Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Фейгин, Системы корреляционных функций, коинварианты и алгебра Верлинде, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:20:53

Системы корреляционных функций, коинварианты и алгебра Верлинде*

© 2012. Е. Б. Фейгин

Мы изучаем пространства систем корреляционных функций для аффинных алгебр Каца–Мути $\widehat{\mathfrak{g}}$, определенные Габердиэлем и Годдардом. Мы доказываем, что эти пространства изоморфны пространствам коинвариантов относительно некоторых подалгебр $\widehat{\mathfrak{g}}$. Это позволяет доказать, что пространства Габердиэля–Годдарда изоморфны прямым суммам тензорных произведений неприводимых $\mathfrak{g}$ -модулей. При этом кратности вхождений тензорных произведений определяются числами Верлинде. Таким образом, мы передоказываем и обобщаем теорему Френкеля–Жу.

Введение

Пусть $\mathcal{V}$ — вертекс-операторная алгебра. В статье [19] Жу определил ассоциативную алгебру $A(\mathcal{V})$, теория представлений которой содержит важную информацию о теории представлений алгебры $\mathcal{V}$ ([2], [9], [11]). Алгебра $A(\mathcal{V})$ определяется как фактор вакуумного модуля $\mathcal{V}$. Жу также построил множество $A(\mathcal{V})$ -модулей $A(\mathcal{H})$, занумерованных $\mathcal{V}$ -модулями $\mathcal{H}$. Пространства $A(\mathcal{H})$ определяются как факторы модуля $\mathcal{H}$. В [9] было показано, что для вертекс-операторных алгебр, связанных с интегрируемыми неприводимыми представлениями аффинных алгебр Каца–Мути, эти факторы могут быть описаны с помощью фьюжи-коэффициентов (структурных констант алгебры Верлинде).

Известно, что теория вертекс-операторных алгебр играет ключевую роль в математическом описании моделей конформной теории поля ([3], [10]). В работе [12] Габердиэль и Годдард предложили аксиоматический подход к конформной теории поля, основанный на понятии систем корреляционных функций. Эти системы зависят от параметра $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\})^n$. В работах [12], [13], [16] показано, что системы корреляционных функций параметризуются векторами факторпространств $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}/O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ представлений модуля $\mathcal{H}$ данной конформной теории (представлений соответствующей вертекс-операторной алгебры). При этом $O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ — некоторые подпространства в $\mathcal{H}$. Важный факт заключается в том, что модули Жу $A(\mathcal{H})$ совпадают с $A_{(-1, \infty)}(\mathcal{H})$.

В этой работе мы изучаем пространства Габердиэля–Годдарда $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ для моделей Весса–Зумино–Виттена на неотрицательном целом уровне (или, что то же самое, для неприводимых интегрируемых представлений $\mathcal{H}$ аффинной алгебры Каца–Мути $\widehat{\mathfrak{g}}$). Напомним, что $\widehat{\mathfrak{g}}$ является нетривиальным центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Основным результатом нашей работы заключается в следующем описании пространств $O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$:

*Эта работа была частично поддержана грантом Президента РФ МК-281.2009.1, грантами РФФИ 09-01-00058, 07-02-00799 и НШ-3472.2008.2, фондом Пьера Делиня и фондом EADS.

Теорема 0.1. Пусть $\mathcal{H}$ — интегрируемое неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Тогда

$$O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) = \left(\mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1}) \mathbb{C}[t^{-1}] \right) \mathcal{H}.$$

Таким образом, пространство $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ изоморфно коинвариантам относительно подалгебры $\mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1}) \mathbb{C}[t^{-1}]$. Используя результаты из [5] и [8], мы получаем такое

Следствие 0.2. Пусть $u_i \neq u_j$ при $i \neq j$. Тогда

$$A_{\mathbf{u}}(L_{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\mu_1, \dots, \mu_n \in P_+^k} N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}. \quad (0.1)$$

Здесь $\mathcal{H} = L_{\lambda}$ — интегрируемый неприводимый $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль со старшим весом λ , V_{μ_i} — неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом μ_i и $N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k}$ — структурные константы алгебры Верлинде, соответствующей $\widehat{\mathfrak{g}}$ на уровне k . Теорема 0.1 и следствие 0.2 обобщают теорему Френкеля–Жу [9] (изучающую случай $n = 2$) на произвольное число попарно различных точек. Один из самых интересных вопросов, связанных с пространствами Жу и Габердиэля–Годдарда звучит так ([6], [7], [11]): что происходит, если некоторые из точек u_j совпадают? Используя теорему 0.1 и результаты из [5], мы показываем, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ изоморфизм (0.1) остается верным, даже если некоторые точки совпадают.

Наша статья организована следующим образом. В §1 мы напоминаем основные определения, связанные с алгебрами Каца–Мути и вертекс-операторными алгебрами. В §2 мы доказываем теорему 0.1. В §3 мы обсуждаем изоморфизм между коинвариантами и правой частью формулы (0.1). Наконец, в §4 мы получаем следствие из теоремы 0.1 и обсуждаем возможные обобщения.

§1. Аффинные алгебры Каца–Мути и вертекс-операторные алгебры

В этом параграфе мы напоминаем определения и основные свойства аффинных алгебр Каца–Мути и вертекс-операторных алгебр (ВОА для краткости). Наши основные ссылки: [1], [14], [15].

