Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, Результаты и контурные интегралы, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 39–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:07:04

Результанты и контурные интегралы*

© 2012. А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров

Результанты — это важные специальные функции, использующиеся в описании нелинейных явлений. Результант $R_{r_1, \dots, r_n}$ определяет условие согласованности системы n однородных полиномов степеней $r_1, \dots, r_n$ от n переменных, так же как детерминант определяет условие согласованности системы линейных уравнений. К сожалению, в случае большого числа переменных известно мало удобных формул для результатантов. В этой статье мы используем контурные интегралы Коши, чтобы получить полиномиальную формулу для результатантов, которая, как ожидается, будет полезна в приложениях.

Хорошо известно, что однородная система n линейных уравнений от n неизвестных имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда соответствующий детерминант обращается в нуль. Решения неоднородных линейных систем и гауссовы интегралы (связанные с линейными уравнениями движения) выражаются через детерминанты. Похожим образом в нелинейном случае система однородных полиномов $f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})$ степеней $r_1, \dots, r_n$ от n переменных $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ имеет ненулевое общее решение (над полем комплексных чисел) тогда и только тогда, когда коэффициенты системы удовлетворяют соотношению

$$R_{r_1 \dots r_n} \{f_1, \dots, f_n\} = 0,$$

где R — это полиномиальная функция от коэффициентов полиномов $f_1, \dots, f_n$, называемая *результантом* этой системы (в дальнейшем мы будем часто опускать индексы $r_1, \dots, r_n$). Для линейных систем результатант — это детерминант, хорошо известный и хорошо понятый объект линейной алгебры. К сожалению, наше понимание свойств результатантов общего вида пока еще не столь глубоко. Изучение их — это сравнительно новый раздел математики, который естественно назвать *нелинейной алгеброй* ([1], [2]).

По аналогии с линейной алгеброй решения неоднородных нелинейных систем выражаются через результатанты при помощи обобщенного правила Крамера [2]; результатанты также определяют сингулярности негауссовых интегралов. По этой причине результатанты имеют все шансы стать центральными специальными функциями зарождающейся нелинейной физики. Они уже используются в физических приложениях; см., например, [3]–[12].

Практическое применение нелинейной алгебры к научным и инженерным задачам зависит от развития эффективных методов работы с результатантами — настолько же эффективных, как методы работы с детерминантами в линейной

*Эта работа была частично поддержана Федеральным агентством по атомной энергетике и Российской академией наук, объединенным грантом 06-01-92059-CE, проектом NWO 047.011.2004.026, грантом INTAS 05-1000008-7865, проектом ANR-05-BLAN-0029-01, грантом РФФИ 07-02-00645 и грантом Президента РФ по поддержке научных школ NSh-3035.2008.2. Работа Ш. Шакирова была также частично поддержана фондом «Династия».

алгебре. Как и в случае детерминантов, интересны обычно не явные выражения (которые занимают сотни страниц уже для небольших значений n и r), а скорее их свойства и эффективные вычислительные алгоритмы, позволяющие вычислить результаты в каждой конкретной ситуации. Некоторые алгоритмы для вычисления результатов уже известны ([13]–[18]). В данной статье мы описываем еще один алгоритм, который может быть легко компьютеризирован и применен на практике. Наш подход основан на рекуррентном соотношении

$$\log R\{f_1, \dots, f_n\} = \oint_{|f_2|=\epsilon} \dots \oint_{|f_n|=\epsilon} \frac{\log f_1}{(2\pi i)^{n-1}} d \log f_2 \wedge \dots \wedge d \log f_n + r_1 \log R\{f_2, \dots, f_n\} \Big|_{x_1=0}. \quad (1)$$

Эта формула связывает логарифмы двух величин — n -мерного результата и $(n-1)$ -мерного результата — с помощью $(n-1)$ -кратного контурного интеграла, в котором полиномы f_i берутся с аргументами $(1, z_1, \dots, z_{n-1})$. Следует заметить, что это соотношение в действительности не зависит от выбора ветви логарифма: различные ветви отличаются только лишь на число, кратное $2\pi i$, и это не влияет на значение самого результата R , получаемое экспоненцированием. В приложении А мы доказываем это соотношение при определенных требованиях, накладываемых на полиномы f_i , что, как мы объясним, вполне достаточно для наших целей.

