Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Гиндикин, Замечания об инфинитезимально дезарговых семействах кривых, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 4, 32–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:10:09

УДК 514.7

Замечания об инфинитезимально дезарговых семействах кривых

© 2011. С. Г. Гиндикин

Памяти Владимира Арнольда

Мы рассматриваем 2-параметрические инфинитезимально дезарговы семейства кривых на плоскости, которые в окрестности каждой кривой близки к семейству прямых: их свойства, примеры, многомерные обобщения

Почти 60 лет назад я встретил Диму Арнольда на математическом кружке в МГУ: тогда мы были шестиклассниками. С тех пор я был под впечатлением многих его удивительных качеств. Одно из них было искусство увидеть в ситуациях, кажущихся абсолютно классическими, феномены, которые либо оставались незамеченными ранее, либо были основательно забыты. Мне кажется, что пример 2-параметрических семейств кривых на плоскости, который рассматривается в конце 1-й главы его учебника [1], хорошо иллюстрирует такие случаи.

1. Рассмотрим локальное семейство кривых общего положения

$$y = f(x; \xi, \eta)$$

в окрестности точки $(x, y) = (0, 0)$; (ξ, η) — это параметры. Его можно интерпретировать как семейство интегральных кривых дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = F(y', y, x).$$

Рассмотрим дуальное семейство кривых на параметрической плоскости

$$\eta = \varphi(\xi, x, y)$$

и соответствующее (дуальное) дифференциальное уравнение

$$\eta'' = \Phi(\eta', \eta, \xi),$$

определяющее это дуальное семейство. Рассмотрение таких семейств кривых (уравнений) возвращает нас во времена Софуса Ли, чей студент Трессе исследовал инварианты этих уравнений.

Следуя В. И. Арнольду, назовем уравнение $F(p, y, x)$ (семейство кривых f) инфинитезимально дезарговым в элементе (p_0, y_0, x_0) , если $F(p, y, x)$ может быть преобразовано локальным диффеоморфизмом плоскости (x, y) к $O(|p|^3 + |y|^3)$ в окрестности элемента $(0, 0, 0)$. Скажем, что семейство кривых является *инфинитезимально дезарговым* в некоторой окрестности, если оно обладает этим свойством в каждой точке этой окрестности. Этот класс семейств замкнут относительно диффеоморфизмов. Кривые таких семейств в естественном смысле

близки к семействам прямых в окрестности каждой кривой. Этот класс семейств кажется фундаментальным объектом, но я не знаю, чтобы кто-то рассматривал его до В. И. Арнольда.

Однако дуальное понятие — эквивалентное условие на дуальное уравнение Φ — было хорошо известно. Оно состоит в том, что $\Phi(p, \eta, \xi)$ является полиномом не выше третьей степени по p . Замечательно и нетривиально, что это условие инвариантно относительно диффеоморфизмов плоскости (ξ, η) (для степеней, отличных от трех, это не верно). Э. Картан показал, что такие семейства являются в точности семействами геодезических для проективных связностей без кручения на плоскости. По этой причине будем называть такие семейства кривых *картановскими*. Примеры картановских семейств легко строить, задавая полиномы Φ по p , хотя сами кривые и не будут определены явно. Одновременно мы получим примеры инфинитезимально дезарговых семейств кривых как дуальные семейства, но опять-таки не явно. Существуют ли известные семейства кривых, которые инфинитезимально дезарговы? Связаны ли какие-либо задачи с инфинитезимальной дезарговостью?