1.1. Аффинные алгебры Каца–Мути. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с разложением Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_l$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — фундаментальные веса и простые корни этой алгебры $\mathfrak{g}$, $\omega_i, \alpha_i \in \mathfrak{h}^*$. Веса ω_i порождают решетку весов P с доминантным конусом $P_+ = \{\sum_{i=1}^l s_i \omega_i, s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Обозначим через $\Delta_+ \subset P$ множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\theta \in \Delta_+$ — старший корень (старший вес присоединенного представления). Для $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ положим

$$P_+^k = \{\lambda \in P_+ : (\lambda, \theta) \leq k\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга, нормализованная условием $(\theta, \theta) = 2$. Для $\lambda \in P_+$ пусть V_{λ} — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ и старшим вектором $v_{\lambda} \in V_{\lambda}$. В частности, $\mathfrak{n} v_{\alpha} = 0$ и $V_{\lambda} = U(\mathfrak{n}^-) v_{\lambda}$, где $U(\mathfrak{n}^-)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры W^- . Для веса $\lambda \in P_+$ мы обозначим через $\lambda^* \in P_+$ старший вес двойственного модуля: $V_{\lambda^*} \simeq V_{\lambda}^*$.

Пусть $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ — аффинная алгебра Каца–Мууди, соответствующая $\mathfrak{g}$. Коммутатор в $\hat{\mathfrak{g}}$ определяется формулой

$$[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,0}(x, y)K, \quad x, y \in \mathfrak{g}, i, j \in \mathbb{Z},$$

где K — центральный элемент. Пусть $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}^-$ — картановское разложение. Имеем

$$\hat{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \otimes 1 \oplus \mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t], \quad \hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes 1 \oplus \mathbb{C}K, \quad \hat{\mathfrak{n}}^- = \mathfrak{n}^- \otimes 1 \oplus \mathfrak{g} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}].$$

Так как K центральный, он действует скаляром на любом неприводимом представлении алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$. Этот скаляр называется уровнем представления. Для каждого $\lambda \in P_+^k$ существует неприводимый $\hat{\mathfrak{g}}$ -модуль L_λ старшего веса уровня k со старшим вектором $l_\lambda \in L_\lambda$, таким, что $\hat{\mathfrak{n}}l_\lambda = 0$ и $U(\hat{\mathfrak{n}}^-)l_\lambda = L_\lambda$.

Модули L_λ , $\lambda \in P_+^k$, образуют полный список интегрируемых неприводимых представлений старшего веса уровня k . Заметим, что L_λ снабжен естественной градуировкой (по энергии), $L_\lambda = \bigoplus_{d \geq 0} L_\lambda(d)$, определяемой следующим образом: $L_\lambda(0)$ содержит l_λ и $x \otimes t^i$ действует из $L_\lambda(d)$ в $L_\lambda(d-i)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $i \in \mathbb{Z}$. В частности, $L_\lambda(0) = V_\lambda$.

1.2. Вертекс-операторные алгебры $\mathcal{V}_k(\mathfrak{g})$. Напомним, что вертекс-операторные алгебры — это набор полей $Y(A, z)$, удовлетворяющих некоторым условиям. Эти поля занумерованы векторами $A \in V$, где V — некоторое бесконечномерное векторное пространство. Пространство V снабжено градуировкой, $V = \bigoplus_{d \geq 0} V(d)$. Для элемента $A \in V(d)$ положим $|A| = d$. Каждое поле $Y(A, z)$ представляет собой ряд по z , z^{-1} с коэффициентами в $\text{End}(V)$:

$$Y(A, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{(m)} z^{-m-|A|}, \quad A_{(m)} \in \text{End } V.$$

Пространство $V(0)$ порождено вакуумным вектором $|0\rangle$. Соответствующее поле тривиально: $Y(|0\rangle, z) = \text{Id}$. Два основных свойства этих полей таковы:

(i) для любых $A, B \in V$ существует $N \in \mathbb{Z}$, такое, что $A_{(m)}B = 0$ для любого $m > N$;

(ii) для любых $A, B \in V$ существует $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, такое, что $(z-w)^N[Y(A, z), Y(B, w)] = 0$.

Второе свойство называется свойством локальности. Кроме того, на пространстве полей имеется структура операторного разложения. А именно, для любых двух элементов $A, B \in V$ выполняется равенство

$$Y(A, z)Y(B, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y(A_{(n)}B, w)(z-w)^{-n-|A|}.$$

Напомним также, что векторное пространство M называется представлением пространства V , если для каждого $A \in V$ задан ряд $Y_M(A, z)$ с коэффициентами в $\text{End}(M)$, так что выполняются соотношения

$$Y_M(A, z)Y_M(B, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_M(A_{(n)}B, w)(z-w)^{-n-|A|}.$$

Например, само пространство V снабжено естественной структурой представления (так называемое присоединенное представление).

Известно, что вакуумное представление L_0 уровня k алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ может быть снабжено структурой ВОА. Эта ВОА обозначается через $\mathcal{V}_k(\mathfrak{g})$. Градуировка дается градуировкой энергии, а вакуумным вектором является l_0 . Точные формулы для полей выглядят так. Во-первых, для $a \in \mathfrak{g}$

$$Y(a \otimes t^{-1}l_0, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (a \otimes t^m) z^{-m-1},$$

т. е. $(a \otimes t^{-1}l_0)_{(m)} = a \otimes t^m$. В общем случае, полагая $a(z) = Y(a \otimes t^{-1}l_0, z)$, имеем

$$Y(a_1 \otimes t^{-s_1} \dots a_N \otimes t^{-s_N} l_0, z) = \frac{1}{(s_1 - 1)! \dots (s_N - 1)!} : \partial^{s_1-1} a_1(z) \dots \partial^{s_N-1} a_N(z) : \quad (1.1)$$

для $a_i \in \mathfrak{g}$, $s_i > 0$, где ∂ — производная по z , а $:$: обозначает нормально упорядоченное произведение. Для двух полей $Y(A, z)$ и $Y(B, z)$ их нормально упорядоченное произведение определяется по формуле

$$:Y(A, z)Y(B, z): = \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m_1 \leq -|A|} A_{(m_1)} B_{(m_2)} z^{-m_1-|A|} + \sum_{m_1 > -|A|} B_{(m_2)} A_{(m_1)} z^{-m_1-|A|} \right) z^{-m_2-|B|}. \quad (1.2)$$

Замечание 1.1. Благодаря свойству (i) нормально упорядоченное произведение двух полей определено корректно.

