Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Особые представления групп $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ и связанные с ними представления групп токов $U(\infty, 1)^X$ и $O(\infty, 1)^X$ в квазиуассоновом пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 1–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:57:57

Особые представления групп $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ и связанные с ними представления групп токов $U(\infty, 1)^X$ и $O(\infty, 1)^X$ в квазипуассоновом пространстве*

© 2012. А. М. ВЕРШИК, М. И. ГРАЕВ

В статье метод построения представлений групп токов $O(n, 1)^X$, $U(n, 1)^X$, $n \in \mathbb{N}$, развитый в предыдущих работах авторов, обобщается на случай бесконечного n . При этом обобщении возникает любопытное и отсутствующее при конечном n различие в построении для ортогональной и для унитарной групп, объясняющееся разным характером особых представлений групп коэффициентов.

§1. Введение

В работе [1] построены новые модели неприводимых унитарных представлений групп токов P^X , где P — максимальная параболическая подгруппа в $U(n, 1)$ или $O(n, 1)$, и описано продолжение этих представлений группы P^X на всю группу токов $U(n, 1)^X$ или $O(n, 1)^X$. Основой конструкции представлений группы P^X являются неприводимые особые представления групп коэффициентов P (т. е. представления с нетривиальными 1-коциклами), реализованные в прямых интегралах

$$\mathcal{H}^n = \int_0^\infty K_r^n d^*r, \quad K_r^n = K^n, \quad (1.1)$$

по мере Хаара $d^*r = r^{-1}dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ сепарабельных гильбертовых пространств K^n . Этими пространствами K^n являются в случае $U(n, 1)$ пространства L^2 по мере Гаусса на $\mathbb{C}^{n-1}$ целых аналитических функций на $\mathbb{C}^{n-1}$, а в случае $O(n, 1)$ — пространства L^2 функций на единичной сфере $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Переход от пространств $\mathcal{H}^n$, на которых реализуются особые представления групп P , к пространствам, на которых реализуются представления групп токов P^X , можно трактовать как «квантование» исходного пространства $\mathcal{H}^n$. Оно состоит в замене пространств K^n их счетными тензорными произведениями, а интеграла по $\mathbb{R}_+^*$ — интегралом по так называемой квазипуассоновой мере на множестве счетных тензорных произведений. Эта квазипуассонова мера есть сигма-конечная мера, заданная своей плотностью относительно меры Пуассона.

В этой статье построены особые неприводимые унитарные представления групп P , являющихся бесконечномерными аналогами максимальной параболической подгруппы в $U(n, 1)$ или $O(n, 1)$, и описаны их продолжения до унитарных представлений бесконечномерных групп $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$. Конструкция на их основе представлений соответствующих групп токов проводится по той же

*Исследования первого автора поддержаны грантами РФФИ 11-01-00677а и ОФИ_м 11-01-120192-2011, исследования второго автора поддержаны грантом РФФИ 10-01-00041а.

схеме, что и для конечномерных групп. Поскольку эта конструкция для конечномерных групп подробно изложена в [1], здесь мы ее не повторяем. Замечание о том, что методы, разработанные нами для построения представлений групп токов с конечномерными группами коэффициентов ранга 1 $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ ([1]–[3]), по-видимому, пригодны и для построения представлений с бесконечномерными группами ранга 1 $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ в качестве коэффициентов, было сделано Г. И. Олшанским.

Действительно, подобно конечномерному случаю, конструкция особого представления бесконечномерной группы P основана на ее представлении в виде полупрямого произведения, $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$. Представление реализуется в прямом интеграле

$$\mathcal{H}^\infty = \int_0^\infty K_r^\infty d^*r, \quad K_r^\infty = K^\infty,$$

где K^∞ — гильбертово пространство, на котором действует неприводимое представление подгруппы P_0 .

Однако имеется существенное различие в определении пространства K^∞ для случая группы $P \subset U(\infty, 1)$ и для случая группы $P \subset O(\infty, 1)$, которого нет в конечномерном случае.

В случае $P \subset U(\infty, 1)$ мы исходим из пространств K^n , на которых действуют неприводимые унитарные представления конечномерных подгрупп $P_0 \subset P$. Для них определены естественные вложения $K^n \rightarrow K^{n+1}$, согласованные с представлениями соответствующих групп. Пространство K^∞ определяется как пополнение по норме индуктивного предела пространств K^n относительно этих вложений.

