Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 79–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 02:54:15

Тогда f имеет единственную неподвижную точку в X и для каждого $x \in X$ последовательность итераций $\{f^n x\}$ сходится к этой неподвижной точке.

Как обычно, обозначим через $F(f)$ множество всех фиксированных точек отображения $f: X \rightarrow X$. Говорят, что отображение f обладает свойством P , если $F(f) = F(f^n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, т.е. если оно не имеет периодических точек. Приведенное выше доказательство в качестве следствия дает такой известный ранее результат [8, теорема 3.2]:

Следствие 5. Пусть (X, d) — полное K -метрическое пространство относительно конуса P , причем $\text{int } P \neq \emptyset$, а $f: X \rightarrow X$ — квазисжатие с константой $\lambda \in (0, 1/2)$. Тогда f обладает свойством P .

Доказательство. Теорема 3 показывает, что $F(f) \neq \emptyset$. Так как включение $F(f) \subset F(f^n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место всегда, то проверить следует только обратное включение. Допустим, что $u \in F(f^n)$, т.е. $f^n u = u$. Из (4) следует, что

$$d(u, fu) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} d(u, fu), \quad (9)$$

и, очевидно, мы получаем $fu = u$. $\square$

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту работы за высказанные существенные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Abbas, B. E. Rhoades, Appl. Math. Lett., **22**:4 (2009), 511–515. [2] C. D. Bari, P. Vetro, Rend. Circ. Mat. Palermo, **57**:2 (2008), 279–285. [3] Lj. B. Ćirić, Proc. Amer. Math. Sc., **45** (1974), 267–273. [4] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985. [5] L.-G. Huang, X. Zhang, J. Math. Anal. Appl., **332**:2 (2007), 1468–1476. [6] D. Ilić, V. Rakočević, Appl. Math. Lett., **22**:5 (2009), 728–731. [7] G. Jungck, S. Radenović, S. Radojević, V. Rakočević, Fixed Point Theory and Applications, 2009, Art. ID 643640, doi: 10.1155/2009/643640. [8] Z. Kadelburg, S. Radenović, V. Rakočević, Appl. Math. Lett., **22**:11 (2009), 1674–1679.

Institute of Mathematics, Faculty of Science
University of Novi Sad, Serbia
e-mail: gajic@im.ns.ac.rs

Поступило в редакцию
18 апреля 2010 г.

University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Department of Mathematics, Serbia
e-mail: vrakoc@ptt.rs

УДК 517.988.6

О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений*

© 2012. Б. Д. ГЕЛЬМАН

1. Топологическая размерность множества неподвижных точек многозначного отображения. Необходимые сведения из теории многозначных отображений (м-отображений) содержатся в [1].

*Это исследование поддержано РФФИ, грант №08-01-00192а.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $E = E_1 \times E_2$, $U \subset E$ — ограниченное открытое множество и $F = F_1 \times F_2: \bar{U} \rightarrow Kv(E_1) \times Kv(E_2)$ — вполне непрерывное m -отображение с компактными выпуклыми значениями. Пусть $\Phi = \text{id} - F$ — многозначное векторное поле, порожденное отображением F , и $N = N(\Phi, \bar{U})$ — множество неподвижных точек отображения F . Если $N \cap \partial U = \emptyset$, то определена топологическая степень $\gamma(\Phi, \bar{U})$.

Теорема 1.1. Пусть

- (a) m -отображение F_1 вполне непрерывно;
 - (b) m -отображение F_2 непрерывно, компактно и для любой точки $(x_1, x_2) \in U$ выполнено неравенство $\dim(F_2(x_1, x_2)) \geq n$;
 - (c) $\gamma(\Phi, \bar{U}) \neq 0$.
- Тогда $\dim N \geq n$.