2. Центральный факт теории 2-параметрических семейств кривых на плоскости — это существование канонических структур локально проективных прямых на кривых семейства. Начнем со случая непараметризованных кривых. Пусть кривая $E(\xi, \eta)$ отвечает параметрам (ξ, η) . Тогда точки $(x, y) \in E(\xi, \eta)$ соответствуют в параметрической плоскости дуальным кривым $S(x, y)$ параметров кривых E , проходящих через (x, y) . Рассмотрим касательную плоскость $T_{(\xi, \eta)}$ и касательные прямые к кривым $S(x, y)$, $(x, y) \in E(\xi, \eta)$. В результате возникает локальное соответствие между точками кривой $E(\xi, \eta)$ и точками проективизации касательной плоскости $PT_{(\xi, \eta)}$. Это соответствие лишь локально, поскольку, если сегмент кривой E недостаточно мал, некоторые из дуальных кривых $S(x, y)$ могут иметь одинаковые касательные и в результате мы получаем лишь накрытие E проективной прямой. Рассмотрим нормальные расслоения $NE = T\mathbb{R}^2/TE$ на кривых E (мы берем фактор касательного расслоения на плоскости по касательному расслоению на кривой). Сечения расслоения $NE(\xi, \eta)$ можно отождествить с векторами в $T_{(\xi, \eta)}$.

В случае параметризованных кривых E векторы в $T_{(\xi, \eta)}$ отвечают сечениям расслоения $T\mathbb{R}^2$, ограниченного на E , и мы снова имеем на E локальные проективные координаты. Часто удобен следующий способ описывать локальные проективные структуры на E . Любые два сечения расслоения на E отличаются функциональным множителем $\mu_E(x)$, $x \in E$ [3]. Эти функции определены однозначно с точностью до проективного преобразования, и они определяют локально проективные структуры на E (функции могут быть многозначными).

Укажем инвариантную форму условия Картана. Фиксируем параметры (ξ_0, η_0) и для вектора $\tau \in T_{(\xi_0, \eta_0)}$ рассмотрим дуальную кривую S с касательным вектором τ . Выберем на S параметр s , дающий этот касательный вектор $\tau: (\xi, \eta) = \psi(s; \tau)$, $\tau = \psi'_s(0; \tau)$. Тогда векторное произведение

$$\Psi(\tau) = [\psi''_{ss}(0), \psi'(0)]$$

не зависит от выбора s и является однородным степени 3 по τ . Если Ψ в точке (ξ_0, η_0) является полиномом по τ , то мы будем говорить, что условие Картана

удовлетворяется. Условие Картана эквивалентно тому, что кривые S , проходящие через (ξ_0, η_0) , могут быть диффеоморфизмом плоскости (ξ, η) превращены в этой точке в прямые с точностью до третьего порядка.

Если условие Картана удовлетворяется в некотором угле по τ , то функцию Ψ можно однозначно продолжить, пользуясь условием полиномиальности, на все τ . Таким образом каждое картановское семейство может быть однозначно расширено до картановского семейства, у которого в каждой точке в каждом направлении проходит единственная кривая. Соответственно, если мы имеем семейство кривых с таким свойством, функция Ψ является однозначным сечением линейного расслоения на проективной прямой и должна быть полиномом. По двойственности мы получаем, что кривые в инфинитезимально дезарговом семействе кривых допускают канонические продолжения до проективных прямых (рациональных кривых).

Тем не менее, 2-параметрическое семейство глобальных рациональных кривых не обязано быть дезарговым (например, семейство окружностей радиуса 1). Если мы имеем 2-параметрическое семейство глобальных рациональных кривых, то, наряду с исходными проективными структурами, на кривых имеются канонические локально проективные структуры, существующие, как мы объяснили выше, на произвольных 2-параметрических семействах кривых (в данном случае параметризованных). Условие инфинитезимальной дезарговости совпадает с условием проективной эквивалентности этих двух типов структур. Это условие инвариантно относительно проективного преобразования кривых. В такой ситуации мы можем выбрать локальные аффинные параметры на кривых так, что вариации кривых будут прямыми в этих параметрах. Часто это удобный способ проверить инфинитезимальную дезарговость.

Такое описание объясняет также происхождение этого названия. В проективной планиметрии аксиома Дезарга ответственна за коммутативное сложение сегментов на прямых. В основном она делает согласованными проективные структуры на разных прямых. Может создаться впечатление, что условие инфинитезимальной дезарговости — это условие 1-го порядка. Однако лишь локальные проективные структуры определяются первой инфинитезимальной окрестностью, а их согласованность уже включает следующий порядок. Кривые в дезарговом семействе диффеоморфны прямым в окрестности каждой кривой с точностью до 3-го порядка.