В случае $P \subset O(\infty, 1)$ пространства K^n неприводимых особых представлений конечномерных групп P_0 для этой цели не годятся, поскольку для них не существует естественных вложений $K^n \rightarrow K^{n+1}$, согласованных с представлениями соответствующих групп. Мы заменяем их вещественными пространствами $K^n = L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \mu)$, где μ — гауссова мера на $\mathbb{R}^{n-1}$. Для таких пространств естественное вложение $K^n \rightarrow K^{n+1}$ существует, и пространство K^∞ определяется, подобно комплексному случаю, как пополнение по норме индуктивного предела пространств K^n относительно этих вложений, т. е. как пространство $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$, где μ — гауссова мера на $\mathbb{R}^\infty$. Из эргодичности этой гауссовой меры следует, что представление бесконечномерной группы P_0 в пространстве K^∞ неприводимо, в то время как представления конечномерных групп P_0 в пространствах K^n приводимы.

Пространство $K^\infty = L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ естественно трактовать как вещественный аналог комплексного пространства K^∞ , и структура связанных с ним особого представления бесконечномерной вещественной группы P и его продолжения на группу $O(\infty, 1)$ родственна структуре их комплексных аналогов. В то же время она существенно отличается от структуры неприводимых особых представлений конечномерной группы $O(n, 1)$ и ее максимальной параболической подгруппы.

§2. Группы $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ и некоторые их подгруппы

2.1. Группы $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ и их максимальные параболические подгруппы. Конечномерные группы Ли $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ определяются как группы линейных преобразований в $\mathbb{C}^{n+1}$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющих соответственно

эрмитову и квадратичную формы сигнатуры $(n, 1)$. Их матричная реализация зависит от выбора этих форм. Здесь, в соответствии с [3], в качестве таких форм взяты эрмитова и квадратичная формы соответственно вида

$$z_1 \bar{z}_{n+1} + z_{n+1} \bar{z}_1 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2, \quad 2z_1 z_{n+1} + z_2^2 + \dots + z_n^2,$$

а матрицы порядка $n + 1$ записываются в блочной форме

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где диагональные клетки — матрицы порядков 1, $n - 1$ и 1. В этих обозначениях $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ — группы соответственно комплексных и вещественных блочных матриц, удовлетворяющих условию

$$gsg^* = s, \quad \text{где } s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

e — единичная матрица порядка $n - 1$, а символ $*$ обозначает в комплексном случае композицию транспонирования и комплексного сопряжения, а в вещественном — только транспонирование.

В принятой матричной реализации максимальной параболической подгруппой в $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ является подгруппа P нижних треугольных блочных матриц. Эта группа представима как полупрямое произведение, $P = D \ltimes N$, подгруппы D блочно-диагональных матриц и подгруппы N матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^* & e & 0 \\ \zeta & z & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь в комплексном случае $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ и $\zeta = it - \frac{1}{2}\langle z, z \rangle$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. N изоморфна группе Гейзенберга порядка $2n - 1$, а D — группа матриц $d = \text{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$, где $s \in \mathbb{C}^*$ и $u \in U(n - 1)$.

В вещественном случае $z \in \mathbb{R}$ и $\zeta = -\frac{1}{2}\langle z, z \rangle$, т.е. N изоморфна $\mathbb{R}^{n-1}$, а D — группа матриц $d = \text{diag}(s^{-1}, u, s)$, где $s \in \mathbb{R}^*$ и $u \in O(n - 1)$.

При описании особых представлений группы P существенно, что в комплексном и вещественном случаях она является полупрямым произведением, $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, подгруппы блочно-диагональных матриц $d = \text{diag}(r^{-1}, e, r)$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, и подгруппы $P_0 = D_0 \ltimes N$, где D_0 — подгруппа матриц $\text{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$, $|s| = 1$.

2.2. Группы $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ и их параболические подгруппы P . Бесконечномерные группы $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ определяются, подобно их конечномерным аналогам $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$, как группы линейных преобразований в $\mathbb{C}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$, сохраняющих соответственно эрмитову и квадратичную формы сигнатуры $(\infty, 1)$. Их матричная реализация зависит от выбора этих форм.

Обозначим через $z_0, z_1, \dots$ и z_∞ координаты в пространствах $\mathbb{C}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$ и условимся представлять бесконечные матрицы в блочной форме (2.1), где g_{11} , g_{22} , g_{33} — матрицы порядков 1, ∞ и 1 соответственно.

