Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Д. В. Трещёв, Относительный вариант теоремы Титчмарша о свертке, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 31–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:49:03

Относительный вариант теоремы Титчмарша о свертке*

Рассматривается алгебра $C_u = C_u(\mathbb{R})$ всех равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций на вещественной оси $\mathbb{R}$ с поточечными операциями и $\sup$ -нормой. Пусть I — замкнутый идеал в C_u , инвариантный относительно сдвигов. Обозначим через $\text{ah}_I(f)$ наименьшее вещественное число (если оно существует), удовлетворяющее следующему условию: если $\lambda > \text{ah}_I(f)$, то $(\hat{f} - \hat{g})|_V = 0$ для некоторого $g \in I$, где V — окрестность точки λ . Классическая теорема Титчмарша о свертке равносильна равенству $\text{ah}_I(f_1 \cdot f_2) = \text{ah}_I(f_1) + \text{ah}_I(f_2)$, где $I = \{0\}$. Устанавливается, что для идеалов I общего вида указанное равенство, как правило, места не имеет, но равенство $\text{ah}_I(f^n) = n \cdot \text{ah}_I(f)$ справедливо для любого I . В то же время представлено много нетривиальных идеалов, для которых общая форма теоремы Титчмарша верна.

1. Классическая теорема Титчмарша о свертке устанавливает, что для пары суммируемых функций на вещественной оси $\mathbb{R}$ с компактными носителями выпуклая оболочка носителя свертки совпадает с арифметической суммой выпуклых оболочек носителей исходных функций. Она легко распространяется на распределения Шварца над пространством $S = S(\mathbb{R})$ быстро убывающих функций и имеет многомерные варианты. В некоторой форме, которую мы напомним ниже, теорема о свертке распространяется на функции, сосредоточенные на полусях, направленных в одну и ту же сторону. Впрочем, большинство обобщений сводятся к тому случаю, когда обе функции суть гладкие функции с компактными носителями (правда, подобная редукция может и скрыть простую суть дела).

В работе [1] при изучении финальной динамики в системе взаимодействующих осциллятора и термостата потребовался «относительный вариант» теоремы Титчмарша, в котором при определении дополнения к носителю локальное совпадение с нулевой функцией заменяется локальной принадлежностью некоторому идеалу (в дальнейшем мы уточним формулировки). Цель данной работы — придать математическим результатам из [1] более простую и общую форму. В принципе здесь можно было бы говорить о «сингулярных носителях», подобно тому, как это делается в теории распределений, когда говорят об отклонении от гладкости или аналитичности, однако с алгебраической точки зрения, которой мы здесь придерживаемся, уместнее говорить об «относительных» вариантах.

Теорему Титчмарша при всей очевидности ее дискретных случаев, когда берутся, например, конечные линейные комбинации сдвигов δ -функции Дирака, никак нельзя отнести к числу тривиальных. Эта теорема имеет многочисленные применения, и с годами было найдено много ее разнообразных доказательств и обобщений. На наш взгляд, одним из самых прозрачных является доказательство, приведенное в лекциях Б. Я. Левина [2, лекция 16]. Правда, оно использует

*Исследование второго автора выполнено при частичной поддержке программы Президиума Российской академии наук «Математическая теория управления».

не только классические (начала прошлого века) факты теории аналитических функций, но и такие, которые были открыты позже теоремы Титчмарша. Вместе с тем, с небольшими модификациями, близкая схема работает и в той ситуации, которая нас интересует, хотя дословно перенести рассуждение нельзя (просто потому, что относительный вариант теоремы о носителе свертки дословно выполняется не в полном объеме).

2. Пусть $M = M(\mathbb{R})$ — комплексная банахова алгебра всех комплексных (регулярных) борелевских мер конечной полной вариации на $\mathbb{R}$. В качестве нормы берется полная вариация, а в качестве умножения — свертка, которая определяется равенством

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) (\mu_1 * \mu_2)(dt) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g(s+t) \mu_1(ds) \mu_2(dt).$$

В определении свертки мер это равенство должно выполняться для всех непрерывных функций g , «исчезающих на бесконечности», но тогда оно выполняется и для всех ограниченных непрерывных функций (детальное обсуждение этой и других банаховых алгебр, а также фундаментальных фактов гармонического анализа можно найти, например, в [3]).