Общую теорию многомерных контурных интегралов этого типа можно найти в работе [19]. Заметим, что для $n = 2$ отношение результатов к таким контурным интегралам было уже исследовано в [17], где были также указаны интересные связи с теорией римановых поверхностей.

Явная формула для $\log R$ получается после нескольких итераций формулы (1): например, для $n = 2$

$$\log R_{r_1 r_2}\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \log f_1(1, z) d \log f_2(1, z) + r_1 \log f_2(0, 1),$$

для $n = 3$

$$\begin{aligned} \log R_{r_1 r_2 r_3}\{f_1, f_2, f_3\} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \log f_1(1, z_1, z_2) d \log f_2(1, z_1, z_2) \wedge d \log f_3(1, z_1, z_2) \\ &\quad + \frac{r_1}{2\pi i} \oint \log f_2(0, 1, z) d \log f_3(0, 1, z) + r_1 r_2 \log f_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

и т.д. Таким образом, логарифм результата выражается через простые контурные интегралы. Однако нашей целью является вычисление результатов, а не только их логарифмов. Чтобы получить R из $\log R$, мы экспоненцируем последний: например, для $n = 2$

$$R_{r_1 r_2}\{f_1, f_2\} = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \log f_1(1, z) d \log f_2(1, z) + r_1 \log f_2(0, 1) \right). \quad (2)$$

$$f_1(1, z) = a \prod_{i=1}^{r_1} (z - \alpha_i), \quad f_2(1, z) = b \prod_{i=1}^{r_2} (z - \beta_i),$$
$$\begin{aligned} R_{r_1 r_2} \{f_1, f_2\} &= \exp \left(\sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \frac{1}{2\pi i} \oint \log(z - \alpha_i) d \log(z - \beta_j) + r_2 \log a + r_1 \log b \right) \\ &= a^{r_2} b^{r_1} \prod_{i=1}^{r_1} \prod_{j=1}^{r_2} (\beta_j - \alpha_i). \end{aligned}$$
$$d_i = \frac{r_1 \cdots r_n}{r_i}$$
$$d = d_1 + \cdots + d_n = r_1 \cdots r_n \left(\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} \right)$$

Наша цель — переписать экспоненциальную формулу в другой форме, которая была бы явно полиномиальной. Как предлагается в [18], этой цели можно достичь, если применить (1) к *сдвинутой* системе

[illegible]

$$\log R\{f_1, \dots, f_n\} = - \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 \dots k_n} \{F_1, \dots, F_n\} \cdot \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \quad (3)$$

(знак «минус» в данном случае выбран для удобства), где тейлоровские компоненты $T_{k_1 \dots k_n}$ с $k_i \geq 0$ являются однородными полиномами степени k_i по коэффициентам полинома f_i , а лорановские компоненты $T_{k_1 \dots k_n}$, у которых

некоторые k_i меньше 0, отсутствуют в разложении просто в силу полиномиальности результата. Мы предлагаем называть тейлоровские компоненты разложения $T_{k_1 \dots k_n}$ *следами* нелинейной системы $F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})$. Явные формулы для следов получены в приложении В с использованием разложения (1) в ряд и вычислением остающихся контурных интегралов.