Определение 2.1. Будем предполагать, что $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ реализованы как группы комплексных и вещественных бесконечных матриц, сохраняющих соответственно эрмитову форму и квадратичную форму вида

$$z_0 \bar{z}_\infty + z_\infty \bar{z}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \quad \text{и} \quad 2z_0 z_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} z_i^2,$$

т. е., в принятых обозначениях, как группы соответственно комплексных и вещественных блочных матриц g вида (2.1), удовлетворяющих условию (2.2), где e — бесконечная единичная матрица.

Символ $*$ обозначает, как обычно, оператор транспонирования в вещественном случае и композицию транспонирования с комплексным сопряжением в комплексном случае.

Из определения следует, что векторы-строки g_{12} , g_{32} и векторы-столбцы g_{21} , g_{23} блочных матриц $g \in U(\infty, 1)$ и $g \in O(\infty, 1)$ суть элементы гильбертовых пространств $l_2(\mathbb{C})$, $l_2(\mathbb{R})$ соответственно комплексных и вещественных счетных последовательностей $z = (z_1, z_2, \dots)$ с нормой $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$.

Бесконечномерными аналогами максимальных параболических подгрупп в $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ являются подгруппы нижних блочно-треугольных матриц. Условимся обозначать их также через P и называть параболическими (бесконечномерными) подгруппами.

Эти группы P , подобно конечномерному случаю, представимы в виде полупрямого произведения, $P = D \ltimes N$, подгруппы D блочно-диагональных матриц $d = \text{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$ и подгруппы N матриц вида (2.3).

Здесь в комплексном случае $z \in l_2(\mathbb{C})$ и $\zeta = it - \frac{1}{2}\langle z, z \rangle$, т. е. N — бесконечномерный аналог группы Гейзенберга, а D — группа матриц $d = \text{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$, где $s \in \mathbb{C}^*$ и $u \in U(\infty)$.

В вещественном случае $z \in l_2(\mathbb{R})$ и $\zeta = -\frac{1}{2}\langle z, z \rangle$, т. е. N изоморфна $l_2(\mathbb{R})$, а D — группа матриц $d = \text{diag}(s^{-1}, u, s)$, где $s \in \mathbb{R}^*$ и $u \in O(\infty)$.

§3. Особое представление параболической подгруппы $P \subset U(\infty, 1)$ и его продолжение до представления всей группы $U(\infty, 1)$

3.1. Гильбертово пространство K^∞ . Обозначим через K^n гильбертово пространство целых аналитических функций $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ на $\mathbb{C}^n$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 d_n \mu(z), \quad d_n \mu(z) = \prod_{i=1}^n e^{-|z_i|^2} dz_i,$$

где dz_i — лебеговы меры на $\mathbb{C}$, нормированные условием $\int_{\mathbb{C}} e^{-|z_i|^2} dz_i = 1$.

Из определения следует, что отображение

$$f(z_1, \dots, z_n) \mapsto \tilde{f}(z_1, \dots, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n)$$

является изометрическим вложением пространств $K^n \rightarrow K^{n+1}$.

Определение 3.1. Определим гильбертово пространство K^∞ как пополнение по норме предела пространств $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n$ относительно вложений $K^n \rightarrow K^{n+1}$.

Согласно этому определению, K^∞ есть гильбертово пространство аналитических функционалов $f(z)$ на пространстве $\mathbb{C}^\infty$ счетных последовательностей $z = (z_1, z_2, \dots)$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^\infty} |f(z)|^2 d\mu(z), \quad d\mu(z) = d\mu_\infty(z) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{-|z_i|^2} dz_i$$

($d\mu$ есть гауссова мера на $\mathbb{C}^\infty$). Таким образом, $K^\infty \subset L^2(\mathbb{C}^\infty, d\mu)$.

3.2. Основные свойства пространства K^∞ .

3.2.1. *Ортогональный базис.* Мономы вида

$$e_k(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{z_i^{k_i}}{\sqrt{k_i!}}, \quad \text{в короткой записи } e_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k!}},$$

где k_i отлично от 0 не более чем для конечного числа индексов i , принадлежат пространству K^∞ и образуют в нем ортонормированный базис. Таким образом, элементами пространства K^∞ являются формальные степенные ряды от счетного числа переменных $z_1, \dots, z_n, \dots$

$$f(z) = \sum_k c_k \frac{z^k}{\sqrt{k!}} \quad \text{с нормой } \|f\|^2 = \sum_k |c_k|^2 < \infty. \quad (3.1)$$

В частности, формальные ряды $\sum_{i=1}^{\infty} c_i z_i$ принадлежат K^∞ тогда и только тогда, когда $(c_1, c_2, \dots) \in l_2(\mathbb{C})$. Таким образом, определен изоморфизм $H_1 \cong l_2(\mathbb{C})$, где $H_1 \subset K^\infty$ — подпространство рядов от z степени однородности 1.