Если использовать стандартное спаривание $\langle g, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) \mu(dt)$ и положить $(g * \mu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x+t) \mu(dt)$, то определение свертки мер можно будет представить в виде $\langle g, \mu_1 * \mu_2 \rangle = \langle g * \mu_1, \mu_2 \rangle$.

Мы будем также использовать и обозначение $(g * \mu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x-t) \mu(dt)$, которое согласовано со всеми стандартными.

Преобразование Фурье меры μ — это функция на двойственной оси, определяемая равенством

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \mu(dt).$$

Через $M_0 = M_0(\mathbb{R})$ мы будем обозначать совокупность мер $\mu \in M$, абсолютно непрерывных по мере Лебега. Хорошо известно (и легко проверить), что M_0 — замкнутый идеал в M .

Каждая мера $\mu \in M_0$ имеет плотность $h \in L^1(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R})$ — пространство Лебега классов эквивалентности суммируемых функций). Обычно плотности отождествляют с мерами, и это позволяет говорить о свертках, преобразованиях Фурье и тому подобных операциях с участием L^1 -функций (в свое время только такие меры и рассматривали, без конца повторяя «почти всюду»). Мы также будем использовать «плотности» (и говорить об отвечающих им функциях, обычно гладких), не забывая, однако, что с формальной точки зрения в подобных случаях речь идет о мерах. Разумеется, термин «функция», как обычно, используется и в более широком смысле.

Каждый из функционалов $\mu \rightarrow \hat{\mu}(\lambda_0)$ задает непрерывный сохраняющий единицу гомоморфизм из M в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Ядро такого функционала — максимальный идеал, но, как известно, такими идеалами не исчерпывается даже граница Шилова пространства максимальных идеалов. Вместе с тем, для $\hat{M}_0$ нет других гомоморфизмов в $\mathbb{C}$, кроме точечных. Кроме того, $\hat{M}$ и $\hat{M}_0$ локально изоморфны (как алгебры функций на двойственной оси).

3. Пусть $C_u = C_u(\mathbb{R})$ — алгебра всех *равномерно* непрерывных ограниченных комплексных функций на вещественной оси. Относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы C_u является C^* -алгеброй и в таком качестве, согласно

теореме Гельфанда–Наймарка, изометрически изоморфна алгебре всех непрерывных функций на некотором компакте. Этот компакт является компактным (= бикompактным) расширением¹⁾ вещественной оси и обозначается здесь через $\alpha\mathbb{R}$ (с целью подчеркнуть, что оно близко к чеховскому расширению $\beta\mathbb{R}$, но подчиняется ему). Как и во всех C^* -алгебрах, каждый замкнутый идеал в C_u симметричен.

Положим $(T_x f)(t) = f(x + t)$. Выбор алгебры C_u вместо алгебры C_b всех ограниченных непрерывных функций объясняется тем, что в случае C_u представление $x \rightarrow T_x$ является сильно непрерывным, т. е. при каждом фиксированном f функция $x \rightarrow T_x f$ непрерывна.

Пространство C_u вместе с векторной структурой и нормой естественно погружается в сопряженное к M_0 . Поэтому мы можем определить преобразование Фурье $\widehat{g}$, считая его функционалом над $\widehat{M}_0$,

$$\langle \widehat{g}, \widehat{\mu} \rangle = 2\pi \langle g, \mu \rangle.$$

Заметим, что топология на $\widehat{M}_0$ переносится с M_0 .

Аналогичное определение используется в теории распределений. Так как $S \subset M_0$, то эти определения согласованы. Таким образом, привлекая (или нет) теорию распределений, мы получаем возможность говорить (и судить) о локальных свойствах преобразований Фурье функций из C_u .