Предложение 1. *Двупараметрическое семейство кривых на двумерном многообразии инфинитезимально дезаргово тогда и только тогда, когда оно может быть продолжено до семейства глобальных рациональных кривых с нормальным пучком $\mathcal{O}(1)$.*

3. Думаю, что наиболее интересный пример инфинитезимально дезаргова семейства кривых, которое не диффеоморфно семейству прямых, — это семейство орициклов на плоскости Лобачевского. Хотя я не встречал явного обсуждения этого свойства, оно важно для геометрии Лобачевского и связанного с ней анализа. Упомянем, что семейство прямых на плоскости Лобачевского локально диффеоморфно семейству евклидовых прямых. Рассмотрим орициклы в реализации геометрии Лобачевского на верхней полуплоскости. Они являются окружностями, касающимися оси x :

$$y^2 - 2\eta y + (x - \xi)^2 = 0.$$

Это семейство орициклов не может быть диффеоморфно семейству евклидовых прямых, поскольку каждая (евклидова) прямая в каждой точке касается двух орициклов. Мы хотим доказать, что оно инфинитезимально дезаргово. Нужно проверить, что дуальное семейство в координатах (ξ, η) удовлетворяет условию Картана. Исключим x, y из η'', η' . Прямое вычисление дает

$$\eta'' = \frac{1 + (\eta')^2}{2\eta}.$$

Мы получили квадратичный полином по η' , условие Картана выполнено, и семейство орициклов инфинитезимально дезаргово.

Этот пример допускает интересное обобщение. В этой конструкции существенно, что окружности являются рациональными кривыми. Оказывается, что возможно описать все инфинитезимально дезарговы семейства окружностей. Поскольку окружности зависят от трех параметров, а мы рассматриваем 2-параметрические семейства, мы должны наложить на окружности одно условие.

Предложение 2. Семейство окружностей удовлетворяет условию инфинитезимальной дезарговости, если и только если окружности семейства или все проходят через фиксированную точку или все касаются фиксированной кривой.

Это частный случай очень общего результата о полных семействах рациональных кривых ([3], [4]). Оказывается, что инфинитезимально дезарговы семейства кривых играют исключительную роль в интегральной геометрии кривых на плоскости: для них имеются формулы обращения радоновского типа [2].

4. Теорема Дезарга может быть доказана средствами метрической геометрии на плоскости. Однако в чисто проективной планиметрии, включающей только аксиомы инцидентности, она не может быть доказана и принимается за аксиому, позволяющую, в свою очередь, реконструировать арифметику. Замечательный факт заключается в том, что в трехмерной проективной геометрии теорему Дезарга можно доказать, пользуясь только аксиомами инцидентности. Это основано на известном продолжении конфигурации Дезарга с плоскости в пространство. Обсудим, имеется ли инфинитезимальная версия этого факта.

Ниже следует рассуждение в стиле теории твисторов. Пусть X — область в $\mathbb{R}^3$ и мы рассматриваем локальное 4-параметрическое семейство кривых $E(\xi)$, $\xi \in \Xi$. Мы интересуемся 4-параметрическими семействами кривых, поскольку прямые в $\mathbb{R}^4$ зависят от 4 параметров. Точки $x \in X$ отвечают на четырехмерном параметрическом многообразии Ξ двумерным подмногообразиям $S(x)$, параметризующим кривые, проходящие через x . Так что имеется двойственность между $S(x)$ и $E(\xi)$. Рассмотрим касательное пространство $T_\xi \Xi$ и касательные двумерные плоскости $\alpha(x)$ к $S(x)$, $\xi \in S(x)$ ($x \in E(\xi)$). Пусть конус $V_\xi \subset T_\xi \Xi$ — это объединение плоскостей $\alpha(x)$, $x \in E(\xi)$. Этот конус является касательным к коническому многообразию, состоящему из таких η , что $E(\xi)$ и $E(\eta)$ пересекаются. В случае прямых $x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1$, $x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2$ в $\mathbb{R}^3$ мы берем $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ в качестве локальных координат в $\Xi \supset \mathbb{R}^4$. Двумерные плоскости $\alpha(x)$ в касательных плоскостях определяются уравнениями $d\beta_1 = \lambda d\beta_1$, $d\beta_2 = \lambda d\beta_2$, а конусы V_ξ — уравнениями

$$d\alpha_1 d\beta_2 - d\beta_1 d\alpha_2 = 0.$$

Таким образом, мы имеем конформно плоскую метрику сигнатуры $(2, 2)$ на Ξ .