Очевидно, что подпространства $H_n \subset K^\infty$ степенных рядов степени однородности n являются симметрическими тензорными степенями $S^n H_1$ пространства H_1 . Поэтому из разложения $K^\infty = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ следует, что изоморфизм $H_1 \cong l_2(\mathbb{C})$ порождает изоморфизм пространства K^∞ с фоковским пространством $\text{EXP}(l_2(\mathbb{C})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(l_2(\mathbb{C}))$.

3.2.2. *Вложение $l_2(\mathbb{C}) \rightarrow K^\infty$.* Положим

$$\varphi_b(z) = e^{(z,b)}, \quad \text{где } (z,b) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i b_i. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Функции $\varphi_b(z)$ на $\mathbb{C}^\infty$, где $b \in l_2(\mathbb{C})$, принадлежат K^∞ , образуют тотальное подмножество в K^∞ и удовлетворяют соотношению*

$$\langle \varphi_{b_1}, \varphi_{b_2} \rangle = e^{\langle b_1, b_2 \rangle} \quad \text{для любых } b_1, b_2 \in l_2(\mathbb{C}), \quad (3.3)$$

где лямные скобки слева и справа — скалярные произведения в пространствах K^∞ и $l_2(\mathbb{C})$ соответственно.

3.3. Представления подгруппы $P_0 \subset P$ в пространстве K^∞ . Введем подгруппу $P_0 = D_0 \ltimes N$ группы $P = D \ltimes N$, где $D_0 \subset D$ — подгруппа матриц $d = \text{diag}(s, u, s)$, $|s| = 1$, $u \in U(\infty)$, и определим для каждого $r \in \mathbb{R}_+^*$ унитарные представления T_r этой подгруппы.

По аналогии с конечномерным случаем, см. [3], операторы $T_r(g)$ представления группы $P_0 = D_0 \ltimes N$ действуют в пространстве K^∞ и задаются на элементах

подгрупп D_0 и N следующими формулами:

$$(T_r(g)f)(z) = f(\bar{s}zu) \quad \text{при } g = \text{diag}(s, u, s) \in D_0, \quad (3.4)$$

$$(T_r(g)f)(z) = e^{r^2\zeta_0 - r\langle z, z_0 \rangle} f(z + rz_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, z_0) \in N. \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что определенные так операторы унитарны, задают представления соответствующих подгрупп и порождают унитарное представление всей группы P_0 .

Теорема 3.2. *Представления T_r группы P_0 неприводимы и попарно не эквивалентны.*

Утверждение непосредственно следует из свойств каждого представления T_r :

- 1) вектор $f_0(z) \equiv 1$ — единственный вектор, инвариантный относительно представления подгруппы $U(\infty)$;
- 2) вектор $f_0(z)$ циклическ относительно операторов подгруппы N .

Замечание. Утверждение теоремы справедливо не только для представлений группы P_0 , но и для ограничений этих представлений на подгруппу N .

3.4. Конструкция особого представления группы P . Конструкция особого представления группы P основана на ее разложении в полупрямое произведение: $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes N$.

Определение 3.2. Унитарное представление группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes N$ реализуется в прямом интеграле

$$\mathcal{H}^\infty = \int_0^\infty K_r^\infty d^*r, \quad K_r^\infty = K^\infty,$$

по мере Хаара $d^*r = r^{-1}dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ гильбертовых пространств $K_r^\infty = K^\infty$, т. е. в пространстве сечений $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow K^\infty$ с нормой $\|f\|^2 = \int_0^\infty \|f(r)\|_{K^\infty}^2 d^*r$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$ со слоями K_r^∞ .

Представление подгруппы P_0 в пространстве $\mathcal{H}^\infty$ определяется как прямой интеграл ее представлений T_r в пространствах K_r^∞ , т. е.

$$(T(g)f)(r) = T_r(g)f(r) \quad \text{при } g \in P_0;$$

операторы, отвечающие элементам подгруппы $\mathbb{R}_+^*$, действуют по формуле

$$(T(g)f)(r) = f(r_0r) \quad \text{при } g = r_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Легко убедиться, что определенные так операторы на P_0 и $\mathbb{R}_+^*$ порождают унитарное представление всей группы P . Из неприводимости и попарной неэквивалентности представлений T_r подгруппы P_0 в пространствах K_r^∞ следует, что *представление T группы P неприводимо.*