Нормально упорядоченное произведение N полей определяется рекуррентно:

$$:Y(A, z)Y(B, z)Y(C, z): = :Y(A, z)(:Y(B, z)Y(C, z):):$$

и т. д.

Замечание 1.2. Формула (1.1) является частным случаем общей теоремы из теории представлений ВОА, позволяющей восстанавливать все поля с помощью основных (порождающих) полей.

Пространство L_0 может быть снабжено структурой представления алгебры Вирасоро, определяемой конструкцией Сигала–Сугавары. Пусть T_i , $i \in \mathbb{Z}$, — образующие алгебры Вирасоро. Тогда для всех $A \in L_0$ выполняется следующее равенство:

$$Y(T_{-1}A, z) = \partial Y(A, z). \quad (1.3)$$

Формальный вычет для ряда $f(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i z^i$ определяется как коэффициент при z^{-1} : $\text{Res } f(z) = f_{-1}$. Имеем $\text{Res } \partial f(z) = 0$.

§2. Системы корреляционных функций

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\})^n$ — набор (возможно, совпадающих) точек. В работе [12] авторы определили факторы $A_{\mathbf{u}}$ представлений вертекс-операторных алгебр. Эти факторы зависят от $\mathbf{u}$ и описывают системы корреляционных функций на римановой сфере [13]. Системы корреляционных функций

играют ключевую роль в аксиоматическом подходе к конформной теории поля, развитом в [12] (см. также [10], [13]). Напомним основные определения.

Пусть $\mathcal{H}$ — представление некоторой ВОА $\mathcal{V}$. Предположим временно, что $u_1 = \infty$ и $u_i \neq \infty$, $i > 1$. Тогда пространства Габердиеля–Годдарда $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ определяются следующим образом:

$$A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} / O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}),$$

где пространства $O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) = O_{(u_1, \dots, u_n)}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ линейно порождены векторами

$$\text{Res} \left(z^{-1-M+(2-n)|A|} \prod_{j=2}^n (z - u_j)^{|A|} Y(A, z) v \right) \quad (2.1)$$

для всех $M > 0$, $A \in \mathcal{V}$, $v \in \mathcal{H}$. Кроме того, семейство пространств $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$ инвариантно относительно диагонального действия группы PSL_2 на наборах $\mathbf{u} \in (\mathbb{CP}^1)^n$. Последнее свойство называется Мёбиус-инвариантностью. Используя Мёбиус-инвариантность, мы в дальнейшем без ограничения общности зафиксируем $u_1 = \infty$.

Нам будет удобно немного видоизменить формулу (2.1), чтобы исключить ограничение $u_i \neq \infty$, $i > 1$. Пусть

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(A) = \text{Res} \left(z^{-1-M+|A|} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{|A|} Y(A, z) \right). \quad (2.2)$$

Вектор $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(A)v$ пропорционален (2.1) при $u_i \neq \infty$, $i > 1$.

Определение 2.1. Для каждого набора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\})^n$, $u_1 = \infty$, подпространство $O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ линейно порождено элементами $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(A)v$ для всех $A \in \mathcal{V}$, $M > 0$, $v \in \mathcal{H}$. Соответствующее факторпространство обозначается через $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$, $A_{\mathbf{u}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} / O_{\mathbf{u}}(\mathcal{H})$.

Замечание 2.2. Если $u_i = \infty$ при некотором i , то мы полагаем $u_i^{-1} = 0$.

В дальнейшем мы изучаем только вертекс-операторные алгебры $\mathcal{V}_k(\mathfrak{g})$, определяемые по аффинной алгебре Каца–Мууди $\widehat{\mathfrak{g}}$ на уровне $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для веса $\lambda \in P_+^k$ положим $O_{\mathbf{u}}(\lambda) = O_{\mathbf{u}}(L_{\lambda})$, $A_{\mathbf{u}}(\lambda) = A_{\mathbf{u}}(L_{\lambda})$. Наша цель заключается в доказательстве равенства

$$O_{\mathbf{u}}(\lambda) = \left(\mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1}) \mathbb{C}[t^{-1}] \right) L_{\lambda} \quad (2.3)$$

(напомним, что $u_1 = \infty$). Обозначим правую часть через $O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$.

Замечание 2.3. Если $u_j = \infty$ при всех $j = 1, \dots, n$, то

$$O_{\mathbf{u}}^c(\lambda) = (\mathfrak{g} \otimes t^{-n} \mathbb{C}[t^{-1}]) L_{\lambda},$$

что согласуется с общими формулами для $O_{(\infty, \dots, \infty)}(\lambda)$, см., например, [13].

Мы начнем с простой, но важной леммы.

Лемма 2.4. Для всех $a \in \mathfrak{g}$, $M \in \mathbb{Z}$ и $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}$

$$\text{Res} \left(z^M \prod_{j=1}^N (z^{-1} - p_j) Y(a \otimes t^{-1}, z) \right) = a \otimes t^M \prod_{j=1}^N (t^{-1} - p_j).$$

Доказательство следует из равенства

$$Y(a \otimes t^{-1}, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} z^{-i-1} (a \otimes t^i). \quad \square$$

Докажем, что левая часть формулы (2.3) содержит правую часть.

Лемма 2.5. $O_{\mathbf{u}}^c(\lambda) \subset O_{\mathbf{u}}(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathfrak{g}$. Так как $|a \otimes t^{-1}| = 1$, то

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-1}) = \text{Res } z^{-M} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1}) Y(a \otimes t^{-1}, z).$$

Теперь наша лемма следует из леммы 2.4 и определения $O_{\mathbf{u}}(\lambda)$. $\square$

В дальнейшем мы проверяем обратное включение $O_{\mathbf{u}}(\lambda) \subset O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$. Скажем, что оператор $X \in \text{End}(L_{\lambda})$ является хорошим, если

$$\text{Im}(X) \subset \left(\mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1}) \mathbb{C}[t^{-1}] \right) L_{\lambda}.$$

Тогда включение $O_{\mathbf{u}}(\lambda) \subset O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ эквивалентно утверждению, что все операторы $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(A, z)$, $M > 0$, $A \in \mathcal{V}$, хорошие.

