_\lambda^- : H_\lambda &\rightarrow \frac{1}{D} \mathcal{V}_\lambda^-, & [h(z, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N)] &\mapsto \sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} v_I \otimes \frac{h(z, z_{I_1}, \dots, z_{I_N})}{R(z_{I_1} | z_{I_2} | \dots | z_{I_N})}, \end{aligned}$$

являются корректно определенными изоморфизмами модулей над $\mathbb{C}[z]^+$. $\square$

Доказательство. Если h принадлежит идеалу соотношений из (3.1), то $h(z, z_{I_1}, \dots, z_{I_N}) = 0$ для любого I , поскольку подстановка $\Gamma_i = z_{I_i}$ превращает образующие идеала в тождества. Это доказывает, что отображения i_λ^+ и i_λ^- корректно определены.

Рассмотрим модуль $\mathbb{C}[z]^{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_N}}$ над $\mathbb{C}[z]^+$, образованный многочленами, симметрическими по первым λ_1 переменным, симметрическими по следующим λ_2 переменным и т. д. В исчислении Шуберта известно, что это свободный модуль ранга d_λ , изоморфный H_λ при соответствии

$$p \in \mathbb{C}[z]^{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_N}} \longleftrightarrow [p(\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)] \in H_\lambda. \quad (3.3)$$

Элемент $\sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} v_I \otimes p_I(z)$ пространства $\mathcal{V}_\lambda^+$ принадлежит $\mathcal{V}_\lambda^+$ тогда и только тогда, когда $p_I(z) = p(z_{I_1}, \dots, z_{I_N})$ для некоторого многочлена $p \in \mathbb{C}[z]^{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_N}}$. Это показывает, что $\mathcal{V}_\lambda^+$ изоморфно $\mathbb{C}[z]^{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_N}}$ и что i_λ^+ есть композиция соответствующего изоморфизма с отображением (3.3).

Аналогичное рассуждение показывает, что i_λ^- — тоже изоморфизм. $\square$

Следствие 3.2. *Форма Шаповалова и спаривание Пуанкаре связаны соотношением*

$$\mathcal{S}_{+-}(i_+[h], i_-[g]) = \int [h][g]. \quad \square$$

Пусть A есть коммутативная алгебра. Алгебра A , рассматриваемая как модуль над собой, называется своим *регулярным представлением*. Сформулируем наш основной результат:

Теорема 3.3. (i) *Отображения $\xi_\lambda^\pm : e_{ii} \otimes t^r |_{\mathcal{V}_\lambda^\pm} \mapsto \sum_{j=1}^{\lambda_i} \gamma_{ij}^r$ определяют изоморфизмы алгебр $\mathcal{B}^\infty(\mathcal{V}_\lambda^\pm)$ и H_λ .*

(ii) *Отображения $\xi_\lambda^+, i_\lambda^+$ отождествляют модуль $\mathcal{V}_\lambda^+$ над $\mathcal{B}^\infty(\mathcal{V}_\lambda^+)$ с регулярным представлением алгебры H_λ .*

(iii) *Отображения $\xi_\lambda^-, i_\lambda^-$ отождествляют модуль $\frac{1}{D} \mathcal{V}_\lambda^-$ над $\mathcal{B}^\infty(\frac{1}{D} \mathcal{V}_\lambda^-)$ с регулярным представлением алгебры H_λ .*

Теорема следует из лемм 2.2, 2.3 и 3.1.

3.4. Пространство когомологий как модуль над $\mathfrak{gl}_N[t]$. Рассмотрим идеал J в $\mathbb{C}[z]^+$, порожденный элементарными симметрическими функциями $\sigma_i(z)$, $i = 1, \dots, n$. Положим $J^+ = J\mathcal{V}^+$ и $J^- = \frac{1}{D} J\mathcal{V}^-$. Очевидно, что J^+ есть подмодуль в $\mathcal{V}^+$, а J^- — подмодуль в $\frac{1}{D} \mathcal{V}^-$. Модуль $\mathcal{V}^+/J^+$ над $\mathfrak{gl}_N[t]$ градуирован и имеет размерность N^n над $\mathbb{C}$, см. [9]. Аналогично, $\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-$ есть градуированный модуль над $\mathfrak{gl}_N[t]$ той же размерности.

Теорема 3.4. *Форма Шаповалова определяет невырожденное спаривание*

$$\mathcal{S}_{+-}: \mathcal{V}^+/J^+ \otimes \frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^- \rightarrow \mathbb{C}.$$

Эта теорема следует из лемм 3.1, 3.2 и невырожденности спаривания Пуанкаре.