Будем далее представлять элементы пространства $\mathcal{H}^\infty$ как комплекснозначные функционалы $f(r, z)$ на $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^\infty$ с нормой $\|f\|^2 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{C}^\infty} |f(r, z)|^2 d\mu(z) d^*r$. В этих обозначениях операторы представления задаются формулами

$$(T(g)f)(r, z) = f(r, \bar{s}zu) \quad \text{при } g = \text{diag}(s, u, s) \in D_0, \quad (3.6)$$

$$(T(g)f)(r, z) = e^{r^2\zeta_0 - r\langle z, z_0 \rangle} f(r, z + rz_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, z_0) \in N, \quad (3.7)$$

$$(T(g)f)(r, z) = f(r_0r, z) \quad \text{при } g = r_0 \in \mathbb{R}_+^*. \quad (3.8)$$

Теорема 3.3. *Представление T группы P неприводимо и обладает нетривиальным 1-коциклом $\beta: P \rightarrow \mathcal{H}^\infty$, заданным равенством*

$$\beta(g; r, z) = (T(g)f_0)(r, z) - f_0(r, z), \quad \text{где } f_0(r, z) = e^{-r^2}. \quad (3.9)$$

Замечание. Существует второе особое неприводимое представление группы P . Оно получается из первого применением оператора инволюции — замёной пространства K^∞ аналитических функционалов пространством антианалитических функционалов. Для определенности ограничимся только первым представлением.

3.5. Продолжение особого представления параболической подгруппы P до представления группы $U(\infty, 1)$. Опишем продолжение представления T группы P до представления группы $U(\infty, 1)$ на элементах тотального подмножества в пространстве $\mathcal{H}^\infty$, которое далее будет введено.

Введем однородное пространство L группы $U(\infty, 1)$:

$$L = \{v = (a, b) \in \mathbb{C} \times l_2(\mathbb{C}) \mid a + \bar{a} + \langle b, b \rangle < 0\}.$$

Элементы $g \in U(\infty, 1)$ действуют на L по формулам $g(a, b) = (a', b')$, где

$$\begin{aligned} a' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1} (g_{31} + g_{32}b + g_{33}a), \\ b' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1} (g_{21} + g_{22}b + g_{23}a). \end{aligned}$$

Через v_0 обозначим точку $(-1, 0)$ пространства L . Таким образом,

$$gv_0 = \left(\frac{g_{31} - g_{33}}{g_{11} - g_{13}}, \frac{g_{21} - g_{23}}{g_{11} - g_{13}} \right).$$

Замечание. В другой матричной реализации группы $U(\infty, 1)$, ассоциированной с формой $|z_\infty|^2 - \sum_{n=0}^\infty |z_n|^2$, это пространство есть бесконечномерный шар $\sum_{n=0}^\infty |z_n|^2 < 1$.

Свяжем с каждой точкой $v = (a, b) \in L$ следующую функцию на $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^\infty$:

$$f_v(r, z) = e^{r^2 a + r \langle z, b \rangle}, \quad \text{где } \langle z, b \rangle = \sum z_i b_i.$$

Из теоремы 3.1 следует

Предложение 3.1. *При любом фиксированном r функции $f_v(r, z)$ принадлежат пространству K^∞ , образуют тотальное подмножество в K^∞ и*

$$\langle f_{v_1}(r, z), f_{v_2}(r, z) \rangle_{K^\infty} = e^{-r^2 p(v_1, v_2)} \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in L, \quad (3.10)$$

где

$$p(v_1, v_2) = -(a_1 + \bar{a}_2 + \langle b_1, b_2 \rangle) \quad \text{при } v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2), \quad (3.11)$$

$\langle b_1, b_2 \rangle$ — скалярное произведение на $l_2(\mathbb{C})$.

Отметим, что $\operatorname{Re} p(v_1, v_2) > 0$ для любых $v_1, v_2 \in L$.