Доказательство. Рассмотрим на N непрерывное m -отображение

$$\Phi_2(x_1, x_2) = x_2 - F_2(x_1, x_2).$$

Предположим противное, т. е. $\dim N \leq n - 1$. Очевидно, что отображение Φ_2 удовлетворяет условиям леммы Сэн-Раймонда (см. [2]). Следовательно, существует сечение $\hat{\varphi}: N \rightarrow E_2$, $\hat{\varphi}(x_1, x_2) = x_2 - \hat{f}(x_1, x_2)$, такое, что $0 \neq \hat{\varphi}(x_1, x_2) \in \Phi_2(x_1, x_2)$ для любой точки $(x_1, x_2) \in N$. В силу теоремы Майкла (см., например, [1]) существует непрерывное сечение $f: \bar{U} \rightarrow E_2$, $f(x_1, x_2) \in F_2(x_1, x_2)$, такое, что $f|_N = \hat{f}$. Рассмотрим m -отображение $G = F_1 \times f: \bar{U} \rightarrow Kv(E_1) \times E_2$. Очевидно, что для любой точки $(x_1, x_2) \in \bar{U}$ выполнено включение $G(x_1, x_2) \subset F(x_1, x_2)$, причем G является полунепрерывным сверху и компактным. В силу свойств топологической степени имеем

$$\gamma(\text{id} - G, \bar{U}) = \gamma(\Phi, \bar{U}) \neq 0.$$

Следовательно, отображение G должно иметь неподвижную точку в области U . Однако это не так. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Пусть E — банахово пространство, $\hat{E} = E \times \mathbb{R}^n$. Пусть $U \subset \hat{E}$ — ограниченное открытое множество, а $G: \bar{U} \rightarrow Kv(E)$ — вполне непрерывное m -отображение. Рассмотрим включение

$$x \in G(x, l). \quad (1)$$

Обозначим через $M(G, \bar{U})$ множество решений этого включения.

Пусть $U_0 = U \cap (E \times 0) \neq \emptyset$. Положим $G_0(x) = G(x, 0)$. Будем отождествлять множество U_0 с соответствующим множеством в E .

Следствие 1.2. Если $\gamma(\text{id} - G_0, \bar{U}_0) \neq 0$, то $\dim(M(G, \bar{U})) \geq n$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $Q: \bar{U} \rightarrow Kv(E_1) \times Kv(\mathbb{R}^n)$, определенное условием $Q(x, l) = G(x, l) \times S(x, l)$, где $S(x, l) = B_r[0] \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле.

Нетрудно доказать существование такого $r > 0$, что многозначное отображение Q не будет иметь неподвижных точек на ∂U . В этом случае $\gamma(\text{id} - Q, \bar{U}) \neq 0$. Так как $S(x, l)$ — непрерывное многозначное отображение и $\dim(S(x, l)) = n$, то

$$\dim(M(G, \bar{U})) \geq \dim(N(\text{id} - Q, \bar{U})) \geq n,$$

что и доказывает следствие.

2. Локальная разрешимость задачи Коши для вырожденных дифференциальных включений. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор. Число

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y \in E_2} \frac{\inf\{\|x\| : x \in E_1, A(x) = y\}}{\|y\|}$$

называется нормой м-отображения A^{-1} .

Справедливы следующие свойства (см. [3]).

Предложение 2.1. Пусть $y_0 \in E_2, x_0 \in A^{-1}(y_0)$. Тогда для любого числа $k > \|A^{-1}\|$ существует непрерывное отображение $q: E_2 \rightarrow E_1$, такое, что

- (i) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
- (ii) $\|x_0 - q(y)\| \leq k\|y_0 - y\|$ для любого $y \in E_2$.

Естественно определяется отображение $\hat{A}: D(\hat{A}) \subset C_{([a,b], E_1)} \rightarrow C_{([a,b], E_2)}$, $\hat{A}(x)(t) = A(x(t))$.

Предложение 2.2. 1. Отображение $\hat{A}$ линейно, замкнуто и сюръективно;
2. $\|\hat{A}^{-1}\| = \|A^{-1}\|$.

Пусть $F: X \subset E_1 \rightarrow Kv(E_2)$ есть м-отображение. Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \quad (2)$$

Обозначим через $N(A, F)$ множество его решений.