4. При $\sigma > 0$ через $\mathbf{B}_\sigma$ обозначается пространство Бернштейна, которое включает все целые функции экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченные на вещественной оси. Относительно $\sup$ -нормы (по $\mathbb{R}$) это пространство является банаховым. Согласно неравенству Бернштейна²⁾,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2 \sin(\sigma h/2) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |f|, \quad 0 < \sigma h < \pi,$$

для всех $f \in \mathbf{B}_\sigma$.

Пусть $\mathbf{B} = \bigcup_{\sigma>0} \mathbf{B}_\sigma$. Ясно, что $\mathbf{B} \subset C_u$. Более того, по (другой) теореме Бернштейна $\mathbf{B}$ всюду плотно в C_u . Для доказательства этой теоремы удобно рассмотреть свертки $f_\rho = f * v_\rho$, где $\{v_\rho\}$ — «ядро Валле Пуссена», $\rho > 0$. Функция $\widehat{v}_\rho$ сосредоточена на отрезке $|\lambda| \leq 2\rho$, равна 1 при $|\lambda| \leq \rho$ и линейна на двух остальных промежутках.

Из равномерной непрерывности легко вытекает равномерная сходимост $f_\rho \rightarrow f$ при $\rho \rightarrow \infty$. Кроме того, $\widehat{f}_\rho = \widehat{f}$, если $|\lambda| < \rho$. Наконец, если I — инвариантный относительно сдвигов идеал в алгебре (по умножению) C_u и $f \in I$, то $f_\rho \in I$ при каждом $\rho > 0$.

Перечисленные факты, как отмечалось, позволяют упростить некоторые доказательства, однако в ряде случаев без них лучше обойтись.

5. Предположим, что f — непрерывная функция в замкнутой верхней полуплоскости $y = \operatorname{Im} z \geq 0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, аналитическая при $y > 0$. Если f ограничена на вещественной оси $\mathbb{R}$ и имеет экспоненциальный тип

¹⁾ Такие расширения в середине прошлого века систематически использовал Ю. М. Смирнов для изучения в рамках общей топологии введенных В. А. Ефремовичем пространств близости.

²⁾ Предъявленное неравенство означает, что норма оператора сдвига в $\mathbf{B}_\sigma$ совпадает со спектральным радиусом. Когда происходит подобное совпадение для операторов, далеких от нормальных в гильбертовом пространстве, объяснялось еще в [4].

$\sigma > 0$ в верхней полуплоскости¹⁾, то, согласно классической теореме Фрагмена–Линделёфа,

$$|f(z)| \leq e^{\sigma y} \sup_{\mathbb{R}} |f|. \quad (1)$$

Следующее асимптотическое равенство (см. [2, лекция 16]) дополняет и в известном смысле уточняет приведенное неравенство:

$$\log |f(z)| = \sigma y + o(y). \quad (2)$$

Оно выполняется на почти всех лучах $0 < \arg z < \pi$ и на каждом луче, если из него удалить множество конечной логарифмической длины.

Напомним, что измеримое множество E по определению имеет конечную логарифмическую длину на полуоси $r > 0$, если $\int_E (1+r)^{-1} dr < \infty$.

Заметим, что соотношение (2) остается справедливым при сравнительно небольшом росте функции f на вещественной оси, в частности, если рост не выше степенного.

6. Пусть $f \in C_u$ и носитель $\text{supp}(\hat{f})$ преобразования Фурье функции f расположен на некоторой полуоси $\lambda \leq \lambda_0 < \infty$. Наименьшее из таких λ_0 обозначается через $\text{ah}(f)$ и называется *гармонической абсциссой* функции f . Если конечных λ_0 с указанным свойством нет, то считается, что $\text{ah}(f) = +\infty$. Следующая лемма (доказательство которой мы опустим) выводится при помощи стандартных аналитических средств (включая соотношение (2)).