Следствие 3.5. *Форма Шаповалова устанавливает контравариантное соответствие между модулями $\mathcal{V}^+/J^+$ и $\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-$ над $\mathfrak{gl}_N[t]$:*

$$\mathcal{S}_{+-}((e_{ij} \otimes t^r)x, \frac{1}{D}y) = \mathcal{S}_{+-}(x, (e_{ji} \otimes t^r)\frac{1}{D}y) \quad \text{для всех } i, j, x, y.$$

Рассмотрим модуль W_n над $\mathfrak{gl}_N[t]$, порожденный вектором w_n , удовлетворяющим определяющим соотношениям

$$\begin{aligned} e_{ii}(u)w_n &= \delta_{1i} \frac{n}{u} w_n, & i &= 1, \dots, N, \\ e_{ij}(u)w_n &= 0, & 1 \leq i < j \leq N, \\ (e_{ji} \otimes 1)^{n\delta_{1i}+1}w_n &= 0, & 1 \leq i < j \leq N. \end{aligned}$$

Как модуль над $\mathfrak{sl}_N[t]$ модуль W_n изоморфен модулю Вейля из работ [3], [4], соответствующему весу $n\omega_1$, где ω_1 — первый фундаментальный вес алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$.

В работе [9] построен изоморфизм модуля $\mathcal{V}^+/J^+$ и модуля Вейля W_n .

Следствие 3.6. *Форма Шаповалова $\mathcal{S}_{+-}$ устанавливает изоморфизм модуля $\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-$ и модуля, контравариантно двойственного к модулю Вейля W_n .*

Этот факт имеет следующее приложение. Для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, $|\lambda| = n$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$, положим

$$(\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-)_{\lambda}^{\text{sing}} = \{v \in \frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^- \mid e_{ij}v = 0 \text{ для } i < j, e_{ii}v = \lambda_i v \text{ для } i = 1, \dots, N\}.$$

Это пространство градуировано. Обозначим через $((\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-)_{\lambda}^{\text{sing}})_k$ подпространство всех элементов степени k по переменным $\mathbf{z}$. Определим градуированный характер формулой

$$\text{ch}((\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-)_{\lambda}^{\text{sing}}) = \sum_k q^k \dim((\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-)_{\lambda}^{\text{sing}})_k.$$

Следствие 3.7. *Имеем*

$$\text{ch}((\frac{1}{D} \mathcal{V}^-/J^-)_{\lambda}^{\text{sing}}) = \frac{(q)_n \prod_{1 \leq i < j \leq N} (1 - q^{\lambda_i - \lambda_j + j - i})}{\prod_{i=1}^N (q)_{\lambda_i + N - i}} q^{-\sum_{i=1}^N (i-1)\lambda_i}, \quad (3.4)$$

где $(q)_a = \prod_{j=1}^a (1 - q^j)$.

Следствие вытекает из леммы 2.2 в работе [9] и следствия 3.6.

Изоморфизмы

$$i^+ = \bigoplus_{\lambda} i_{\lambda}^+ : \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda} \rightarrow \mathcal{V}^+, \quad i^- = \bigoplus_{\lambda} i_{\lambda}^- : \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda} \rightarrow \frac{1}{D} \mathcal{V}^- \quad (3.5)$$

определяют два градуированных представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве $\bigoplus_{\lambda} H_{\lambda}$, обозначаемые через ρ^+ и ρ^- соответственно. Эти представления

задают два градуированных представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве когомологий с постоянными коэффициентами

$$H(\mathbb{C}) := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, |\lambda|=n} H^*(\mathcal{F}_\lambda, \mathbb{C}),$$

которые обозначаются теми же буквами ρ^+ и ρ^- .

Следствие 3.8. *Модуль $H(\mathbb{C})$ над $\mathfrak{gl}_N[t]$ со структурой ρ^+ изоморфен модулю Вейля W_n . Модуль $H(\mathbb{C})$ над $\mathfrak{gl}_N[t]$ со структурой ρ^- изоморфен модулю, контравариантно двойственному к модулю Вейля W_n .*

Представления $\rho^\pm$ можно определить топологически, см. [14] и приложение. Представление ρ^- выглядит предпочтительнее. Оно было использовано в работах [13] и [14] для того, чтобы построить конформные блоки в тензорной степени $V^{\otimes n}$.

§4. Изоморфизмы $i_\lambda^\pm$ как геометрическое соответствие Ленгландса

4.1. Случай пространства $\mathcal{V}_\lambda^+$. Изложенное ниже геометрическое описание действия алгебры $\mathcal{B}^K$ в пространстве $\mathcal{V}_\lambda^+$ было дано в работе [10] как пример геометрического соответствия Ленгландса.