Пусть $q: E_2 \rightarrow E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям предложения 2.1, и пусть отображение $\alpha: E_2 \times \text{Ker}(A) \rightarrow E_1$ определено формулой $\alpha(y, u) = q(y) + u$. Тогда для произвольного конечномерного подпространства $\mathbb{R}^n \subset \text{Ker}(A)$ определено отображение $G: Y \rightarrow Kv(E_2)$, $G(y, v) = F(\alpha(y, v))$, где $Y = \alpha^{-1}(X) \cap (E_2 \times \mathbb{R}^n)$. Очевидно, что G является вполне непрерывным м-отображением.

Пусть $x_0 \in D(A) \subset E_1$ — некоторая точка, $B_r[x_0]$ — замкнутый шар радиуса r с центром в x_0 и $F: B_r[x_0] \rightarrow Kv(E_2)$ — вполне непрерывное м-отображение.

Теорема 2.3. Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_r[x_0]$ справедливо неравенство

$$\min_{u \in F(x)} \|A(x_0) - u\| < \frac{r}{k},$$

то $N(A, F) \neq \emptyset$ и $\dim(N(A, F)) \geq \dim(\text{Ker}(A))$.

Доказательство. Пусть $y_0 = A(x_0)$. Выберем число k_1 так, чтобы выполнялось неравенство $k > k_1 > \|A^{-1}\|$. Пусть $q: E_2 \rightarrow E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям предложения 2.1 с константой k_1 . Рассмотрим произвольное число $n \leq \dim(\text{Ker}(A))$ и n -мерное подпространство $\mathbb{R}^n \subset \text{Ker}(A)$. Положим

$$U = \{(y, u) \in E_2 \times \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| < r/k_1, \|x_0 - q(y) - u\| < r\}.$$

Это множество непусто и открыто в пространстве $E_2 \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $U_0 = U \cap (E_2 \times 0)$. Нетрудно заметить, что $(B_{r/k}[y_0] \times 0) \subset U_0$.

Пусть $G: \bar{U} \rightarrow Kv(E_1)$, $G(y, u) = F(q(y) + u)$, — м-отображение и $\Phi(y, u) = G(y, u) \cap B_{r/k}[y_0]$. Очевидно, что Φ имеет выпуклые образы и вполне непрерывно.

Покажем, что степень векторного поля $\gamma(\text{id} - \Phi_0, \overline{U}_0)$ отлична от 0, где $\Phi_0(x) = F(q(x)) \cap B_{r/k}[y_0]$. Для этого заметим, что вполне непрерывное векторное поле $\text{id} - \Phi_0$ можно соединить невырожденной гомотопией (стягивая к центру шара) с полем $\varphi(x) = x - y_0$, а $\gamma(\varphi, \overline{U}_0) = 1$.

В силу следствия 1.2 получаем, что множество решений $M = M(\Phi, \overline{U})$ включения $y \in \Phi(y, u)$ непусто и имеет топологическую размерность, большую или равную n . Так как $\alpha(M) \subset N(A, F)$ и α является биекцией на область значений, то $\dim(N(A, F)) \geq n$. Так как число n выбиралось произвольно, то $\dim(N(A, F)) \geq \dim(\text{Ker}(A))$.

Применим теорему 2.3 к изучению следующей задачи:

$$(Ax)' \in F(t, x), \quad (3)$$

$$A(x(0)) = A(x_0), \quad (4)$$

где $x_0 \in D(A)$, а $F: [0, T] \times B_r[x_0] \rightarrow Kv(E_2)$ — компактное m -отображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори (см. [1]) и оценке

$$\max_{u \in F(t, x)} \|u\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \text{ при почти всех } t \in [0, T],$$

для некоторых функций $a(t), b(t) \in L^1_{[0, T]}$.

Решением задачи (3), (4) на промежутке $[0, h]$, $0 < h \leq T$, называется непрерывная функция $x_*: [0, h] \rightarrow D(A) \subset E_1$, такая, что функция $y_*(t) = A(x_*(t))$ является абсолютно непрерывной, $y'_*(t) \in F(t, x_*(t))$ для п.в. $t \in [0, h]$ и $A(x_*(0)) = A(x_0)$. Пусть $\Sigma(x_0, [0, h])$ — множество решений этой задачи на промежутке $[0, h]$.