Теорема 3.4. *Разности $f_{v_1} - f_{v_2}$, где $v_1, v_2 \in L$, принадлежат пространству $\mathcal{H}^\infty$, образуют в нем тотальное подмножество и для любой четверки $v_1, v_2, v'_1, v'_2 \in L$ имеет место равенство*

$$\langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle_{\mathcal{H}^\infty} = \frac{1}{2} \log Q(v_1, v_2; v'_1, v'_2), \quad (3.12)$$

где

$$Q(v_1, v_2; v'_1, v'_2) = \frac{p(v_1, v'_2)p(v_2, v'_1)}{p(v_1, v'_1)p(v_2, v'_2)}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Из (3.10) следует, что

$$\langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle_{\mathcal{K}^\infty} = \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1,2} (-1)^{i+j} e^{-r^2 p(v_i, v'_j)} \right) d^*r.$$

Чтобы получить отсюда (3.12), достаточно воспользоваться соотношением

$$\int_0^\infty (e^{-ar^2} - e^{-br^2}) d^*r = \frac{1}{2} \log(b/a) \quad \text{при } \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0.$$

Из (3.12) следует, что векторы $f_{v_1} - f_{v_2}$ принадлежат $\mathcal{K}^\infty$. Их тотальность в $\mathcal{K}^\infty$ вытекает из тотальности векторов $f_v(r, z)$ при фиксированных r в пространстве K^∞ . $\square$

Теорема 3.5. На множестве векторов $f_{v_1} - f_{v_2}$ операторы $T(g)$ представления группы P в пространстве $\mathcal{K}^\infty$ имеют вид

$$T(g)(f_{v_1} - f_{v_2}) = f_{gv_1} - f_{gv_2}. \quad (3.14)$$

В самом деле, формула (3.14) следует непосредственно из исходных формул (3.6)–(3.8) для этих операторов.

Определение 3.3. Определим операторы $T(g)$ представления всей группы $U(\infty, 1)$ на множестве векторов $f_{v_1} - f_{v_2}$ тем же равенством (3.14).

Теорема 3.6. Операторы $T(g)$ удовлетворяют групповому соотношению и сохраняют скалярные произведения $\langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle_{\mathcal{K}^\infty}$. Следовательно, они порождают унитарное представление группы $U(\infty, 1)$ в пространстве $\mathcal{K}^\infty$.

Доказательство. Групповое свойство операторов $T(g)$ очевидно. Утверждение, что они сохраняют скалярные произведения на множестве векторов $f_{v_1} - f_{v_2}$, основано на следующем соотношении для функции $p(v_1, v_2)$ на L :

$$p(gv_1, gv_2) = p(v_1, v_2) (g_{11} + g_{12}b_1 + g_{13}a_1)^{-1} \overline{(g_{11} + g_{12}b_2 + g_{13}a_2)}^{-1} \quad \text{для всех } g \in U(\infty, 1). \quad (3.15)$$

Из этого соотношения вытекает, что функция $Q(v_1, v_2; v'_1, v'_2)$ четверки точек на L инвариантна относительно действия группы $U(\infty, 1)$, т. е.

$$Q(gv_1, gv_2; gv'_1, gv'_2) = Q(v_1, v_2; v'_1, v'_2) \quad \text{для всех } g \in U(\infty, 1).$$

Отсюда и из (3.12) следует доказываемое утверждение. $\square$

Из неприводимости представления параболической подгруппы $P \subset U(\infty, 1)$ следует, что представление T всей группы $U(\infty, 1)$ также неприводимо.

Теорема 3.7. Нетривиальный 1-коцикл представления T подгруппы P можно продолжить до 1-коцикла представления группы $U(\infty, 1)$ и записать в следующей форме:

$$\beta(g) = f_{gv_0} - f_{v_0}, \quad \text{где } v_0 = (-1, 0), \quad (3.16)$$

т. е. в виде выражения от элементов g_{ij} блочной матрицы g ,

$$\beta(g; r, z) = e^{r^2 a(g) + r(z, b(g))} - e^{-r^2}, \quad (3.17)$$

где

$$a(g) = \frac{g_{31} - g_{33}}{g_{11} - g_{13}}, \quad b(g) = \frac{g_{21} - g_{23}}{g_{11} - g_{13}}.$$

При этом для любых элементов g_1, g_2 соответствующей группы имеем

$$\langle \beta(g_1), \beta(g_2) \rangle = \frac{1}{2} (\log p(g_1 v_0, v_0) + \overline{\log p(g_2 v_0, v_0)} - \log p(v_0, v_0) - \log p(g_1 v_0, g_2 v_0)). \quad (3.18)$$

В самом деле, так как $f_{g l_0} - f_{l_0} \in \mathcal{H}^\infty$ для любого элемента g , то $b(g)$ есть 1-коцикл. Этот 1-коцикл нетривиален, поскольку $f_{v_0} \notin \mathcal{H}^\infty$.

Соотношение (3.18) следует непосредственно из (3.12).

Замечание. Аналогично определяется второе особое представление группы $U(\infty, 1)$, являющееся продолжением второго особого представления подгруппы $P \subset U(\infty, 1)$.