Рассмотрим последовательность $K = (K_1, \dots, K_N)$ попарно различных комплексных чисел. Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, $|\lambda| = n$. Введем алгебры многочленов

$$\mathbb{C}[\Sigma] := \mathbb{C}[\Sigma_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, \lambda_i], \quad \mathbb{C}[\sigma] := \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

Положим

$$\Sigma_i(u) = e^{K_i u} (u^{\lambda_i} + \Sigma_{i1} u^{\lambda_i-1} + \dots + \Sigma_{i\lambda_i}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Определитель Вронского произвольных функций вычисляется по формуле

$$\text{Wr}(g_1(u), \dots, g_N(u)) = \det \begin{pmatrix} g_1(u) & g'_1(u) & \dots & g_1^{(N-1)}(u) \\ g_2(u) & g'_2(u) & \dots & g_2^{(N-1)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(u) & g'_N(u) & \dots & g_N^{(N-1)}(u) \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\text{Wr}(\Sigma_1(u), \dots, \Sigma_N(u)) = e^{\sum_{i=1}^N K_i u} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (K_j - K_i) \cdot \left(u^n + \sum_{s=1}^n (-1)^s A_s^K(\Sigma) u^{n-s} \right),$$

где $A_1^K(\Sigma), \dots, A_n^K(\Sigma) \in \mathbb{C}[\Sigma]$. Зададим гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{W}^K: \mathbb{C}[\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma], \quad \sigma_s \mapsto A_s^K(\Sigma).$$

Этот гомоморфизм определяет на $\mathbb{C}[\Sigma]$ структуру модуля над $\mathbb{C}[\sigma]$.

Введем дифференциальный оператор $\mathcal{D}_\Sigma^K$ формулой

$$\mathcal{D}_\Sigma^K = \frac{1}{\text{Wr}(\Sigma_1(u), \dots, \Sigma_N(u))} \text{rdet} \begin{pmatrix} \Sigma_1(u) & \Sigma'_1(u) & \dots & \Sigma_1^{(N)}(u) \\ \Sigma_2(u) & \Sigma'_2(u) & \dots & \Sigma_2^{(N)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \partial & \dots & \partial^N \end{pmatrix}.$$

Это дифференциальный оператор по переменной u , коэффициенты которого являются формальными степенными рядами от u^{-1} с коэффициентами в $\mathbb{C}[\Sigma]$:

$$\mathcal{D}_{\Sigma}^K = \partial^N + \sum_{i=1}^N F_i^K(u) \partial^{N-i}, \quad (4.1)$$

где $F_i^K(u) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{ij}^K u^{-j}$ и $F_{ij}^K \in \mathbb{C}[\Sigma]$, $i = 1, \dots, N$, $j \geq 0$.

Теорема 4.1 [10]. *Отображение*

$$\tau_{\lambda}^{K+}: B_{ij}^K|_{\mathcal{V}_{\lambda}^+} \mapsto F_{ij}^K$$

определяет изоморфизм алгебры Бете $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$ и алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]$. Этот изоморфизм устанавливает изоморфизм модуля $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$ над $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{\mathcal{V}_{\lambda}^+}$ и модуля $\mathbb{C}[\Sigma]$ над $\mathbb{C}[\sigma]$, если отождествить алгебры $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{\mathcal{V}_{\lambda}^+}$ и $\mathbb{C}[\sigma]$ посредством отображения $\sigma_s[z] \mapsto \sigma_s$, $s = 1, \dots, n$.

Положим

$$v^+ = \sum_{I \in \mathcal{I}_{\lambda}} v_I \in \mathcal{V}_{\lambda}^+.$$

Теорема 4.2 [10]. *Отображение*

$$\mu_{\lambda}^{K+}: B_{ij}^K v^+ \mapsto F_{ij}^K$$

определяет изоморфизм векторных пространств $\mathcal{V}_{\lambda}^+ \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma]$. Отображения τ_{λ}^{K+} , μ_{λ}^{K+} устанавливают изоморфизм модуля $\mathcal{V}_{\lambda}^+$ над $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+)$ и регулярного представления алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]$.

4.2. Предел отображений τ_{λ}^{K+} и μ_{λ}^{K+} при $K \rightarrow \infty$. Пусть все координаты вектора K стремятся к бесконечности так, что $K_i/K_{i+1} \rightarrow \infty$ при всех $i = 1, \dots, N-1$. В этом случае гомоморфизм $\mathcal{W}^K$ имеет предел $\mathcal{W}^{\infty}$. А именно, определим $A_s^{\infty}(\Sigma)$ равенством

$$\prod_{i=1}^N (u^{\lambda_i} + \Sigma_{i1} u^{\lambda_i-1} + \dots + \Sigma_{i\lambda_i}) = u^n + \sum_{s=1}^n (-1)^s A_s^{\infty}(\Sigma) u^{n-s}.$$

Тогда

$$\mathcal{W}^{\infty}: \mathbb{C}[\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma], \quad \sigma_s \mapsto A_s^{\infty}(\Sigma). \quad (4.2)$$

Определим гомоморфизмы алгебр

$$\mathbb{C}[\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[z]^+, \quad \eta: \mathbb{C}[\Sigma] \rightarrow H_{\lambda}, \quad (4.3)$$

потребовав, чтобы первый гомоморфизм переводил σ_s в $\sigma_s(z)$ при всех s , а второй переводил $(-1)^s \Sigma_{is}$ в s -ю элементарную симметрическую функцию от $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{i\lambda_i}$ при всех i, s . Введенные отображения очевидно являются изоморфизмами.