Теорема 2.4. Если $\dim \text{Ker}(A) > 0$, то при сделанных предположениях найдется такое число $h_0 > 0$, что $\dim(\Sigma(x_0, [0, h_0])) = \infty$.

Доказательство. Обозначим через $\hat{x}_0(t)$ такую функцию, что $\hat{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [0, h]$, где $h \in (0, T]$. Пусть $X = B_r[\hat{x}] \subset C_{([0, h], E_1)}$. Рассмотрим интегральный оператор $\Phi: X \rightarrow Kv(C_{([0, h], E_1)})$,

$$\Phi(x)(t) = \left\{ A(x_0) + \int_0^t y(\tau) d\tau \mid y(t) \in F(t, x(t)) \text{ при п.в. } t \in [0, h] \right\}.$$

Это отображение является вполне непрерывным. Стандартно проверяется, что задача (3), (4) эквивалентна включению $\hat{A}(x) \in \Phi(x)$, где оператор $\hat{A}$ построен по оператору A (см. определение перед предложением 2.2). Применим к изучению этого включения теорему 2.3.

Пусть $k > \|A^{-1}\| = \|\hat{A}^{-1}\|$. Возьмем h_0 столь малым, чтобы

$$\int_0^t a(s) ds (\|x_0\| + r) + \int_0^t b(s) ds < \frac{r}{k}$$

для любого $t \in [0, h_0]$. Тогда

$$\min_{z \in \Phi(x)} \|\hat{A}(\hat{x}_0) - z\| < \frac{r}{k},$$

т. е. выполнены условия теоремы 2.3. Следовательно,

$$\dim(\Sigma(x_0, [0, h_0])) \geq \dim(\text{Ker}(\hat{A})) = \dim(C_{([0, h], \text{Ker}(A))}) = \infty.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений*, КомКнига (URSS), М, 2005. [2] J. Saint Raymond, C. R. Acad. Sci. Paris, **298** (1984), 71–74. [3] Б. Д. Гельман, Функциональный анализ и его прил., **42:3** (2008), 78–81.

Воронежский государственный университет
e-mail: gelman@func.vsu.ru

Поступило в редакцию
19 мая 2010 г.

УДК 517.984

Об округлениях в топологических частично упорядоченных пространствах

© 2012. А. Л. Крюкова

1. Введение. В практике компьютерных вычислений одна из наиболее часто встречающихся операций — это округление (промежуточных) результатов. Истоки аксиоматической теории округлений содержатся в работе Кулиша [4], в которой он определил их как отображения линейно упорядоченного множества в его подмножество, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям (аксиомам). Понятие интервального округления было сформулировано и систематически изучалось в работах [2], [3]. В данной работе интервальные округления изучаются в рамках общей теории топологических частично упорядоченных пространств. Мы устанавливаем некоторые общие свойства округлений, (частично) характеризуем их в классе изотонных отображений, изучаем способы их описания и, в частности, для интервальных округлений строим функциональную модель, позволяющую во многих случаях сводить изучение свойств округлений к чисто аналитическим вопросам.

2. Округления и их неподвижные точки. Напомним, что частично упорядоченное пространство называется решеткой, если любые два его элемента обладают точной нижней и точной верхней гранями. Решетка называется полной (условно полной), если точную верхнюю и точную нижнюю грани имеет каждое (соответственно каждое ограниченное) ее подмножество.

Мы будем называть упорядоченное пространство условно l -полным, если любое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

Для любого упорядоченного пространства $(X, \leq)$ обозначим через $IE(X)$ совокупность всех его отображений φ в себя, для которых 1) $x \leq \varphi(x)$ и 2) $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, если $x_1 \leq x_2$. Отображение $\varphi \in IE(X)$ называется (*верхним*) *округлением* (или замыканием [1]), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию 3) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Округления φ и ψ в пространствах $(X, \leq)$ и $(Y, \leq)$ назовем *эквивалентными*, если существует сохраняющая порядок биекция $f: X \rightarrow Y$, такая, что

$$f(\varphi(x)) = \psi(f(x)) \quad (1)$$

для любого $x \in X$.