Лемма 1. Пусть $f \in C_u$ и $\sigma > 0$. Условие $\text{ah}(f) \leq \sigma$ выполняется тогда и только тогда, когда продолжение по Пуассону функции $x \rightarrow f(x)e^{i\sigma x}$ в полуплоскость $\text{Im } z > 0$ является там ограниченной аналитической функцией. Кроме того, если $0 < \text{ah}(f) < \infty$, то

$$\text{ah}(f) = \lim_{y \rightarrow \infty}^* y^{-1} \log |f(iy)|, \quad (3)$$

где звездочка означает, что предел (совпадающий с верхним) существует, если из y -оси предварительно удалить подходящее множество конечной логарифмической длины.

Пусть $f \in C_u$, причем $\text{ah}(f) < \infty$. Положим $(T_z f)(t) = f(z+t)$. Ясно, что $T_z f \in C_u$. Следующая лемма вытекает из предыдущей (и доказательство мы снова опустим).

Лемма 2. Фиксируем такую функцию $f \in C_u$, что $\text{ah}(f) < \infty$. Тогда функция $z \rightarrow T_z f$ является непрерывной функцией в замкнутой верхней полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ со значениями в C_u , аналитической при $\text{Im } z > 0$.

Из формулы (3) сразу вытекает равенство

$$\text{ah}(f_1 \cdot f_2) = \text{ah}(f_1) + \text{ah}(f_2) \quad (\text{ah}(f_1), \text{ah}(f_2) < \infty), \quad (4)$$

эквивалентное классической теореме Титчмарша.

7. Пусть $f \in C_u$, и пусть I — замкнутый идеал в C_u , инвариантный относительно сдвигов. Тогда $f * \mu \in I$ для каждой меры $\mu \in M$, и мы будем этим широко пользоваться.

Рассмотрим такие точки $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{R}$ — двойственный экземпляр вещественной оси), что в некоторой окрестности точки λ_0 распределение $\hat{f}$ совпадает

¹⁾К выполнению условия $\sigma > 0$ приводит (при необходимости) вещественный сдвиг функции f , так что оно «не снижает общности», однако заметно упрощает некоторые формулировки и рассуждения.

с $\hat{g}$, где $g \in I$. Легко видеть, что (как и в тривиальном случае) множество всех таких точек λ_0 открыто. Дополнение к этому открытому множеству (на двойственной оси) естественно обозначить через $\text{supp}_I(\hat{f})$. Иногда мы будем называть его *относительным гармоническим носителем функции f* . В частности, (абсолютный) *гармонический носитель* — это $\text{supp}(\hat{f})$. Заметим, что с позиций классического гармонического анализа гармонический носитель — это спектр Бьёрлинга, а с позиций теории Гельфанда–Шилова — это оболочка $\text{hull}(K)$ идеала $K = \text{Ann}(f)$ (= аннулятора функционала f в алгебре суммируемых функций по свертке).

В дальнейшем, если противное не оговаривается (как теперь говорят, «по умолчанию»), мы рассматриваем функции $f \in C_u$, для которых $\text{ah}(f) < \infty$. То же относится к предположению об инвариантности идеалов. С другой стороны, напоминание этих обстоятельств никакой дополнительной смысловой нагрузки не несет.

Относительная гармоническая абсцисса $\text{ah}_I(f)$ — это наименьшее число, ограничивающее сверху $\text{supp}_I(\hat{f})$. Ясно, что $\text{ah}_I(f) \leq \text{ah}(f)$ для всех идеалов I .

Наша задача — выяснить, в какой мере соотношение (4) распространяется на относительные гармонические абсциссы. Отметим сразу, что оно, вообще говоря, нарушается, причем в очень простых случаях.

8. Расширению $\alpha\mathbb{R}$ вместе с топологией фактически сопоставляются гомоморфизмы $\varphi: C_u \rightarrow \mathbb{C}$. Каждому замкнутому идеалу $I \subset C_u$ однозначно соответствует такое замкнутое множество $Q \subset \alpha\mathbb{R}$, что $I = \{f: \varphi(f) = 0 \text{ для всех } \varphi \in Q\}$. Более того, факторалгебра (естественно) изометрически изоморфна алгебре $C(Q)$ с sup -нормой. Норма образа элемента $f \in C_u$ в образе $C_u \rightarrow C_u/I$ обозначается через $\|f\|_{C_u/I}$. С алгебраической точки зрения $Q = \text{hull}(I)$ — *алгебраическая оболочка идеала I* .