Лемма 4.3. *Изоморфизмы (4.3) отождествляют модуль $\mathbb{C}[\Sigma]$ над $\mathbb{C}[\sigma]$, определенный формулой (4.2), и модуль H_{λ} над $\mathbb{C}[z]^+$.*

Положим $p_i(u) = u^{\lambda_i} + \Sigma_{i1} u^{\lambda_i-1} + \dots + \Sigma_{i\lambda_i}$ при всех $i = 1, \dots, N$. Отметим, что

$$\eta(p_i(u)) = \prod_{j=1}^{\lambda_i} (u - \gamma_{ij}), \quad \eta\left(\frac{p'_i(u)}{p_i(u)}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \gamma_{ij}^r u^{-r-1}. \quad (4.4)$$

Лемма 4.4. Имеем $F_{i0}^K = (-1)^i K_1 \cdots K_i (1 + o(1))$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}^K u^{-j} = (-1)^i K_1 \cdots K_{i-1} \left(\sum_{m=i}^N \frac{p'_m(u)}{p_m(u)} + o(1) \right),$$

где $o(1)$ обозначает слагаемые, исчезающие при K , стремящемся к бесконечности.

Доказательство. Пусть $y_i(u) = \text{Wr}(\Sigma_i(u), \dots, \Sigma_N(u))$, $i = 1, \dots, N$. Оператор $\mathcal{D}_{\Sigma}^K$ можно факторизовать:

$$\mathcal{D}_{\Sigma}^K = \left(\partial - \frac{y'_1(u)}{y_1(u)} + \frac{y'_2(u)}{y_2(u)} \right) \cdots \left(\partial - \frac{y'_{N-1}(u)}{y_{N-1}(u)} + \frac{y'_N(u)}{y_N(u)} \right) \left(\partial - \frac{y'_N(u)}{y_N(u)} \right), \quad (4.5)$$

см. [11]. Поскольку

$$y_i(u) = (-1)^{(N-i)(N-i-1)/2} K_i^{N-i} \cdots K_{N-1} (p_i(u) \cdots p_N(u) + o(1)) e^{\sum_{m=i}^N K_m u}$$

при K , стремящемся к бесконечности, утверждение следует из формул (4.1) и (4.5). $\square$

Теорема 4.5. (i) *Отображение $\eta \circ \tau_{\lambda}^{K+}: \mathcal{B}^K(\mathcal{V}_{\lambda}^+) \rightarrow H_{\lambda}$ стремится к изоморфизму $\xi_{\lambda}^+: \mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{V}_{\lambda}^+) \rightarrow H_{\lambda}$, см. теорему 3.3, при K , стремящемся к бесконечности.*

(ii) *Отображение $\eta \circ \mu_{\lambda}^{K+}: \mathcal{V}_{\lambda}^+ \rightarrow H_{\lambda}$ стремится к изоморфизму $(i_{\lambda}^+)^{-1}: \mathcal{V}_{\lambda}^+ \rightarrow H_{\lambda}$, см. лемму 3.1, при K , стремящемся к бесконечности.*

Доказательство. Утверждение следует из определений отображений, леммы 4.4, формул (4.4) и доказательства леммы 2.2. $\square$

4.3. Случай пространства $\mathcal{V}_{\lambda}^-$. Теорема 3.4 позволяет дать геометрическое описание действия $\mathcal{B}^K$ в пространстве $\frac{1}{D}\mathcal{V}^-$, которое аналогично описанию действия $\mathcal{B}^K$ в пространстве $\mathcal{V}^+$.

Теорема 4.6. *Отображение*

$$\tau_{\lambda}^{K-}: B_{ij}^K|_{\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-} \mapsto F_{ij}^K$$

определяет изоморфизм алгебры Бете $\mathcal{B}^K(\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ и алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]$. Изоморфизм τ_{λ}^{K-} устанавливает изоморфизм модуля $\mathcal{B}^K(\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ над $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-}$ и модуля $\mathbb{C}[\Sigma]$ над $\mathbb{C}[\sigma]$, если отождествить алгебры $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-}$ и $\mathbb{C}[\sigma]$ посредством отображения $\sigma_s[z] \mapsto \sigma_s$, $s = 1, \dots, n$.

Положим

$$v^- = \sum_{I \in \mathcal{J}_{\lambda}} v_I \otimes \frac{1}{R(z_{I_1}|z_{I_2}|\cdots|z_{I_N})} \in \frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-.$$

Теорема 4.7. *Отображение*

$$\mu_{\lambda}^{K-}: B_{ij}^K v^- \mapsto F_{ij}^K,$$

определяет изоморфизм векторных пространств $\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^- \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma]$. Отображения τ_{λ}^{K-} , μ_{λ}^{K-} устанавливают изоморфизм модуля $\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-$ над $\mathcal{B}^K(\frac{1}{D}\mathcal{V}_{\lambda}^-)$ и регулярного представления алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]$.