Экспоненцируя, мы получаем следующее выражение для сдвинутого результата:

$$R\{f_1, \dots, f_n\} = \exp \left(- \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} \right).$$

Результат $R\{F_1, \dots, F_n\}$ равен произведению $(-1)^d$ и коэффициента при $\lambda_1^{d_1} \dots \lambda_n^{d_n}$ в $R\{f_1, \dots, f_n\}$. Мы можем выделить его, разлагая правую часть по степеням λ_i :

$$\exp \left(- \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{k_1 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}. \quad (4)$$

Будем называть разложение в степенной ряд функции $\exp(S(x))$, где $S(x)$ сама представляет собой степенной ряд (возможно, от многих переменных) *разложением Шура*. Из формулы (4) следует такое соотношение между тейлоровскими компонентами:

$$\mathcal{P}_{k_1 \dots k_n} = \sum_{m=1}^{k_1 + \dots + k_n} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_m = \vec{k}} T_{\vec{v}_1} \dots T_{\vec{v}_m},$$

где сумма берется по всем упорядоченным разбиениям вектора $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ на m векторов, обозначаемых через $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$. Упорядоченным разбиением мы называем способ записи вектора с целочисленными компонентами как суммы векторов с целочисленными компонентами, где порядок слагаемых важен. Полиномы $\mathcal{P}_{k_1 \dots k_n}$ (рассматриваемые как полиномы от переменных $T_{k_1 \dots k_n}$) часто называются мультиполиномами Шура. Например,

$$\mathcal{P}_{1,0} = -T_{1,0},$$

$$\mathcal{P}_{2,0} = -T_{2,0} + T_{1,0}^2/2,$$

$$\mathcal{P}_{2,1} = -T_{2,1} + T_{2,0}T_{0,1} + T_{1,0}T_{1,1} - T_{1,0}^2T_{0,1}/2,$$

$$\mathcal{P}_{2,1,0} = -T_{2,1,0} + T_{2,0,0}T_{0,1,0} + T_{1,0,0}T_{1,1,0} - T_{1,0,0}^2T_{0,1,0}/2,$$

$$\mathcal{P}_{1,1,1} = -T_{1,1,1} + T_{1,0,0}T_{0,1,1} + T_{0,1,0}T_{1,0,1} + T_{1,1,0}T_{0,0,1} - T_{0,1,0}T_{0,0,1}T_{1,0,0}.$$

В частности, результат является некоторым мультиполиномом Шура от следов:

$$R\{F_1, \dots, F_n\} = (-1)^d \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n} = \sum_{m=1}^d \frac{(-1)^{m+d}}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_m = \vec{d}} T_{\vec{v}_1} \dots T_{\vec{v}_m}. \quad (5)$$

$$T_{\vec{k}} = T_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1 \dots k_n} \sum_{r_{ij}} \det_{2 \leq i, j \leq n} (\delta_{ij} r_i k_i - r_{ij}) \prod_{i=1}^n (F_i)_{r_{i1}, \dots, r_{in}}^{k_i}, \quad (6)$$
$$(F)_{j_1, \dots, j_n}^k = \text{коэффициент при } x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \text{ в } F(x_1, \dots, x_n)^k$$

Вместе формулы (5) и (6) составляют наш основной результат, явную полиномиальную формулу для результата n однородных полиномов $F_1, \dots, F_n$ от n переменных. Эта формула предоставляет новый алгоритм для вычисления результата конечного набора однородных полиномов F_i , который, как мы ожидаем, будет полезен в будущих приложениях.

[illegible]
$$R\{f_1, \dots, f_n\} = C \cdot f_1(\vec{\Lambda}^{(1)}) \cdots f_1(\vec{\Lambda}^{(N)}), \quad (8)$$
$$\begin{cases} f_2(\vec{\Lambda}^{(i)}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(\vec{\Lambda}^{(i)}) = 0, \end{cases}$$

а C — множитель пропорциональности, который зависит от нормировки векторов $\vec{\Lambda}^{(i)}$. Доказательство формулы Пуассона см. в [1]. Изложим здесь вкратце основную идею того, почему формула Пуассона верна. По определению (7) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда f_1 обращается в нуль на одном из векторов $\vec{\Lambda}^{(i)} \neq 0$. Соответственно результат системы (7) обращается в нуль тогда и только тогда, когда произведение значений полинома f_1 на векторах $\vec{\Lambda}^{(i)}$ обращается в нуль. Так как и результат, и это произведение являются полиномами от коэффициентов полинома f_1 , результат должен делиться на это произведение. Мы предполагаем, что $\vec{\Lambda}^{(i)}$ нормированы таким образом, что множитель C равен единице, — разумеется, это всегда возможно.