Рассмотрим элементы $A = a \otimes t^{-s}$, $s \geq 1$.

Лемма 2.6. Для любых $M > 0$, $s > 0$ и $a \in \mathfrak{g}$ оператор $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-s})$ хороший.

Доказательство. Так как $|a \otimes t^{-s}| = s$, то (см. формулу (1.1))

$$\begin{aligned} (s-1)! Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-s}) &= \text{Res } z^{-1-M+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^s \partial^{s-1} Y(a \otimes t^{-1}, z) \\ &= (-1)^{s-1} \text{Res} \left(\partial^{s-1} \left[(z^{-1-M+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^s) \right] Y(a \otimes t^{-1}, z) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\partial^{s-1} \left(z^{-1-M+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^s \right) \\ &= \sum_{d_1 + \dots + d_n = s-1} c_{\mathbf{d}} (\partial^{d_1} z^{-1-M+s}) \prod_{j=2}^n \partial^{d_j} (z^{-1} - u_j^{-1})^s \\ &= \sum c_{\mathbf{d}, \mathbf{b}} z^{-1-M+s-d_1} z^{-\sum_{j=2}^n d_j - \sum_{j=2}^n b_j} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s-b_j}, \end{aligned}$$

где $c_{\mathbf{d}}$, $c_{\mathbf{d}, \mathbf{b}}$ — некоторые константы, а суммирование ведется по наборам

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad \mathbf{b} = (b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1},$$

таким, что $\sum_{i=1}^n d_i = s - 1$ и $b_i \leq d_i$. Таким образом, оператор $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-s})$ равен некоторой линейной комбинации выражений

$$\text{Res} \left(z^{-M - \sum_{j=2}^n b_j} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s-b_j} Y(a \otimes t^{-1}, z) \right).$$

Поскольку $0 \leq b_j \leq s - 1$, наша лемма следует из леммы 2.4. $\square$

В общем случае мы хотим доказать, что для всех

$$a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{g}, \quad s_1, \dots, s_m > 0, \quad M > 0,$$

имеет место включение

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a_1 \otimes t^{-s_1} \dots a_m \otimes t^{-s_m}) L_{\lambda} \subset O_{\mathbf{u}}^c(\lambda). \quad (2.4)$$

Мы сначала сводим (2.4) к случаю $s_1 = 1$.

Лемма 2.7. *Предположим, что (2.4) выполняется для $s_1 = 1$ и произвольных $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{g}$ и $s_2, \dots, s_m > 0$. Тогда (2.4) также выполняется при произвольных $s_1 > 0$.*

Доказательство. Пусть $B(z) = Y(a_2 \otimes t^{-s_2} \dots a_m \otimes t^{-s_m} l_{\lambda}, z)$ и $s = s_2 + \dots + s_m$. Тогда

$$\begin{aligned} (s_1 - 1)! Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a_1 \otimes t^{-s_1} \dots a_m \otimes t^{-s_m}) \\ = \text{Res } z^{-1-M+s_1+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s_1+s} :(\partial^{s_1-1} a_1(z)) B(z):, \end{aligned}$$

где $a_1(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_1 \otimes t^i) z^{-i-1}$. Так как вычет полной производной равен нулю, получаем, что при некоторых константах c_{l_1, l_2, l_3}

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a_1 \otimes t^{-s_1} \dots a_m \otimes t^{-s_m}) = \text{Res} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=s_1-1 \\ l_1, l_2, l_3 \geq 0}} c_{l_1, l_2, l_3} (\partial^{l_1} z^{-1-M+s_1+s}) \\ \times \left(\partial^{l_2} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s_1+s} \right) :a_1(z) \partial_z^{l_3} B(z):. \end{aligned}$$

Заметим (см. (1.3)), что $\partial^{l_3} B(z)$ является линейной комбинацией полей $Y(b_p, z)$ веса $l_3 + s$, т.е. $\partial^{l_3} B(z) = \sum_{p=1}^{m-1} \alpha_p Y(b_p, z)$, где α_p — некоторые константы и каждый вектор b_p имеет вид

$$b_p = a_2 \otimes t^{-\bar{s}_2} \dots a_m \otimes t^{-\bar{s}_m}, \quad \bar{s}_2 + \dots + \bar{s}_m = s + l_3, \quad \bar{s}_i > 0.$$

Таким образом, при некоторых константах $\bar{c}_{l_1, l_2, l_3}$ получаем

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(z) = \text{Res} \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=s-1 \\ p=1, \dots, m-1}} \bar{c}_{l_1, l_2, l_3} z^{(-1-M-l_1+s_1-1-l_3)+1+s+l_3} \\ \times \partial^{l_2} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s_1+s} :a_1(z) Y(b_p, z):. \end{aligned}$$

Заметим, что так как $l_2 \leq s_1 - 1$, производная $\partial^{l_2} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s_1+s}$ является линейной комбинацией многочленов вида

$$z^{-k} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s_1-k_j+s},$$

где $0 \leq k_2, \dots, k_n \leq l_2$ и $k > l_2$. Таким образом, $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(z)$ является линейной комбинацией выражений вида ($M_1 > 0$)

$$\text{Res} \left(z^{-1-M_1+1+s+l_3} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{1+s+l_3} :a_1(z)Y(b_p, z): \right).$$

Последний вычет равен

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M_1)}(a_1 \otimes t^{-1}\bar{a}_2 \otimes t^{-\bar{s}_2} \dots \bar{a}_m \otimes t^{-\bar{s}_m})$$

при некоторых $\bar{a}_i, \bar{s}_i$. Таким образом, мы свели включение (2.4) к случаю $s_1 = 1$. $\square$

В дальнейшем нам понадобится явная формула для операторов $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B)$. Определим константы $N^{(s)}$ и $\alpha_p^{(s)}$, $p = 0, \dots, N^{(s)}$, следующим образом:

$$N^{(s)} = (n-1)s, \quad \sum_{p=0}^{N^{(s)}} \alpha_p^{(s)} z^{-p} = \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^s.$$

Например, $\alpha_0^{(s)} = (-1)^{(n-1)s} \prod_{j=2}^n u_j^{-s}$ и $\alpha_{N^{(s)}}^{(s)} = 1$.