В отличие от случая $n = 2$, в случае $n = 3$ и 4-параметрических семейств кривых на них нет канонических локально проективных структур (как и для другого числа параметров). Первая возможность, которую естественно обсудить — это предположить, что имеется не только 4-параметрическое семейство кривых, но и согласованное с ним 3-параметрическое семейство поверхностей с естественными отношениями инцидентности: на каждой поверхности имеется 2-параметрическое семейство кривых, а через каждую кривую проходит однопараметрическое семейство поверхностей. Однако оказывается, что тогда семейство кривых диффеоморфно семейству прямых.

В самом деле, в этом случае для каждой поверхности $L(u)$, $u \in U$, где U — это трехмерное параметрическое многообразие, на Ξ имеются двумерные подмногообразия $M(u)$ параметров кривых, лежащих в $L(u)$: $E(\xi) \subset L(u) \sim \xi \in M(u)$. Если $E(\xi) \subset L(u)$, любая другая кривая $E(\eta) \subset L(u)$, $\eta \in M(u)$, пересекает $E(\xi)$. Таким образом, если $\beta(u)$ — касательная плоскость к $M(u)$ в ξ , то $\beta(u) \subset T_\xi$ содержится в конусе V_ξ . В результате мы имеем на трехмерном конусе V_ξ два однопараметрических семейства двумерных плоскостей $\alpha(x)$, $\beta(u)$. Это означает, что конус является квадратичным сигнатуры $(2, 2)$. Это проективизация того факта, что каждая неплоская поверхность в $\mathbb{R}^3$ с двумя семействами линейных образующих проективно эквивалентна однополостному гиперболоиду. Итак, имеется конформная $(2, 2)$ -метрика на Ξ .

Рассмотрим кривизну Вейля для этой конформной метрики W . У нее 2 компоненты: автодуальная и антиавтодуальная части W_+ , W_- . Они допускают следующую интерпретацию. Рассмотрим две проблемы Фробениуса с параметрами. Рассмотрим на Ξ распределение α -плоскостей $\alpha(x)$. В каждой точке ξ они зависят от одного параметра, который можно рассматривать как локально проективный, поскольку конусы V_ξ квадратичны. Двумерные подмногообразия, которые в каждой точке в качестве касательной плоскости имеют α -плоскость, называются α -поверхностями. Интегрируемость означает существование α -поверхностей, имеющих в качестве начальных данных в некоторой точке ξ произвольную α -плоскость. Оказывается, что для этой задачи всегда имеет место единственность [4]. Условие интегрируемости полиномиально по параметру α -плоскостей. Это условие α -интегрируемости совпадает с условием $W_+ = 0$. В нашем случае α -интегрируемость имеется автоматически, поскольку α -поверхности $S(x)$ отвечают точкам $x \in X$ и они должны существовать.

Аналогично мы определяем β -задачу, интегралы которой являются β -поверхностями $M(u)$, $u \in U$, и условием β -интегрируемости является $W_- = 0$. В нашем случае β -интегрируемость имеется, поскольку мы предположили существование поверхностей $L(u)$ в X . Окончательно, $W_+ = 0$, $W_- = 0$, т.е. $W = 0$, и наша конформная метрика является плоской. Это означает, что наше семейство кривых диффеоморфно семейству прямых. Таким образом, условие существования поверхностей, ассоциированных с кривыми, является очень сильным и оставляет только тривиальную возможность семейства прямых.