§ 4. Особое представление параболической подгруппы $P \subset O(\infty, 1)$ и его продолжение до представления всей группы $O(\infty, 1)$

Конструкция особого представления параболической подгруппы $P \subset O(\infty, 1)$ и его продолжения до представления всей группы $O(\infty, 1)$ аналогична приведенной здесь конструкции для случая $U(\infty, 1)$. Мы изложим ее в более краткой форме, отметив в основном лишь главные различия.

4.1. Вещественное пространство K^∞ . При переходе от случая $U(\infty, 1)$ к случаю $O(\infty, 1)$ комплексное пространство K^∞ заменяется его вещественным аналогом, который условимся обозначать тем же символом K^∞ . Этим вещественным аналогом является вещественное гильбертово пространство

$$K^\infty = L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu),$$

где $d\mu = \prod_{i=1}^{\infty} e^{-z_i^2/2} dz_i$ — гауссова мера на $\mathbb{R}^\infty$, нормированная условием $\int_{\mathbb{R}^\infty} d\mu = 1$.

С комплексным пространством K^∞ его объединяют два сходных свойства. Во-первых, подобно комплексному случаю, существуют естественные изометрические вложения гильбертовых пространств $K^n \rightarrow K^{n+1}$, где $K^n = L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n)$, $d\mu_n$ — гауссова мера на $\mathbb{R}^n$, и пространство K^∞ является пополнением по норме индуктивного предела пространств K^n относительно этих вложений.

Существенно при этом, что гауссова мера на $\mathbb{R}^\infty$, в отличие от гауссовых мер на $\mathbb{R}^n$, эргодична относительно действия группы $O(\infty)$ ортогональных преобразований.

Во-вторых, на $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ справедлив аналог теоремы 3.1: для вещественного пространства K^∞ справедлива

Теорема 4.1. *Имеет место непрерывное отображение $l_2(\mathbb{R}) \rightarrow K^\infty$:*

$$b \mapsto \varphi_b(z), \quad \text{где } \varphi_b(z) = e^{-\frac{1}{2}\langle b, b \rangle + \langle z, b \rangle}. \quad (4.1)$$

Подобно комплексному случаю, функции $\varphi_b(z)$, $b \in l_2(\mathbb{R})$, образуют тотальное подмножество в вещественном пространстве K^∞ и удовлетворяют тому же соотношению (3.3).

4.2. Представления подгруппы $P_0 \subset P$ в пространстве K^∞ . Введем подгруппу $P_0 = D_0 \ltimes N$ группы $P = D \ltimes N$, где $D_0 \subset D$ — подгруппа матриц $d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon)$, $\epsilon = \pm 1$, $u \in O(\infty)$, и определим для каждого $r \in \mathbb{R}_+^*$ ортогональное представление T_r этой подгруппы.

По аналогии со случаем комплексной группы P_0 представления T_r вещественной группы $P_0 = D_0 \ltimes N$ действуют в вещественном пространстве K^∞ и задаются на элементах подгрупп D_0 и N следующими формулами:

$$(T_r(g)f)(z) = f(\epsilon zu) \quad \text{при } g = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon) \in D_0, \quad (4.2)$$

$$(T_r(g)f)(z) = e^{-r^2 \|z_0\|^2 - r \langle z, z_0 \rangle} f(z + 2rz_0) \quad \text{при } g = z_0 \in l_2(\mathbb{R}) \equiv N. \quad (4.3)$$

Нетрудно убедиться, что определенные так операторы ортогональны, задают представления соответствующих подгрупп и порождают ортогональное представление всей группы P_0 .

Теорема 4.2. *Представления T_r группы P_0 неприводимы и попарно не эквивалентны.*

Доказательство. Для доказательства, подобно комплексному случаю, достаточно убедиться, что

1) вектор $f_0(z) \equiv 1$ — единственный вектор, инвариантный относительно представления подгруппы $U(\infty)$;

2) вектор $f_0(z)$ циклическ относительно операторов подгруппы N .

Первое свойство следует непосредственно из эргодичности гауссовой меры на $\mathbb{R}^\infty$ относительно группы преобразований $O(\infty)$. Второе следует из первого и из явной формулы для операторов в пространствах представлений. $\square$

Замечание. Доказательство не проходит для конечномерных аналогов этих представлений — представлений подгрупп $P_0 \subset O(n, 1)$ в пространствах $K^n = L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \mu_n)$, поскольку гауссова мера $d\mu_n$ на $\mathbb{R}^n$ не эргодична. Нетрудно убедиться, что эти представления конечномерных групп приводимы и разлагаются в прямой интеграл по $\mathbb{R}_+^*$ попарно не эквивалентных неприводимых представлений группы P_0 .