Лемма 2.8. Пусть $|B| = s$. Тогда

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B) = \sum_{p=0}^{N^{(s)}} \alpha_p^{(s)} B_{(-M-p)}.$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. $\square$

Докажем следующее

Предложение 2.9. Пусть $B(z) = Y(B, z)$ — поле, такое, что оператор $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B)$ хороший. Для любых $a \in \mathfrak{g}$ и $M > 0$ оператор $Y_{\mathbf{u}}^M(a \otimes t^{-1}B)$ также хороший.

Доказательство. По определению (см. (1.1))

$$Y(a \otimes t^{-1}Bl_{\lambda}, z) = :a(z)B(z): = \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} B(z) + \sum_{i \geq 0} B(z) (a \otimes t^i) z^{-i-1}.$$

Пусть $|B| = s$. Тогда

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-1}B) &= \text{Res } z^{-1-M+s+1} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} B(z) \\ &+ \text{Res } z^{-1-M+s+1} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i \geq 0} B(z) (a \otimes t^i) z^{-i-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое. Оно равно

$$\sum_{i \geq 0} \text{Res } z^{-1-M-i+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} B(z)(a \otimes t^i).$$

Так как $\prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})$ является многочленом от z^{-1} и оператор $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B)$ хороший при всех $M > 0$, то для всех $i \geq 0$

$$\text{Res} \left(z^{-1-M-i+s} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} B(z) \right) L_{\lambda} \subset O_{\mathbf{u}}^c(\lambda).$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части формулы (2.5) является хорошим оператором. Рассмотрим теперь первое слагаемое. С помощью разложения

$$B(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{(m)} z^{-m-s}$$

оно может быть переписано как

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \text{Res } z^{-M-m} \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} B_{(m)}.$$

Вводя новую переменную l формулой $l = -M - m$, получаем

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \text{Res} \left(z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} B_{(-M-l)} \right). \quad (2.6)$$

Рассмотрим три случая:

$$l < 0, \quad l \geq (n-1)(s+1), \quad 0 \leq l \leq (n-1)(s+1) - 1.$$

Первые два случая простые, а третий требует более детального рассмотрения.

Пусть $l < 0$. Тогда $z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1}$ является многочленом от z^{-1} без постоянного члена и поэтому соответствующее слагаемое в (2.6) равно

$$\text{Res } z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} a(z) B_{(-M-l)}.$$

Так как $\prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1}$ — многочлен от z^{-1} , из леммы 2.6 следует, что все слагаемые в (2.6) с $l < 0$ хорошие.

Пусть $l \geq (n-1)(s+1)$. Тогда $z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1}$ — многочлен от z и поэтому

$$\text{Res} \left(z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} \right)$$

обращается в нуль.

Нам осталось доказать, что сумма членов в (2.6) с $0 \leq l \leq (n-1)(s+1)-1$ является хорошим оператором. Эта сумма равна

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \text{Res } z^l \prod_{j=2}^n (z^{-1} - u_j^{-1})^{s+1} \sum_{i < 0} (a \otimes t^i) z^{-i-1} B_{(-M-l)} \\ &= \text{Res} \sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \sum_{p=0}^{N^{(s+1)}} \sum_{i < 0} z^{l-p-i-1} \alpha_p^{(s+1)} (a \otimes t^i) B_{(-M-l)} \\ &= \sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \sum_{i=1}^{N^{(s+1)}-l} \alpha_{i+l}^{(s+1)} (a \otimes t^{-i}) B_{(-M-l)}. \end{aligned}$$

Таким образом, наша цель — показать, что оператор

$$\sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \sum_{i=1}^{N^{(s+1)}-l} \alpha_{i+l}^{(s+1)} a_{(-i)} B_{(-M-l)}, \quad (2.7)$$

где $a_{(-i)} = a \otimes t^{-i}$, хороший. Напомним (см. лемму 2.8), что

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-1}) = \sum_{p=0}^{N^{(1)}} a_{(-M-p)} \alpha_p^{(1)} \quad \text{и} \quad Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B) = \sum_{p=0}^{N^{(s)}} B_{(-M-p)} \alpha_p^{(s)}.$$

Мы знаем, что для всех $M > 0$ эти операторы хорошие. Заметим, что если $X \in \text{End}(L_\lambda)$ хороший, то

- для всех $A \in \text{End}(L_\lambda)$ оператор XA хороший;
- если $i \leq 0$, то для всех $a \in \mathfrak{g}$ оператор $(a \otimes t^i)X$ хороший.