Доказательства теорем 4.6 и 4.7 в основном дословно совпадают с доказательствами теорем 4.1 и 4.2 в работе [10].

Интересно отметить, что при определенных условиях элемент v^- становится конформным блоком и удовлетворяет уравнению Книжника–Замолодчикова по переменным z , см. [16], [13], [14].

4.4. Предел отображений τ_λ^{K-} и μ_λ^{K-} при $K \rightarrow \infty$. Пусть все координаты вектора K стремятся к бесконечности так, что $K_i/K_{i+1} \rightarrow \infty$ при всех $i = 1, \dots, N-1$.

Теорема 4.8. (i) *Отображение $\eta \circ \tau_\lambda^{K-} : \mathcal{B}^K(\mathcal{V}_\lambda^-) \rightarrow H_\lambda$ стремится к изоморфизму $\xi_\lambda^- : \mathcal{B}^\infty(\mathcal{V}_\lambda^-) \rightarrow H_\lambda$, см. теорему 3.3, при K , стремящемся к бесконечности.*

(ii) *Отображение $\eta \circ \mu_\lambda^{K-} : \mathcal{V}_\lambda^- \rightarrow H_\lambda$ стремится к изоморфизму $(i_\lambda^-)^{-1} : \mathcal{V}_\lambda^- \rightarrow H_\lambda$, см. лемму 3.1, при K , стремящемся к бесконечности.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.5.

4.5. Случай пространства $(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}$. Формула (3.4) для градуированного характера пространства $(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-/J^-)_\lambda^{\text{sing}}$ аналогична формуле для градуированного характера пространства $(\mathcal{V}^+/J^+)_\lambda^{\text{sing}}$ в работе [9]. Последняя была использована в [9] для получения геометрического описания действия алгебры $\mathcal{B}^{K=0}$ в пространстве $(\mathcal{V}^+)_\lambda^{\text{sing}}$. Используя формулу (3.4), можно получить аналогичное геометрическое описание действия алгебры $\mathcal{B}^{K=0}$ в пространстве $(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$, $|\lambda| = n$. Введем множество $P = \{d_1, \dots, d_N\}$, $d_i = \lambda_i + N - i$, $i = 1, \dots, N$. Пусть

$$\Sigma_i(u) = u^{d_i} + \sum_{j=1, d_i-j \notin P}^{d_i} \Sigma_{ij} u^{d_i-j}.$$

Рассмотрим алгебры многочленов

$$\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}} := \mathbb{C}[\Sigma_{ij}, i = 1, \dots, N, j \in \{1, \dots, d_i\}, d_i - j \notin P], \quad \mathbb{C}[\sigma] := \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

Имеем

$$\text{Wr}(\Sigma_1(u), \dots, \Sigma_N(u)) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (d_j - d_i) \left(u^n + \sum_{s=1}^n (-1)^s A_s(\Sigma) u^{n-s} \right),$$

где $A_1(\Sigma), \dots, A_n(\Sigma) \in \mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$.

Определим гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{W} : \mathbb{C}[\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}, \quad \sigma_s \mapsto A_s(\Sigma).$$

Этот гомоморфизм определяет на $\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$ структуру модуля над $\mathbb{C}[\sigma]$.

Введем дифференциальный оператор $\mathcal{D}_\Sigma$ формулой

$$\mathcal{D}_\Sigma = \frac{1}{\text{Wr}(\Sigma_1(u), \dots, \Sigma_N(u))} \text{rdet} \begin{pmatrix} \Sigma_1(u) & \Sigma'_1(u) & \dots & \Sigma_1^{(N)}(u) \\ \Sigma_2(u) & \Sigma'_2(u) & \dots & \Sigma_2^{(N)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \partial & \dots & \partial^N \end{pmatrix}.$$

Это дифференциальный оператор по переменной u , коэффициенты которого являются формальными степенными рядами по u^{-1} с коэффициентами в $\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$,

$$\mathcal{D}_\Sigma = \partial^N + \sum_{i=1}^N F_i(u) \partial^{N-i},$$

где $F_i(u) = \sum_{j=i}^\infty F_{ij} u^{-j}$ и $F_{ij} \in \mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$, $i = 1, \dots, N$, $j \geq i$.

Теорема 4.9. *Отображение*

$$\tau_\lambda^- : B_{ij}^{K=0} |_{(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}} \mapsto F_{ij}$$

определяет изоморфизм алгебры Бете $\mathcal{B}^{K=0}((\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}})$ и алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$. Изоморфизм τ_λ^- устанавливает изоморфизм модуля $\mathcal{B}^{K=0}((\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}})$ над $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}}$ и модуля $\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$ над $\mathbb{C}[\sigma]$, если отождествить алгебры $U(\mathfrak{z}_N[t])|_{(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}}$ и $\mathbb{C}[\sigma]$ посредством отображения $\sigma_s[z] \mapsto \sigma_s$, $s = 1, \dots, n$.