Доказательство. Делая замену переменных z_i на y_i , мы получаем

$$\oint \cdots \oint \log f_1(1, z_2, \dots, z_n) \prod_{k=2}^n d \log f_k(1, z_2, \dots, z_n) \\ = \sum_{i=1}^N \oint \cdots \oint \log f_1(1, \vec{z}^{(i)}(\vec{y})) d \log y_2 \cdots d \log y_n.$$

Так как f_k являются полиномами степеней r_k , обратная замена переменных является многозначной и имеет $N = r_2 \cdots r_n$ ветвей, обозначаемых в выписанной выше формуле через $\vec{z}^{(i)}(\vec{y})$, $i = 1, \dots, N$. Интеграл превращается в сумму по ветвям. Интегрирование по y -переменным легко выполняется:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \oint \cdots \oint \log f_1(1, \vec{z}^{(i)}(\vec{y})) \frac{dy_2 \cdots dy_n}{y_2 \cdots y_n} = \log f_1(1, \vec{z}^{(i)}(\vec{0}))$$

в силу теоремы Коши о вычетах. Естественно, обратная замена переменных отображает $(0, \dots, 0)$ в $\vec{\mu}^{(i)}$:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \oint \cdots \oint \log f_1(1, z_2, \dots, z_n) \prod_{k=2}^n d \log f_k(1, z_2, \dots, z_n) \\ = \sum_{i=1}^N \log f_1(1, \vec{z}^{(i)}(\vec{0})) = \sum_{i=1}^N \log f_1(\vec{\mu}^{(i)}).$$

Таким образом, теорема доказана. Основное соотношение (1) следует из (10).

Комментарий. Необходимо объяснить, почему для наших целей достаточно доказать основную теорему в столь ограничительных предположениях о полиномах f_i . Разумеется, для некоторых конкретных полиномов (т. е. для некоторых конкретных значений их коэффициентов, скажем, если положить все или часть коэффициентов одного из полиномов равными нулю) корни могут не быть попарно различными, обратное отображение может не существовать или не обладать достаточно хорошими свойствами и т.д. Для таких систем описанное выше доказательство буквально не применимо и должно быть видоизменено. Однако в настоящей статье в конечном итоге нас интересуют не исследования условий применимости контурно-интегральных представлений, а скорее вычисление результатов.

По этой причине мы рассматриваем только полиномы *в общем положении* (т. е. фактически предполагаем что коэффициенты полиномов $f_1, \dots, f_n$ являются символьными неизвестными, не приравнивая их каким-либо конкретным численным значениям), для которых предположения очевидным образом верны и доказательство полностью прозрачно. Выведа конечные формулы (5) и (6) для таких общего вида полиномов, мы затем пользуемся полиномиальностью результата: так как известно, что результат является полиномиальной функцией, то из справедливости формул (5) и (6) для полиномов общего вида следует справедливость их для *любых* полиномов. Контурно-интегральное представление в данном случае является лишь промежуточным шагом на пути к конечному результату.