Ослабим это условие. Предположим, что вместо глобальных поверхностей существуют лишь инфинитезимальные двумерные окрестности кривых. Более точно (если мы рассматриваем непараметризованные кривые), мы предположим, что тотальные пространства нормальных расслоений $NE(\xi)$ являются объединениями двумерных подмногообразий, содержащих $E(\xi)$ (нулевое сечение), так что каждое сечение $NE(\xi)$ лежит в одном из них. Это эквивалентно

тому, что конусы V_ξ являются объединениями β -плоскостей, отвечающих сечениям, лежащим в этих подмногообразиях в $NE(\xi)$. Это означает, что конусы V_ξ квадратичны сигнатуры $(2, 2)$, и мы имеем на Ξ конформную метрику этой сигнатуры. Назовем 4-параметрические семейства кривых, удовлетворяющие этим условиям, допустимыми. Для этой структуры α -проблема интегрируема, поскольку имеются α -поверхности $S(x)$, отвечающие точкам $x \in X$. Значит, $W_+ = 0$ и конформная метрика автодуальна. Однако в общем случае β -проблема может быть не интегрируема. Тогда $W_- \neq 0$ и конформная метрика не является плоской.

Проективизация любой β -плоскости в V_ξ индуцирует структуру локальной проективной прямой на кривой $E(\xi)$ (так же, как и в случае кривых на плоскости), и эта структура не зависит от выбора β -плоскости. Таким образом, на кривых произвольного допустимого 4-параметрического семейства кривых на произвольном трехмерном многообразии X имеется каноническая структура локально проективных прямых.

Пусть имеется четырехмерное многообразие Ξ с конформной $(2, 2)$ -метрикой, определяемой полем конусов $V_\xi \subset T_\xi \Xi$. Одно из двух семейств двумерных плоскостей на этих конусах мы примем за α -плоскости и рассмотрим α -проблему. Для каждого ξ α -плоскости параметризуются точками проективной прямой. Если рассмотреть расслоение (ξ, t) , $\xi \in \Xi$, $t \in P^1$, то мы преобразуем α -параметрическую проблему Фробениуса в классическую проблему Фробениуса. При этом 1-форма dt на распределении может быть найдена из условия интегрируемости [4]. Она полиномиальна в однородных координатах t . В результате локальная по t α -проблема автоматически дает интегрируемость для всех t . Это означает, что локальные рациональные кривые из допустимых семейств автоматически продолжаются до глобальных рациональных кривых и семейства сечений их нормальных расслоений будут диффеоморфны семействам прямых. Последнее условие как раз означает, что условие инфинитезимальной дезарговости удовлетворяется, и мы можем интерпретировать этот результат как инфинитезимальный аналог теоремы Дезарга. В частности, мы имеем:

Предложение 3. *Двупараметрическое семейство кривых на двумерном многообразии, которое можно расширить до 4-параметрического семейства кривых на трехмерном многообразии, инфинитезимально дезаргово.*

5. Последний пример, который мы обсудим здесь, — это возможность обобщить понятие инфинитезимальной дезарговости семейств кривых на случай подмногообразий большей размерности. Общая проблема связана с выбором интерпретации понятия рациональности в больших размерностях, но мы лишь обсудим одну специфическую возможность. Мы уже упоминали, что семейство орициклов на плоскости Лобачевского является инфинитезимально дезарговым. Оказывается, что этот факт допускает обобщение на орисферы на произвольном римановом симметрическом пространстве (некомпактного типа). Рассмотрим пример. Пусть X — многообразие симметрических матриц с единичным детерминантом порядка $l + 1$. Это риманово симметрическое пространство ранга l относительно стандартного действия $G = SL(l + 1; \mathbb{R})$: $x \mapsto g^\top x g$, $g \in SL(l + 1; \mathbb{R})$. Имеем $X = G/K$, где K — это подгруппа ортогональных матриц (максимальная компактная подгруппа). При $l = 1$ мы получаем плоскость Лобачевского.