Выберем вектор $v^- \in (\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}$ степени $\sum_{i=1}^N (1-i)\lambda_i$. Согласно формуле (3.4), такой вектор единствен с точностью до пропорциональности.

Теорема 4.10. *Отображение*

$$\mu_\lambda^- : B_{ij}^{K=0} v^- \mapsto F_{ij},$$

определяет изоморфизм векторных пространств $(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}} \rightarrow \mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$. Отображения τ_λ^- , μ_λ^- устанавливают изоморфизм модуля $(\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}}$ над $\mathcal{B}^{K=0}((\frac{1}{D}\mathcal{V}^-)_\lambda^{\text{sing}})$ и регулярного представления алгебры $\mathbb{C}[\Sigma]^{\text{sing}}$.

Доказательства теорем 4.9 и 4.10 в основном дословно совпадают с доказательствами теорем 5.3 и 5.6 в работе [9].

§5. Связь с квантовыми когомологиями

В лекциях [12] Окуньков, в частности, рассматривает эквивариантные квантовые когомологии $QH_{GL_n \times \mathbb{C}^*}(T^*F_\lambda)$ кокасательного расслоения T^*F_λ на многообразии флагов F_λ . Точнее, он рассматривает стандартные эквивариантные когомологии $H_{GL_n \times \mathbb{C}^*}^*(T^*F_\lambda)$ как модуль над алгеброй квантового умножения и описывает этот модуль как янгианную алгебру Бете для XXX-модели, связанной с $V^{\otimes n}$.

Алгебра $H_{GL_n \times \mathbb{C}^*}^*(T^*F_\lambda)$ имеет $n+1$ эквивариантных параметров $z_1, \dots, z_n, u$. Параметры $z_1, \dots, z_n$ отвечают действию GL_n на T^*F_λ , а параметр u отвечает действию $\mathbb{C}^*$ на T^*F_λ умножением кокасательных векторов на u . Операторы квантового умножения зависят от дополнительных параметров $q_1, \dots, q_N$, отвечающих квантовой деформации.

Хорошо известно, что янгианная алгебра Бете вырождается в годемовскую алгебру Бете, см., например, работы [15] и [8]. Из этого вырождения вытекает следующий факт. Введем новые параметры $K_1, \dots, K_N$ по формуле $q_i = 1 + K_i u$, $i = 1, \dots, N$, и рассмотрим предел алгебры квантового умножения на $H_{GL_n \times \mathbb{C}^*}^*(T^*F_\lambda)$ при $u \rightarrow 0$. Этот предел изоморфен модулю $\mathcal{V}_\lambda^+$ над алгеброй $\mathcal{B}^K(\mathcal{V}_\lambda^+)$, а также модулю $\frac{1}{D}\mathcal{V}_\lambda^-$ над алгеброй $\mathcal{B}^K(\frac{1}{D}\mathcal{V}_\lambda^-)$.

Приложение. Топологическое описание представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве когомологий многообразия флагов

Для данного $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ положим

$$\begin{aligned} e_{a,a+1}\lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{a-1}, \lambda_a + 1, \lambda_{a+1} - 1, \lambda_{a+2}, \dots, \lambda_N), \\ e_{a+1,a}\lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{a-1}, \lambda_a - 1, \lambda_{a+1} + 1, \lambda_{a+2}, \dots, \lambda_N), \\ \lambda' &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{a-1}, \lambda_a, 1, \lambda_{a+1} - 1, \lambda_{a+2}, \dots, \lambda_N), \\ \lambda'' &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{a-1}, \lambda_a - 1, 1, \lambda_{a+1}, \lambda_{a+2}, \dots, \lambda_N). \end{aligned}$$

Обозначим через A' (соответственно B' , C') расслоение ранга λ_a (соответственно 1, $\lambda_{a+1} - 1$) над $\mathcal{F}_{\lambda'}$, слой которого над флагом $L_1 \subset \dots \subset L_{N+1}$ равен L_a/L_{a-1} (соответственно L_{a+1}/L_a , L_{a+2}/L_{a+1}). Обозначим через A'' (соответственно B'' , C'') расслоение ранга $\lambda_a - 1$ (соответственно 1, λ_{a+1}) над $\mathcal{F}_{\lambda''}$, слой которого над флагом $L_1 \subset \dots \subset L_{N+1}$ равен L_a/L_{a-1} (соответственно L_{a+1}/L_a , L_{a+2}/L_{a+1}).