Приложение В: Явная формула для следов (3)

Покажем, что для положительных k_i след $T_{k_1 \dots k_n}$ дается выражением

$$T_{k_1 \dots k_n} = \sum_{(r_{ij})} \det_{2 \leq i, j \leq n} (\delta_{ij} r_i k_i - r_{ij}) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(F_i)_{r_{i1} \dots r_{in}}^{k_i}}{k_i},$$

где

$$(F)_{j_1 \dots j_n}^k = \text{коэффициент при } x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \text{ в } F(x_1, \dots, x_n)^k$$

для любого полинома f и сумма берется по всем неотрицательным целочисленным $n \times n$ -матрицам (r_{ij}) , таким, что для любого i сумма элементов i -го столбца или i -й строки фиксирована и равна $r_i k_i$:

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \sum_{j=1}^n r_{ji} = r_i k_i.$$

В самом деле, производя в формуле (1) разложения в степенной ряд

$$\log(z_i^{r_i} - \lambda_i F_i) = r_i \log z_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F_i^k z_i^{-r_i k} \lambda_i^k,$$

для положительных k_i мы имеем

$$\begin{aligned} T_{k_1 \dots k_n}(f) &= \frac{(-1)^{n+1}}{k_1 \dots k_n} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \\ &\times \oint \dots \oint F_1^{k_1} d(F_2^{k_2} z_2^{-r_2 k_2}) \wedge d(F_3^{k_3} z_3^{-r_3 k_3}) \wedge \dots \wedge d(F_n^{k_n} z_n^{-r_n k_n}). \end{aligned}$$

Используя равенство

$$F_i^{k_i}(1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = r_i k_i} (F_i)_{i_1 \dots i_n}^{k_i} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n},$$

мы получаем после вычисления производных

$$\begin{aligned} T_{k_1 \dots k_n}(f) &= \sum_{r_{ij}} \det_{2 \leq i, j \leq n} (r_{ij} - \delta_{ij} r_i k_i) \prod_{i=1}^n \frac{(F_i)_{r_{i1} \dots r_{in}}^{k_i}}{k_i} \cdot \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \right) \oint z_i^{r_{i1} + \dots + r_{in} - r_i k_i - 1} dz_i. \end{aligned}$$

Из теоремы о вычетах Коши следует ограничение $r_{i1} + \dots + r_{in} = r_i k_i$. Двойственное ограничение $r_{11} + \dots + r_{ni} = r_i k_i$ следует из однородности полиномов f_i .

Рассмотрим теперь несколько примеров:

$$\begin{aligned}
 T_{k_1}(F) &= \sum_{r_{ij}} \frac{(F_1)_{r_{11}}^{k_1}}{k_1} = \frac{(F_1)_{r_1 k_1}^{k_1}}{k_1}, \\
 T_{k_1, k_2}(F) &= \sum_{r_{ij}} (r_2 k_2 - r_{22}) \frac{(F_1)_{r_{11} r_{12}}^{k_1}}{k_1} \frac{(F_2)_{r_{21} r_{22}}^{k_2}}{k_2}, \\
 T_{k_1, k_2, k_3}(F) &= \sum_{r_{ij}} \begin{vmatrix} r_2 k_2 - r_{22} & -r_{23} \\ -r_{32} & r_3 k_3 - r_{33} \end{vmatrix} \\
 &\quad \times \frac{(F_1)_{r_{11} r_{12} r_{13}}^{k_1}}{k_1} \frac{(F_2)_{r_{21} r_{22} r_{23}}^{k_2}}{k_2} \frac{(F_3)_{r_{31} r_{32} r_{33}}^{k_3}}{k_3}, \\
 T_{k_1, k_2, k_3, k_4}(F) &= \sum_{r_{ij}} \begin{vmatrix} r_2 k_2 - r_{22} & -r_{23} & -r_{24} \\ -r_{32} & r_3 k_3 - r_{33} & -r_{34} \\ -r_{42} & -r_{43} & r_4 k_4 - r_{44} \end{vmatrix} \\
 &\quad \times \frac{(F_1)_{r_{11} r_{12} r_{13} r_{14}}^{k_1}}{k_1} \frac{(F_2)_{r_{21} r_{22} r_{23} r_{24}}^{k_2}}{k_2} \frac{(F_3)_{r_{31} r_{32} r_{33} r_{34}}^{k_3}}{k_3} \frac{(F_4)_{r_{41} r_{42} r_{43} r_{44}}^{k_4}}{k_4}.
 \end{aligned}$$