Таким образом, для того чтобы доказать, что (2.7) — хороший оператор, достаточно представить его в виде линейной комбинации операторов вида $Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a \otimes t^{-1})B_{(k_M)}$ и $a_{(-i_M)}Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(B)$, где $M > 0$, $i_M, k_M \geq 0$. Существование такой линейной комбинации вытекает из следующего утверждения: существуют два многочлена $p(x, y)$ и $q(x, y)$ от двух переменных, такие, что

$$\sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \sum_{i=1}^{N^{(s+1)}-l} \alpha_{i+l}^{(s+1)} x^i y^l = \prod_{j=2}^n (x - u_j^{-1}) p(x, y) + \prod_{j=2}^n (y - u_j^{-1})^s q(x, y). \quad (2.8)$$

Действительно, предположим, что такие $p(x, y)$ и $q(x, y)$ существуют. Положим

$$p(x, y) = \sum_{m, r \geq 0} p_{m, r} x^m y^r, \quad q(x, y) = \sum_{m, r \geq 0} q_{m, r} x^m y^r.$$

Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N^{(s+1)}-1} \sum_{i=1}^{N^{(s+1)}-l} \alpha_{i+l}^{(s+1)} a_{(-i)} B_{(-M-l)} \\ &= \sum_{m, r \geq 0} p_{m, r} Y_{\mathbf{u}}^{(m+1)}(a \otimes t^{-1}) B_{(-r-M)} + \sum_{m, r \geq 0} q_{m, r} a_{(-m-1)} Y_{\mathbf{u}}^{(M+r)}(B). \end{aligned}$$

Так как правая часть является хорошим оператором, наше предложение следует из существования многочленов p, q , удовлетворяющих (2.8). Мы доказываем их существование в отдельной лемме. $\square$

Лемма 2.10. *Многочлены $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющие (2.8), существуют.*

Доказательство. Изменим немного левую часть в (2.8), прибавив члены $\sum_{l=0}^{N^{(s+1)}} \alpha_l y^l$ (они соответствуют значению $i = 0$ в (2.8)). В результате мы добавим $\prod_{j=2}^n (y - u_j^{-1})^{s+1}$, и, значит, достаточно доказать нашу лемму, заменив левую часть в (2.8) суммой $\sum_{l, i \geq 0} \alpha_{i+l}^{(s+1)} x^i y^l$, где $\alpha_r^{(s+1)} = 0$ при $r > N^{(s+1)}$.

Для произвольного многочлена $f(v) = \sum_{r \geq 0} \beta_r v^r$ определим многочлен $\varphi(f)$ от двух переменных x, y формулой

$$\varphi(f) = \sum_{i, l \geq 0} \beta_{i+l} x^i y^l.$$

Легко видеть, что для всех $u \in \mathbb{C}$

$$\varphi(f(v)(v - u)) = \varphi(f)(x - u) + yf(y).$$

Используя это равенство, получаем

$$\varphi\left(\prod_{j=2}^n (v - u_j^{-1})^{s+1}\right) = (x - u_n^{-1})\varphi\left(\frac{\prod_{j=2}^n (v - u_j^{-1})^{s+1}}{(v - u_n^{-1})}\right) + \frac{y \prod_{j=2}^n (y - u_j^{-1})^{s+1}}{y - u_n^{-1}}.$$

Второе слагаемое в правой части уже имеет вид правой части формулы (2.8). Первое слагаемое может быть переписано в виде

$$(x - u_n^{-1}) \left[(x - u_{n-1}^{-1})\varphi\left(\frac{\prod_{j=2}^n (v - u_j^{-1})^{s+1}}{(v - u_n^{-1})(v - u_{n-1}^{-1})}\right) + \frac{y \prod_{j=2}^n (y - u_j^{-1})^{s+1}}{(y - u_n^{-1})(y - u_{n-1}^{-1})} \right].$$

Здесь второе слагаемое опять имеет необходимый вид. После n итераций нашей процедуры (опуская члены, которые уже имеют необходимый вид) получаем

$$\prod_{j=2}^n (x - u_j^{-1})\varphi\left(\prod_{j=2}^n (v - u_j^{-1})^s\right) + y \prod_{j=2}^n (y - u_j^{-1})^s.$$

Лемма доказана. $\square$

Мы теперь можем доказать нашу основную теорему.

Теорема 2.11. $O_{\mathbf{u}}(\lambda) = O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$.

Доказательство. Покажем сначала, что $O_{\mathbf{u}}(\lambda) \subset O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$. Это эквивалентно утверждению, что все операторы

$$Y_{\mathbf{u}}^{(M)}(a_1 \otimes t^{-i_1} \dots a_m \otimes t^{-i_m}), \quad M > 0, a_j \in \mathfrak{g}, i_1, \dots, i_m > 0, \quad (2.9)$$

хорошие. Докажем это индукцией по m . Для $m = 1$ оператор (2.9) хороший вследствие леммы 2.6. Шаг индукции позволяют осуществить предложение 2.9 и лемма 2.7.

Обратное включение $O_{\mathbf{u}}^c(\lambda) \subset O_{\mathbf{u}}(\lambda)$ доказано в лемме 2.5. $\square$

§3. Коинварианты

В этом параграфе мы обсуждаем следующую теорему:

Теорема 3.1. Пусть L_λ — интегрируемый неприводимый $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль со старшим весом $\lambda \in P_+^k$. Тогда имеет место изоморфизм $\mathfrak{g}^{\oplus n}$ -модулей

$$L_\lambda / \mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1}) \mathbb{C}[t^{-1}] \simeq \bigoplus_{\mu_1, \dots, \mu_n \in P_+^k} N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}, \quad (3.1)$$

где $N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k}$ — числа Верлинде уровня k и $u_j \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ — попарно различные точки.

Эта теорема для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ доказана в [5]. Доказательство с небольшими изменениями работает также для общей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для удобства читателя мы приводим соответствующее доказательство с необходимыми изменениями ниже.