Рассмотрим очевидные проекции

$$\mathcal{F}_{\lambda} \xleftarrow{\pi'_1} \mathcal{F}_{\lambda'} \xrightarrow{\pi'_2} \mathcal{F}_{e_{a,a+1}\lambda} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{\lambda} \xleftarrow{\pi''_1} \mathcal{F}_{\lambda''} \xrightarrow{\pi''_2} \mathcal{F}_{e_{a+1,a}\lambda}.$$

Для эквивариантного отображения f (например, $f = \pi'_1$ или π''_1) обозначим через f^* индуцированное отображение обратного образа на пространстве эквивариантных когомологий. Для эквивариантного слоения f (например, $f = \pi'_2$ или π''_2) обозначим через f_* его отображение Гизина (также известное как отображение прямого образа или интегрирования по слою). Обозначим через $e(X)$ эквивариантный класс Эйлера векторного расслоения X .

Следующий результат был анонсирован в работе [14].

Теорема А.1. (i) *Отображение*

$$\rho^-(e_{a,a+1} \otimes t^j): H_{\lambda} \rightarrow H_{e_{a,a+1}\lambda}, \quad x \mapsto \pi'_{2*}(\pi'^*_1(x) \cdot e(\text{Hom}(B', C')) \cdot e(B')^j),$$

делает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda} & \xrightarrow{\rho^-(e_{a,a+1} \otimes t^j)} & H_{e_{a,a+1}\lambda} \\ \downarrow i^- & & \downarrow i^- \\ \frac{1}{D} \mathcal{V}_{\lambda}^- & \xrightarrow{e_{a,a+1} \otimes t^j} & \frac{1}{D} \mathcal{V}_{e_{a,a+1}\lambda}^- \end{array}$$

коммутативной.

(ii) *Отображение*

$$\rho^-(e_{a+1,a} \otimes t^j): H_{\lambda} \rightarrow H_{e_{a+1,a}\lambda}, \quad x \mapsto \pi''_{2*}(\pi''^*_1(x) \cdot e(\text{Hom}(A'', B'')) \cdot e(B'')^j),$$

делает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda} & \xrightarrow{\rho^-(e_{a+1,a} \otimes t^j)} & H_{e_{a+1,a}\lambda} \\ \downarrow i^- & & \downarrow i^- \\ \frac{1}{D} \mathcal{V}_{\lambda}^- & \xrightarrow{e_{a+1,a} \otimes t^j} & \frac{1}{D} \mathcal{V}_{e_{a+1,a}\lambda}^- \end{array}$$

коммутативной.

Доказательство. Мы докажем утверждение (i), доказательство утверждения (ii) аналогично. Рассмотрим индекс K в $\mathcal{J}_{e_{a,a+1}\lambda}$, такой, что $K_1 = \{1, \dots, (e_{a,a+1}\lambda)_1\}$, $K_2 = \{(e_{a,a+1}\lambda)_1 + 1, \dots, (e_{a,a+1}\lambda)_1 + (e_{a,a+1}\lambda)_2\}$ и т. д.

Рассмотрим $x = [h(z, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N)] \in H_\lambda$. Его образ при отображении i^- равен

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} v_I \otimes \frac{h(z, z_{I_1}, \dots, z_{I_N})}{R(z_{I_1} | \dots | z_{I_N})}.$$

Коэффициент при v_K в образе данного выражения при отображении $e_{a,a+1} \otimes t^j$ равен

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in K_a} \frac{h(z, z_{K_1}, \dots, z_{K_{a-1}}, z_{K_a-i}, z_{K_{a+1} \cup i}, z_{K_{a+2}}, \dots, z_{K_N}) z_i^j}{R(z_{K_1}, \dots, z_{K_{a-1}}, z_{K_a-i}, z_{K_{a+1} \cup i}, z_{K_{a+2}}, \dots, z_{K_N})} \\ &= \frac{1}{R(z_{K_1} | \dots | z_{K_N})} \sum_{i \in K_a} \frac{h(z, z_{K_1}, \dots, z_{K_a-i}, z_{K_{a+1} \cup i}, \dots, z_{K_N}) z_i^j R(z_i | z_{K_{a+1}})}{R(z_{K_a-i}, z_i)}. \end{aligned} \quad (A.1)$$

С другой стороны, используя формулу локализации Атьи–Ботта для отображения π'_{2*} , можно показать, что образ x при отображении $\rho^-(e_{a,a+1} \otimes t^j)$ равен

$$\sum_{\delta \in \Delta_a} \frac{h(z, \Delta_1, \dots, \Delta_{a-1}, \Delta_a - \delta, \delta, \Delta_{a+1}, \dots, \Delta_N) R(\delta | \Delta_{a+1}) \delta^j}{R(\Delta_a - \delta | \delta)}, \quad (A.2)$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ обозначают корни Черна естественных расслоений над $\mathcal{F}_{e_{a,a+1}\lambda}$. Коэффициент при v_K в образе (A.2) при отображении i^- равен правой части формулы (A.1). Теорема доказана. $\square$

Топологическая интерпретация образующих представления ρ^+ аналогична, поэтому доказательство мы приводить не будем.