4.3. Конструкция особого представления группы P . По аналогии с комплексным случаем ортогональное представление вещественной группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ реализуется в прямом интеграле

$$\mathcal{H}^\infty = \int_0^\infty K_r^\infty d^*r, \quad K_r^\infty = K^\infty,$$

по мере Хаара $d^*r = r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ вещественных гильбертовых пространств $K_r^\infty = K^\infty$, т.е. в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\infty = L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^\infty, d^*r d\mu)$.

Представление подгруппы P_0 в пространстве $\mathcal{H}^\infty$ определяется как прямой интеграл ее представлений T_r в пространствах K_r^∞ и задается на подгруппах D_0 и N в соответствии с (4.2) и (4.3) следующими формулами:

$$(T(g)f)(r, z) = f(r, \epsilon zu) \quad \text{при } g = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon) \in D_0, \quad (4.4)$$

$$(T_r(g)f)(r, z) = e^{-r^2 \|z_0\|^2 - r \langle z, z_0 \rangle} f(r, z + 2rz_0) \quad \text{при } g = z_0 \in l_2(\mathbb{R}) \equiv N. \quad (4.5)$$

Операторы подгруппы $\mathbb{R}_+^*$ задаются той же формулой (3.8), что и в комплексном случае.

Из неприводимости и попарной неэквивалентности представлений T_r группы P_0 следует, что *представление T вещественной группы P неприводимо*. Как и в комплексном случае, оно обладает нетривиальным 1-коциклом, заданным той же формулой (3.9).

4.4. Продолжение особого представления параболической подгруппы P до представления группы $O(\infty, 1)$. Продолжение представления T группы P до представления группы $O(\infty, 1)$ строится по аналогии со случаем группы $U(\infty, 1)$.

Вводится вещественное однородное пространство L группы $O(\infty, 1)$,

$$L = \{v = (a, b) \in \mathbb{R} \times l_2(\mathbb{R}) \mid 2a + \langle b, b \rangle < 0\},$$

на котором группа $O(\infty, 1)$ действует по тем же формулам, что и в комплексном случае.

С каждой точкой $v = (a, b) \in L$ мы связываем следующую функцию на $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^\infty$:

$$f_v(r, z) = e^{r^2(a - \frac{1}{2}\langle b, b \rangle) + r\langle z, b \rangle}, \quad \text{где } (z, b) = \sum z_i b_i.$$

Подобно комплексному случаю, функции $f_v(r, z)$ принадлежат при любом фиксированном r пространству K^∞ и образуют в нем тотальное подмножество, а любые разности $f_{v_1} - f_{v_2}$ принадлежат пространству $\mathcal{H}^\infty$ и образуют в нем тотальное подмножество.

На этом тотальном подмножестве операторы исходного особого представления подгруппы P_0 задаются формулой

$$T(g)(f_{v_1} - f_{v_2}) = f_{gv_1} - f_{gv_2},$$

и мы определяем той же формулой операторы $T(g)$ для всех элементов g группы $O(\infty, 1)$. Доказывается, подобно комплексному случаю, что эти операторы сохраняют скалярные произведения на тотальном множестве, а потому порождают ортогональное представление группы $O(\infty, 1)$ в пространстве $\mathcal{H}^\infty$.

Полученное представление группы $O(\infty, 1)$ неприводимо, так как неприводимо его ограничение на подгруппу P . Оно обладает нетривиальным 1-коциклом, являющимся продолжением на всю группу $O(\infty, 1)$ нетривиального 1-коцикла представления подгруппы P и заданным той же формулой (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Пуассонова модель фоковского пространства и представления групп токов*, Алгебра и анализ, **23**:3 (2011), 63–136.
- [2] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений*, Функц. анализ и его прил., **39**:2 (2005), 1–12.
- [3] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$* , УМН, **61**:5 (2006), 3–88.
- [4] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups*, in: Representations of Lie groups and Lie algebras, Akad. Kiado, Budapest, 1985, 121–179.
- [5] R. S. Ismagilov, *Representations of Infinite-Dimensional Groups*, Transl. Math. Monographs, vol. 152, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

- [6] Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, МЦНМО, М., 2007.
- [7] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, Эдиториал УРСС, М., 1998.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru
Институт системных исследований РАН, Москва
e-mail: graev_36@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
29 мая 2011 г.