Случаи, когда некоторые из k_i равны нулю, также не представляют никаких трудностей. Если какое-то k_i равно 0, то

$$T_{k_1 \dots k_n} \{F_1, \dots, F_n\} = r_i T_{k_1 \dots k_{i-1} k_{i+1} \dots k_n} \{F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_n\} \Big|_{x_i=0},$$

где след в правой части берется по переменным $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Вывод этого соотношения легко провести, производя разложения в степенной ряд в (1).

Благодарности. Авторы благодарны В. Долотину и всем участникам семинара ИТЭФ по нелинейной алгебре за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Boston, MA, 1994.
- [2] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0609022>.
- [3] A. Miyake, M. Wadati, *Multipartite entanglement and hyperdeterminants*, Quantum Inf. Comput., **2** (Special) (2002), 540–555; <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0212146>.
- [4] M. Duff, *String triality, black hole entropy and Cayley's hyperdeterminant*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0601134>.
- [5] M. Duff, *Hidden symmetries of the Nambu–Goto action*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0602160>.
- [6] R. Kallosh, A. Linde, *Strings, Black holes and quantum information*, Phys. Rev. D, **73**:10 (2006), 104033; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0602061>.
- [7] S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa, *Nonperturbative results on the point particle limit of $N = 2$ heterotic string compactifications*, Nucl. Phys. B, **459**:3 (1996), 537–555; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9508155>.
- [8] T. Eguchi, Y. Tachikawa, *Rigid limit in $N = 2$ supergravity and weak-gravity conjecture*, J. High Energy Phys., **2007**:8, 068; <http://arxiv.org/abs/0706.2114>.
- [9] P. Aspinwall, B. Greene, D. Morrison, *Measuring small distances in $N = 2$ sigma models*, Nucl. Phys. B, **420**:1–2 (1994), 184–242; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9311042>.

- [10] A. Morozov, A. Niemi, *Can renormalization group flow end in a Big Mess?*, Nucl. Phys. B, **666**:3 (2003), 311–336; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0304178>.
- [11] V. Dolotin, A. Morozov, *Algebraic geometry of discrete dynamics. The case of one variable*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0501235>.
- [12] And. Morozov, *Universal Mandelbrot set as a model of phase transition theory*, JETP Lett., **86** (2007), 745–748; <http://arxiv.org/abs/0710.2315>.
- [13] C. Andrea, A. Dickenstein, *Explicit formulas for the multivariate resultant*, <http://arxiv.org/abs/math/0007036>.
- [14] M. Chardin, *Formules à la Macaulay pour les sous-résultants en plusieurs variables*, C. R. Acad. Sci. Paris, **319**:5 (1994), 433–436.
- [15] D. Manocha, J. Canny, *Multipolynomial resultant algorithms*, J. Symb. Comp., **15**:5 (1993), 99–122.
- [16] J. Canny, E. Kaltofen, L. Yagati, *Solving systems of non-linear equations faster*, in: Proc. Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput., ISSAC'89, ACM Press, New York, 1989, 121–128.
- [17] B. Gustafsson, V. Tkachev, *The resultant on compact Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys., **286**:1 (2009), 313–358; <http://arxiv.org/abs/0710.2326>.
- [18] A. Morozov, Sh. Shakirov, *Analogue of the identity $\text{Log Det} = \text{Trace Log}$ for resultants*, J. Geom. Phys., **61**:3 (2011), 708–726; <http://arxiv.org/abs/0804.4632>.
- [19] А. К. Цих, *Многомерные вычеты и их применения*, Наука, М., 1988.

Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: morozov@itep.ru

Поступило в редакцию
29 мая 2011 г.

Институт теоретической и экспериментальной физики
e-mail: shakirov@itep.ru