Теорема A.2. (i) *Для отображения*

$$\rho^+(e_{a,a+1} \otimes t^j): H_\lambda \rightarrow H_{e_{a,a+1}\lambda}, \quad x \mapsto \pi'_{2*}(\pi_1'^*(x) \cdot e(\text{Hom}(A', B')) \cdot e(B')^j),$$

имеем $i^+ \circ \rho^+(e_{a,a+1} \otimes t^j) = (e_{a,a+1} \otimes t^j) \circ i^+$.

(ii) *Для отображения*

$$\rho^+(e_{a+1,a} \otimes t^j): H_\lambda \rightarrow H_{e_{a+1,a}\lambda}, \quad x \mapsto \pi''_{2*}(\pi_1''^*(x) \cdot e(\text{Hom}(B'', C'')) \cdot e(B'')^j),$$

имеем $i^+ \circ \rho^+(e_{a+1,a} \otimes t^j) = (e_{a+1,a} \otimes t^j) \circ i^+$.

Представления $\rho^\pm$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве $\bigoplus_\lambda H_\lambda$ порождают представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространстве $H(\mathbb{C})$, которые также обозначались через $\rho^\pm$ в разд. 3.4. Топологическая интерпретация действия элементов $e_{a,a+1} \otimes t^j$ и $e_{a+1,a} \otimes t^j$ в этих представлениях выглядит точно так же, как и интерпретация действия этих элементов в пространстве $\bigoplus_\lambda H_\lambda$, приведенная в теоремах A.1 и A.2.

Топологическое описание представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N[t]$ в пространствах когомологий многообразий флагов, данная в приложении, является вариантом конструкции Гинзбурга и Вассеро, см. [17], [18]. Мы благодарим Эрика Вассеро за то, что он указал нам на эти работы. Однако, в отличие от упомянутых авторов, мы используем сами многообразия флагов, а не кокасательные расслоения на них. Мы также даем другое доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, **23**:1 (1984), 1–28.
- [2] A. Braverman, D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum cohomology of the Springer resolution*, <http://arxiv.org/abs/1001.0056>.
- [3] V. Chari, S. Loktev, *Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of $\mathfrak{sl}_{r+1}$* , Adv. Math., **207**:2 (2006), 928–960.
- [4] V. Chari, A. Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory (electronic), **5** (2001), 191–223.
- [5] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0604128>.
- [6] M. Gaudin, *Diagonalisation d’une classe d’Hamiltoniens de spin*, J. Physique, **37**:10 (1976), 1089–1098.
- [7] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.
- [8] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Bethe eigenvectors of higher transfer matrices*, J. Stat. Mech. Theory (electronic), No. 8, P08002, 2006.
- [9] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Schubert calculus and representations of general linear group*, J. Amer. Math. Soc., **22**:4 (2009), 909–940.
- [10] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Spaces of quasi-exponentials and representations of $\mathfrak{gl}_N$* , J. Phys. A, **41**:19, 194017 (2008).
- [11] E. Mukhin, A. Varchenko, *Critical points of master functions and flag varieties*, Commun. Contemp. Math., **6**:1 (2004), 111–163.
- [12] A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, Lectures at the 15th Midrasha Mathematicae on: “Derived categories of algebro-geometric origin and integrable systems”, December 19–24, Jerusalem, 2010.
- [13] R. Rimányi, A. Varchenko, *Conformal blocks in the tensor product of vector representations and localization formulas*, <http://arxiv.org/abs/0911.3253>.
- [14] R. Rimányi, V. Schechtman, A. Varchenko, *Conformal blocks and equivariant cohomology*, <http://arxiv.org/abs/1007.3155>.
- [15] D. Talalaev, *Quantization of the Gaudin system*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0404153>.
- [16] A. Varchenko, *A Selberg integral type formula for an $\mathfrak{sl}_2$ one-dimensional space of conformal blocks*, Mosc. Math. J., **10**:2 (2010), 469–475.
- [17] E. Vasserot, *Représentations de groupes quantiques et permutations*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **26**:6 (1993), 747–773.
- [18] E. Vasserot, *Affine quantum groups and equivariant K-theory*, Transformation groups, **3**:3 (1998), 269–299.

Department of Mathematics,
University of North Carolina at Chapel Hill
e-mail: anv@email.unc.edu

Department of Mathematics,
University of North Carolina at Chapel Hill
e-mail: rimanyi@email.unc.edu

Department of Mathematical Sciences,
Indiana University–Purdue University Indianapolis
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
e-mail: vt@math.iupui.edu, vt@pdmi.ras.ru

Institut de Mathématiques de Toulouse
e-mail: schechtman@math.ups-tlse.fr

Поступило в редакцию
22 марта 2011 г.