Операторы T_x^* , сопряженные к автоморфизмам T_x , естественно порождают гомеоморфизмы компакта $\alpha\mathbb{R}$, так что $(T_x^* \varphi)(f) = \varphi(T_x f)$. Инвариантность идеала $I = I(Q)$ относительно сдвигов равносильна тому, что φ и $T_x^* \varphi$ одновременно принадлежат Q или нет.

Легко проверить, что описанное действие $\mathbb{R}$ на $\alpha\mathbb{R}$ является свободным.

Если φ — гомоморфизм из C_u в $\mathbb{C}$, то через Q_φ мы будем обозначать *закрывание орбиты* $\{T_x^* \varphi\}$. Если φ отвечает точке из $\mathbb{R}$, то $Q_\varphi = \alpha\mathbb{R}$. В противном случае $Q_\varphi \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Следующая лемма — один из основных результатов.

Лемма 3. Пусть $I \subset C_u$ — инвариантный замкнутый идеал, и пусть $f \in C_u$ — функция с полуограниченным справа гармоническим спектром. Тогда

$$\text{ah}_I(f) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log \|T_{iy} f\|_{C_u/I}. \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим через α левую часть в (5) и через β — правую. Не ограничивая общности, можно считать, что оба эти числа положительны. Заметим, что тогда и $\text{ah}(f) > 0$.

Отметим, что если $I = \{0\}$, то лемма 3 фактически покрывается леммой 1.

Покажем сначала, что $\beta \leq \alpha$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Используя соображения вроде указанных в разд. 4, можно найти такую функцию $g \in \mathbf{B} \cap I$, зависящую только от f и ε , что $\text{ah}(f - g) < \alpha + \varepsilon$. Далее, $T_{iy} g \in I$. Действительно, например, для функций g , ограниченных в

верхней полуплоскости, «сдвиг вверх» дает свертка с ядром Пуассона, а свертка оставляет в идеале, так как он инвариантен относительно (вещественных) сдвигов. Таким образом,

$$\|T_{iy}f\|_{C_u/I} = \|T_{iy}(f - g)\|_{C_u/I} \leq \|T_{iy}(f - g)\| \leq \text{const} \cdot e^{(\alpha+\varepsilon)y},$$

так что $\beta \leq \alpha$.

Допустим теперь, что $\beta + \varepsilon < \alpha$ при некотором $\varepsilon > 0$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Выберем такую функцию $h \in S$, что

$$\widehat{h}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\lambda - \alpha| \leq \varepsilon/2, \\ 0, & \text{если } |\lambda - \alpha| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

При таком выборе заведомо

$$f * h \notin I. \quad (6)$$

Пусть ψ — такой непрерывный линейный функционал на C_u , что $\psi|I = 0$ и $\|\psi\| = 1$. При $y \geq 0$ положим $g(z) = \psi(T_z f)$. Эта функция непрерывна при $\text{Im } z \geq 0$, ограничена и равномерно непрерывна на каждой горизонтальной оси в замкнутой верхней полуплоскости и является аналитической при $\text{Im } z > 0$ (лемма 2).

Так как $\psi|I = 0$, то $|g(iy)| \leq \text{const} \cdot e^{\beta y}$ при $y \geq 0$. Поэтому $\text{ah}(g) \leq \beta$. Следовательно, $g * h = 0$. Таким образом,

$$0 = (g * h)(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(T_{-x} f) h(x) dx = \psi \left(\int_{\mathbb{R}} (T_{-x} f) h(x) dx \right) = \psi(f * h).$$

Так как ψ — произвольный функционал (удовлетворяющий указанным условиям), то по теореме Хана–Банаха непременно $f * h \in I$, что, однако, противоречит условию (6), и лемма доказана.