Напомним сначала определение алгебры Верлинде и чисел Верлинде $N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k}$ (см. [17], [18]). Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ и λ — некоторые элементы из P_+^k . Пусть $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{CP}^1$ — набор попарно различных точек и $U = \mathbb{CP}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Обозначим локальные координаты в точках x_i через t_i , $t_i = t - x_i$, где t — глобальная координата на $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Если $x_i = \infty$, то мы полагаем $t_i = t^{-1}$. Пусть $\mathcal{O}[U]$ — кольцо $\mathbb{C}$ -значных функций на U и $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[U]$ — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ -значных функций. Тогда имеем вложение

$$\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[U] \subset \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t_i^{-1}, t_i], \quad (3.2)$$

определенное лорановскими разложениями в точках x_i (здесь $\mathbb{C}[t_i^{-1}, t_i]$ обозначает пространство рядов Лорана от переменной t_i). Вложение (3.2) снабжает тензорное произведение

$$L_{\mu_1} \otimes \dots \otimes L_{\mu_n} \otimes L_{\lambda^*}$$

структурой $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[U]$ -модуля (L_{μ_i} соответствует точке x_i , $i = 1, \dots, n$, и L_{λ^*} соответствует x_{n+1}). Числа Верлинде определяются по формуле

$$N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} = \dim(L_{\mu_1} \otimes \dots \otimes L_{\mu_n} \otimes L_{\lambda^*} / \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[U]).$$

Здесь и в дальнейшем для пространства V и множества операторов $A \subset \text{End}(V)$ мы обозначаем через V/A факторпространство V/AV . Известно, что числа Верлинде являются структурными константами ассоциативной алгебры, называемой алгеброй Верлинде. Эта алгебра имеет базис $[\lambda]$, занумерованный элементами $\lambda \in P_+^k$, а умножение дается формулой

$$[\mu_1] \cdots [\mu_n] = \sum_{\lambda \in P_+^k} N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} [\lambda].$$

Наша цель — доказать (3.1). Докажем сначала, что левая часть в (3.1) является конечномерным $\underbrace{\mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}}_n$ -модулем.

Лемма 3.2. *Факторпространство $L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ конечномерно и снабжено естественной структурой представления n коммутирующих копий алгебры $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Заметим, что пространство $O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ инвариантно относительно подалгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$. Следовательно, $L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ является представлением факторалгебры

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]/\mathfrak{g} \otimes \prod_{j=1}^n (t^{-1} - u_j^{-1})\mathbb{C}[t^{-1}]$$

(подалгебра, по которой происходит факторизация, действует тривиально). Эта факторалгебра изоморфна $\mathfrak{g}^{\oplus n}$: изоморфизм определяется композицией

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1} - u_j^{-1}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{g},$$

где первое отображение задается разложением Тейлора, а второе является отображением вычисления в точках $t = u_j$.

Докажем, что $L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ конечномерно. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ это доказано в [5]. Таким образом, достаточно свести общий случай к $\mathfrak{sl}_2$ -случаю. Конечность пространства $L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ может быть переформулирована следующим образом. Обозначим через $L_\lambda(N)$ линейную оболочку векторов вида

$$x_1 \otimes t^{-i_1} \dots x_s \otimes t^{-i_s} l_\lambda \quad (3.3)$$

для всех $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{g}$ и $i_1, \dots, i_s > 0$ с $i_1 + \dots + i_s \leq N$. Тогда конечность пространства $L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ эквивалентна следующему утверждению: существует число $N_k^{\mathfrak{g}}$, зависящее от уровня k , такое, что для всех $N > N_k^{\mathfrak{g}}$

$$L_\lambda(N) \subset L_\lambda(N-1) + O_{\mathbf{u}}^c(\lambda). \quad (3.4)$$

Пусть $\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$ — базис Шевалле для $\mathfrak{g}$. Пусть N_α — число $N_{k_\alpha}^{\mathfrak{sl}_2}$, где k_α является уровнем ограничения $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуля уровня k на подалгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, порожденную $e_\alpha \otimes t^i, h_\alpha \otimes t^i, f_\alpha \otimes t^i$. Докажем, что если $N_k^{\mathfrak{g}} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} N_\alpha$, то (3.4) выполняется.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что все x_i принадлежат множеству $\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$. В дальнейшем мы используем индукцию по s . Если $s = 1$ и $i > \sum_{\alpha \in \Delta_+} N_\alpha$, то $x \otimes t^{-i} \in L_\lambda(i-1) + O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ вследствие того, что утверждение верно для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Предположим, что $i_1 + \dots + i_s > \sum_{\alpha \in \Delta_+} N_\alpha$. Тогда существует положительный корень $\alpha_0 \in \Delta_+$, такой, что сумма показателей степеней у x_i , где $x_i \in \{e_{\alpha_0}, h_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}\}$, больше или равна чем N_{α_0} . По индукции мы можем предполагать, что все множители вида $e_{\alpha_0}, h_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}$ стоят справа в мономе $x_1 \otimes t^{-i_1} \dots x_s \otimes t^{-i_s}$. Теперь наша лемма следует из того, что утверждение верно при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ и $O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)$ инвариантно относительно $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]$. $\square$

Нам осталось доказать, что

$$N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} = \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}^{\oplus n}}(V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}, L_\lambda/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)).$$

Ключевой идеей здесь является рассмотрение параболических модулей Верма (модулей Вейля). Для $\lambda \in P_+^k$ соответствующий параболический модуль Верма

уровня k — это $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль, определенный формулой

$$W_{\lambda,k} = \text{Ind}_{\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K}^{\widehat{\mathfrak{g}}} V_{\lambda},$$

где $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K$ действует на V_{λ} следующим образом: K действует скаляром k , а $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ действует с помощью отображения $x \otimes 1 \mapsto x$, $x \otimes t^i \mapsto 0$ при $i > 0$.

Пусть $W = \mathbb{CP}^1 \setminus \{u_1^{-1}, \dots, u_n^{-1}, \infty\}$.

