Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, Совместный спектральный радиус и инвариантные подпространства, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:14:04

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H. Messenger of Math., **58**, 50–52 (1928).
2. Bellman R. Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 741–744 (1994).
3. Алишынбаева Е. Матем. заметки, **25**, № 5, 645–651 (1979).
4. Andersen K. C. Pacif. J. Math., **100**, No. 2, 243–248 (1982).
5. Берчиан О. Я. Матем. заметки, **53**, № 4, 3–12 (1993).
6. Голубов Б. И. Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. МФТИ, М., 1995, с. 56–64.
7. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
8. Голубов В. И. Матем. сборник, **185**, № 11, 31–40 (1994).
9. Родин В. А. Phystech journal, **3**, No. 4, 79–83 (1997).
10. Андриенко В. А. В кн.: Математический анализ. 1970, Итоги науки, ВИНТИ, М., 1971, с. 203–262.
11. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.

Воронежский госуниверситет,
математический факультет

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.

УДК 517.5

Совместный спектральный радиус и инвариантные подпространства

© 2000. Ю. В. ТУРОВСКИЙ, В. С. ШУЛЬМАН

Пусть M — ограниченное множество элементов (комплексной) нормированной алгебры A , $\|M\| = \sup\{\|a\| : a \in M\}$ и M^n — множество всех произведений по n элементов из M . Число $\rho(M) = \inf\|M^n\|^{1/n}$ называется [1] *спектральным радиусом* множества M . Если $\rho(M) = 0$, то M называется *квазинильпотентным*. Множество называется *конечно (компактно) квазинильпотентным*, если все его конечные (соответственно предкомпактные) подмножества квазинильпотентны. Для множества операторов $M \subset B(\mathfrak{X})$ мы также рассматриваем *существенный спектральный радиус* $\rho_e(M)$, равный спектральному радиусу образа множества M в алгебре Калкина $B(\mathfrak{X})/K(\mathfrak{X})$, где $B(\mathfrak{X})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и $K(\mathfrak{X})$ — ее идеал, состоящий из всех компактных операторов. Первые применения этих понятий в теории инвариантных подпространств были найдены в [2], где установлено, что алгебра вольтеровых (т. е. компактных квазинильпотентных) операторов имеет гиперинвариантное (инвариантное относительно всех операторов из алгебры и ее коммутанта) подпространство (ГИП), и в [3] (подробнее см. в [4]), где, в частности, доказано, что два коммутирующих триангулируемых семейства компактных операторов триангулируемы одновременно. Развитие этой техники в [5] позволило первому автору решить проблему вольтерровой полугруппы, т. е. доказать, что любая (мультипликативная) полугруппа вольтеровых операторов имеет (здесь и далее подразумевается нетривиальное) ГИП. Мы приводим другие приложения в теории инвариантных подпространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset B(\mathfrak{X})$ — предкомпактное множество операторов, такое, что $\rho_e(M) < \rho(M) = 1$. Если порожденная им полугруппа неограничена, то она имеет ГИП.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M \subset B(\mathfrak{X})$ — предкомпактное множество операторов, такое, что $\rho_e(M) < \rho(M)$. Если порожденная им полугруппа ограничена, то она предкомпактна (в равномерной топологии).

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — топологическая секвенциально компактная полугруппа. Если $G = G^2$, то $G = GPG$, где P — совокупность всех идемпотентов полугруппы.

Напомним [6], что топологическая полугруппа G секвенциально компактна, если любая последовательность элементов из G имеет сходящуюся в G подпоследовательность.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $M \subset B(\mathfrak{X})$ — предкомпактное множество операторов, такое, что $\rho_e(M) < \rho(M) = 1$. Если M не имеет инвариантных подпространств, то порожденная им замкнутая полугруппа содержит (нетривиальный) проектор конечного ранга.

Множество операторов M называется транзитивным по Ломоносову (L -транзитивным), если для произвольного ненулевого оператора $S \in B(\mathfrak{X})$ найдется такой оператор $T \in M$, что ST имеет ненулевое собственное значение конечной кратности.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если полугруппа операторов, не имеющая инвариантных подпространств, содержит хотя бы один оператор T с $\rho_e(T) < \rho(T)$, то она L -транзитивна.