В качестве очевидного следствия мы получаем неравенство

$$\text{ah}_I(f_1 \cdot f_2) \leq \text{ah}_I(f_1) + \text{ah}_I(f_2). \quad (7)$$

Приведем простой пример, который показывает, что неравенство (7) может оказаться строгим. Выделим однозначную аналитическую ветвь функции $\sqrt{z}$ в верхней полуплоскости условием $\sqrt{1} = 1$. Положим $f_1(z) = \exp(-\sqrt{z})$. Через f_2 обозначим аналогичную функцию в верхней полуплоскости с убыванием к 0 на отрицательной полуоси. Пусть C_0 — идеал функций, для которых на вещественной оси $|f(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Очевидно, что $f_1 f_2 \in C_0$, хотя ни один из сомножителей C_0 не принадлежит.

Вместе с тем, для совпадающих сомножителей равенство сохраняется (и сразу вытекает из леммы 3):

Теорема 1. $\text{ah}_I(f^n) = n \cdot \text{ah}_I(f)$.

Замечание. Общий случай теоремы 1 стандартным способом сводится к случаю $n = 2$. Действительно, тогда по индукции теорема выполняется для всех $n = 2^k$. Далее, при других n , выбирая m из условия $2^n = m + n$ и используя неравенство (7) (которое, кстати, легко доказать непосредственно), мы получим теорему 1 в общем случае.

Любопытно, что в классической ситуации, имеются пути (впервые обнаруженные Микусинским), позволяющие, отправляясь от квадратов, перейти к

произведениям произвольных пар (см., например, [5, п. 4.3]). Приведенный выше пример, в частности, показывает, что в нашем случае такой «скачок» невозможен.

9. В доказательстве леммы 3 мы использовали все непрерывные функционалы ψ , ядро которых содержит идеал I , хотя могли бы привлекать только мультипликативные, поскольку каждый замкнутый идеал в C_u — пересечение максимальных. В приводимой ниже лемме, аналогичной лемме 3, такое сужение оказывается принципиально важным. Более того, формально говоря, нам хватит всего лишь одного мультипликативного функционала.

Напомним, что при $\varphi \in \alpha\mathbb{R}$ через Q_φ мы обозначаем замыкание орбиты «точки» φ . Ниже имеет смысл сразу предположить, что $\varphi \notin \mathbb{R}$. Как и в лемме 3, мы считаем, что $\text{ah}(f) < \infty$. Символы α и β имеют тот же смысл, что и в лемме 3, а символ $\lim^*$ — тот же смысл, что и в лемме 1.

Лемма 4. Если $f \in I = I(Q_\varphi)$, то

$$\text{ah}_I(f) = \lim_{y \rightarrow \infty}^* y^{-1} \log |\varphi(T_{iy}f)|. \quad (8)$$

Доказательство. Обозначим через γ правую часть в (8). Очевидно, что $\gamma \leq \beta$. Так как, согласно лемме 3, $\alpha = \beta$, то достаточно проверить, что $\beta \leq \gamma$.

Заметим, что для подалгебры функций $f \in C_u$ с $\text{ah}(f) < \infty$ при фиксированном z из верхней полуплоскости отображение $f \rightarrow T_z f$ является эндоморфизмом и, следовательно, $f \rightarrow \varphi(T_z f)$ — гомоморфизмом в $\mathbb{C}$ (в условиях леммы 4 предположение $\text{ah}(f) < \infty$ считается выполненным). Наконец, ясно, что

$$\|f\|_{C_u/I} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(T_x^*(f))|. \quad (9)$$

Предположим, что $\|f\| = 1$ (это не меняет дела). Пусть по определению $g(z) = \varphi(T_z f)$ при $\text{Im } z \geq 0$. Функция g имеет конечный экспоненциальный тип в верхней полуплоскости, причем $|g(x)| \leq 1$ на вещественной оси. Поэтому по формуле (1) (т. е. по теореме Фрагмена–Линделёфа) $|g(z)| \leq \exp \gamma y$.