Через N обозначим максимальную унипотентную подгруппу верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Назовем *орисферами* орбиты подгруппы N и сопряженных с ней подгрупп. Их коразмерность равна l . Множество орисфер транзитивно относительно G . Через A обозначим подгруппу диагональных матриц с положительными диагональными элементами. Пусть $B = AN$ — подгруппа верхних треугольных матриц. Группа B действует на X просто транзитивно: $x = b^\top b$, и это представление единственно. Введем на X канонические координаты, исходя из действия

$$x(a, t) = \exp(a + t)^\top \exp(a + t),$$

где t — верхняя треугольная матрица с нулями на диагонали, а a — диагональная матрица с нулевым следом.

Примем $x(0, 0) = e$ (единичная матрица) за начальную точку, $E(0) = \{x(0, t)\}$ за начальную орисферу и $t = (t_{ij})$, $i < j$, за параметры на $E(0)$. Точки $x(a, t)$ с фиксированным a дают параллельные орисферы $E(a)$, и мы также принимаем t за параметры на них. Вообще, мы переносим эту параметризацию на все орисферы, пользуясь действием G . Все орисферы имеют вид $E(a, k)$ — результат применения $k \in K$ к параллельным орисферам $E(a)$.

Основной факт, который мы хотим подчеркнуть, состоит в том, что вариации орисфер линейны в параметрах t . Пользуясь однородностью, достаточно исследовать вариации орисферы $E(0) = \{(\exp t)^\top \exp t, t \in \ln N\}$. Так что мы должны найти результат правого инфинитезимального умножения $\exp t$ на G . Вариации вдоль A — это сдвиги, так что мы должны рассмотреть лишь действие ортогональной группы K : правые умножения на $\exp(dk)$, где dk — это кососимметрическая матрица. Мы будем делать вычисления по модулю вариаций, касательных к орисфере $E(0)$. Поэтому вместо инфинитезимального действия группы K мы можем рассмотреть инфинитезимальное действие группы нижних треугольных матриц N_- : правые умножения на $\exp(d\zeta)$, $d\zeta \in \ln N_-$. Можно было непосредственно заметить, что почти все орисферы, проходящие через e , могут быть получены действием N_- на $E(0)$. Заметим также, что левые умножения $\exp t$ на элементы из K или N_- не меняют $E(0)$.

Это означает, что мы можем брать в качестве базисных вариации, отвечающие правым умножениям на $\exp(d\zeta_{ji}\delta_{ji})$, $i < j$, где у матрицы δ_{ji} (ji)-коэффициент равен 1, а другие элементы равны нулю. Нужно вычислить коммутатор t с δ_{ji} , и по модулю вариаций, касательных к $E(0)$, мы имеем базисные вариации

$$\Delta_{ji} = d\zeta_{ji}t_{ij}(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \quad i < j,$$

где ε_i — диагональная матрица, у которой i -й элемент равен 1, а остальные элементы равны нулю. Среди A -вариаций имеются

$$\eta_{ij} = da_{ji}(\varepsilon_i - \varepsilon_j).$$

В результате мы имеем канонические структуры произведений проективных прямых. Орисферы допускают замечательную глобализацию этих структур (компактификацию) как треугольно-проективных структур, отвечающих упорядочению корней. Мы не будем рассматривать здесь эту конструкцию. Кроме того, орисферы на симметрических пространствах могут быть сделаны плоскими в окрестности каждой орисферы с точностью до третьего порядка. Эта

геометрия ответственна за обращение орисферического преобразования и играет определяющую роль в гармоническом анализе на симметрических пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, З. Я. Шапиро, *Локальная задача интегральной геометрии в пространстве кривых*, Функц. анализ и его прил., **13**:2 (1979), 11–31.
- [3] J. Bernstein, S. Gindikin, *Notes on integral geometry for manifolds of curves*, Amer. Math. Soc. Transl., **210** (2003), 57–80.
- [4] С. Г. Гиндикин, *Редукции многообразий рациональных кривых и связанные задачи теории дифференциальных уравнений*, Функц. анализ и его прил., **18**:4 (1984), 14–39.

Department of Mathematics, Hill Center, Rutgers University
e-mail: gindikin@math.rutgers.edu

Поступило в редакцию
30 мая 2011 г.