Предложение 3.3. *Имеют место изоморфизмы векторных пространств*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{g}^{\oplus n}}(V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}, L_{\lambda}/O_{\mathbf{u}}^c(\lambda)) &\simeq W_{\mu_1,k} \otimes \dots \otimes W_{\mu_n,k} \otimes L_{\lambda^*}/\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[W] \\ &\simeq L_{\mu_1} \otimes \dots \otimes L_{\mu_n} \otimes L_{\lambda^*}/\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}[W]. \end{aligned}$$

Доказательство. Первый изоморфизм доказан в [5] (ограничение $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ не используется в доказательстве). Второе утверждение доказано в [8] для общей $\mathfrak{g}$. $\square$

Следствие 3.4. *Теорема 3.1 верна.*

§4. Приложения и обобщения

Из теорем 2.11 и 3.1 получаем следующий результат:

Теорема 4.1. *Пусть $u_1, \dots, u_n$ — попарно различные точки в $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$. Тогда $A_{\mathbf{u}}$ снабжено естественной структурой $\mathfrak{g}^{\oplus n}$ -модуля и*

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda) \simeq \bigoplus_{\mu_1, \dots, \mu_n \in P_+^k} N_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\lambda; k} V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}. \quad (4.1)$$

Замечание 4.2. Заметим, что существование n коммутирующих действий алгебры $\mathfrak{g}$ на $A_{\mathbf{u}}(\lambda)$ является проявлением общего факта из теории систем корреляционных функций, см. [12], [13], [16].

Заметим, что если $n = 2$ и $\lambda = 0$, то $N_{\mu_1, \mu_2}^{0; k} = \delta_{\mu_1, \mu_2^*}$. Таким образом, теорема 4.1 дает

$$A_{\mathbf{u}}(0) \simeq \bigoplus_{\mu \in P_+^k} V_{\mu} \otimes V_{\mu^*}.$$

Этот изоморфизм является теоремой Жу для аффинных алгебр Каца–Муди (см. [19]). Для общего веса λ и $n = 2$ мы получаем

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda) \simeq \bigoplus_{\mu_1, \mu_2 \in P_+^k} N_{\mu_1, \mu_2}^{\lambda; k} V_{\mu_1} \otimes V_{\mu_2},$$

что является теоремой Френкеля–Жу [9].

Заметим, что точки u_j в теореме 4.1 попарно различны. В то же время пространства $A_{\mathbf{u}}(\lambda)$ определены для всех наборов точек из $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$. Таким образом, следующий вопрос представляется важным и интересным: выполняется ли изоморфизм (4.1) в случае, когда точки u_j совпадают? Есть несколько случаев, когда ответ на этот вопрос положительный.

Во-первых, пусть $n = 2$, $\lambda = 0$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. В работах [4], [6], [7], [11] показано, что изоморфизм (4.1) сохраняется при $u_1 = u_2$.

Во-вторых, пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Следствие 4.3. При $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ изоморфизм (4.1) имеет место при всех $\lambda \in P_+^k$ и наборах $\mathbf{u}$.

Доказательство. Достаточно доказать следствие в случае, когда все u_j равны ∞ . Тогда

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda) \simeq L_{\lambda}/\mathfrak{g} \otimes t^{-n}\mathbb{C}[t^{-1}]. \quad (4.2)$$

В работе [5] показано, что размерность правой части в (4.2) совпадает с размерностью правой части в (4.1). Это доказывает следствие. $\square$

Было бы очень интересно выяснить, выполняется ли (4.1), если некоторые из u_j совпадают и $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли (заметим однако, что (4.1) не выполняется для E_8 и $n = 2$, $k = 1$, $\lambda = 0$, $u_1 = u_2$; см., например, [11]).

Благодарность. Мы благодарны М. Габердиэлю за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Ben-Zvi, E. Frenkel, *Vertex algebras and algebraic curves*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 88, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [2] C. Dong, G. Mason, *Integrability of C_2 -cofinite vertex operator algebras*, <http://arxiv.org/abs/math/0601569>.
- [3] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Snchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] E. Feigin, *The PBW filtration*, Represent. Theory, **13** (2009), 165–181.
- [5] B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, *Combinatorics of the $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ spaces of coinvariants*, Transform. Groups, **6**:1 (2001), 25–52.
- [6] B. Feigin, E. Feigin, P. Littellmann, *Zhu’s algebras, C_2 -algebras and abelian radicals*, <http://arxiv.org/abs/0907.3962>.
- [7] E. Feigin, P. Littellmann, *Zhu’s algebra and the C_2 -algebra in the symplectic and the orthogonal cases*, <http://arxiv.org/abs/0911.2957>.
- [8] M. Finkelberg, *An equivalence of fusion categories*, Geom. Funct. Anal., **6**:2 (1996), 249–267.
- [9] I. Frenkel, Y. Zhu, *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*, Duke Math. J., **66** (1992), 123–168.
- [10] M. Gaberdiel, *An introduction to conformal field theory*, Rept. Prog. Phys., **63**:4 (2000), 607–667.
- [11] M. R. Gaberdiel, T. Gannon, *Zhu’s algebra, the C_2 algebra, and twisted modules*, <http://arxiv.org/abs/0811.3892>.
- [12] M. R. Gaberdiel, P. Goddard, *Axiomatic conformal field theory*, Comm. Math. Phys., **209**:3 (2000), 549–594.
- [13] M. R. Gaberdiel, A. Neitzke, *Rationality, quasirationality and finite W -algebras*, Comm. Math. Phys., **238**:1–2 (2003), 305–331.
- [14] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [15] V. Kac, *Vertex Algebras for Beginners*, Univ. Lecture Series, vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [16] A. Neitzke, *Zhu’s theorem and an algebraic characterization of conformal blocks*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0005144>.
- [17] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada, *Conformal field theory on the universal family of stable curves with gauge symmetry*, in: Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, 1989, 459–566.
- [18] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nucl. Phys. B, **300** (1988), 360–376.

- [19] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc., **9**:1 (1996), 237–302.

Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма
Физический институт им. П. Н. Лебедева
Русско-французская лаборатория им. Понселе
Независимый Московский Университет
e-mail: evgfeig@gmail.com

Поступило в редакцию
29 мая 2011 г.