Последнее неравенство вместе с формулой (9) приводит к неравенству $\beta \leq \gamma$, и лемма доказана.

Теорема 2. Если $I = I(Q_\varphi)$, то

$$\text{ah}_I(f_1 \cdot f_2) = \text{ah}_I(f_1) + \text{ah}_I(f_2). \quad (10)$$

Заметим, что, формально говоря, теорема 2 включает теорему Титчмарша.

Пусть Q_1, Q_2 — инвариантные замкнутые подмножества в $\alpha\mathbb{R}$ и $Q = Q_1 \cup Q_2$. Следующая теорема — общая форма приведенного выше примера.

Теорема 3. Если $Q_1 \setminus Q_2 \neq \emptyset \neq Q_2 \setminus Q_1$, то для идеала $I = I(Q)$ соотношение (10), вообще говоря, нарушается.

Доказательство. В дальнейшем $k = 1$ или 2 . Пусть $\varphi_k \in Q \setminus Q_k$. Существуют такие функции f_k , что $f_k \in I(Q_k)$ и $\varphi_k(f_k) = 1$. Из разд. 4 вытекает существование таких функций $g_k \in \mathbf{B} \cap I(Q_k)$, что $\|f_k - g_k\| < \varepsilon < 1/2$. Обе функции g_1, g_2 имеют компактные гармонические спектры и обе не принадлежат I , так что их гармонические абсциссы — конечные вещественные числа. Вместе с тем $g_1 \cdot g_2 \in I$, и теорема доказана.

10. Нам осталось сделать несколько замечаний. Вероятно, теоремы 2 и 3 допускают синтез, приводящий к критерию, т. е. к описанию всех идеалов, для

которых теорема Титчмарша выполняется в полном объеме. Естественно предположить, что для достижения этой цели потребуется гораздо более тщательное изучение «пространства орбит».

Очевидно, что такой критерий, как и теорема 1, представляют интерес и в многомерном случае. Для решения многомерных задач представляется перспективной попытка распространить на нашу ситуацию первоначальный подход Лионса [6]–[8], более современное описание которого см., например, в [9, п. 16.3]. Не исключено, что применение указанного выше асимптотического соотношения (2) может оказаться полезным и, вероятно, приведет к некоторым упрощениям даже в классической ситуации. Конечно, многомерные варианты интересны и для теоремы 1. Более того, для классической теоремы Титчмарша известно, в каких топологических абелевых группах она выполняется (см., в частности, [10], [11]), скажем, годится группа $\mathbb{R}^n$, но взятая в дискретной топологии. Аналогичный вопрос имеет смысл и в нашем случае.

Мы благодарим А. Б. Александрова, строгая, но справедливая критика которого первоначального варианта заставила превратить текст в гораздо более внятный.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. V. Treschev, *Oscillator and thermostat*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (DCDS–A), **28**:4 (2010), 1693–1712 .
- [2] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Translations of Math. Monographs, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [3] Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Мир, М., 1972.
- [4] Е. А. Горин, *Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии*, УМН, **33**:4 (1978), 169–188.
- [5] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1. Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.
- [6] J. L. Lions, *Supports de produits de compositions*, C.R. Acad. Sci., **232** (1951), 1530–1532.
- [7] J. L. Lions, *Supports de produits de compositions. I*, C.R. Acad. Sci., **232** (1951), 1622–1624.
- [8] J. L. Lions, *Supports dans la transformations de Laplace. II*, J. Anal. Math., **2** (1953), 369–380.
- [9] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Мир, М., 1986.
- [10] B. Weiss, *Titchmarsh’s convolutions theorem on groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **19** (1968), 75–79.
- [11] Y. Domar, *Convolutions theorem of Titchmarsh type on discrete $\mathbf{R}^n$* , Proc. Edinburgh Math. Soc., **32**:3 (1989), 449–457.

Московский педагогический
государственный университет
e-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Институт математики РАН им. В. А. Стеклова
e-mail: treschev@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
28 марта 2011 г.