ТЕОРЕМА 6. Если полугруппа состоит из операторов $T \in B(\mathfrak{X})$ с $\rho_e(T) = \rho(T)$ и содержит группу $\{\exp(tK)\}$ для всех комплексных чисел t и некоторого ненулевого компактного оператора K , то она имеет ГИП.

Нормированная алгебра Ли L называется квазинильпотентной [7], если все операторы $b \rightarrow [a, b]$, $a, b \in L$, квазинильпотентны. Мы будем рассматривать алгебры Ли операторов из $B(\mathfrak{X})$ относительно операции $[T, S] = TS - ST$.

ТЕОРЕМА 7. Любая (равномерно) замкнутая квазинильпотентная алгебра Ли операторов, содержащая ненулевой компактный оператор, имеет инвариантное подпространство. Если к тому же она содержит нескаллярный оператор, то она имеет ГИП.

СЛЕДСТВИЕ 8. Всякая квазинильпотентная алгебра Ли компактных операторов триангулируема и, как следствие, имеет ГИП, если содержит хотя бы один нескаллярный оператор.

Следующее предложение дает ответ на вопросы 4 и 5, поставленные в работе Войтыньского [8]:

СЛЕДСТВИЕ 9. Каждая ненулевая алгебра Ли вольтерровых операторов содержится в (ассоциативной) алгебре вольтерровых операторов и имеет ГИП.

Пусть $\mathfrak{F}$ — полная (относительно пересечения и взятия замкнутой линейной оболочки объединения) цепь подпространств в $\mathfrak{X}$, содержащая $\mathfrak{X}$ и 0 ; разрывом цепи $\mathfrak{F}$ называется факторпространство Y/Z , где (Y, Z) — какая-нибудь пара ее соседних элементов. Цепь максимальна, если все ее разрывы одномерны (или их вообще нет). Если M — множество операторов, для которых все подпространства рассматриваемой цепи инвариантны, то в каждом разрыве V индуцируется множество операторов, которое мы обозначим $M|V$. Положим

$\rho(M|\mathfrak{F}) = \sup \rho(M|V)$, где верхняя грань берется по всем разрывам V цепи (если их нет, то полагаем $\rho(M|\mathfrak{F})$ равным нулю).

Можно показать, что если цепь $\mathfrak{F}$ конечна, а множество $M \subset B(\mathfrak{X})$ ограничено, то $\rho(M) = \rho(M|\mathfrak{F})$. Отметим также, что для предкомпактного множества M компактных операторов супремум в определении $\rho(M|\mathfrak{F})$ можно заменить максимумом.

ТЕОРЕМА 10. *Если M — предкомпактное множество слабо компактных операторов, то $\rho(M) = \max\{\rho_e(M), \rho(M|\mathfrak{F})\}$.*

Здесь и ниже условие слабой компактности операторов может быть опущено для подмножеств в $B(\mathfrak{X})$ без инвариантных подпространств, а также для подмножеств, каждый оператор которых есть сумма скалярного и компактного операторов. Разумеется, это условие излишне, если $\mathfrak{X}$ рефлексивно.

Положим $r(M) = \limsup(\sup\{\rho(T) : T \in M^n\})^{1/n}$; ясно, что

$$r(M) \leq \sup(\sup\{\rho(T) : T \in M^n\})^{1/n} \leq \rho(M).$$

В [9] доказано, что в случае конечномерного пространства имеет место равенство. Мы обобщаем этот результат следующим образом.

ТЕОРЕМА 11. *Если M — предкомпактное множество слабо компактных операторов, то $\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}$.*

Подмножество M нормированной алгебры A будем называть *множеством взаимно компактных элементов* этой алгебры, если отображения $x \rightarrow axb$, $x \in A$, компактны для всех $a, b \in M$. Когда M сводится к одному элементу, говорим, что это *компактный элемент*. Всякое множество M компактных операторов из $B(\mathfrak{X})$ является множеством взаимно компактных элементов для любой содержащей его операторной алгебры; на произвольные банаховы алгебры это утверждение не переносится.

СЛЕДСТВИЕ 12. *Пусть M — предкомпактное множество взаимно компактных элементов нормированной алгебры A . Тогда $\rho(M) = r(M)$. Если A — банахова алгебра, то также*

$$\rho(M) = \sup\{\rho(\pi M) : \pi \in \text{Irr}(A)\} = \rho(M + \text{rad } A),$$

где $\text{rad } A$ — радикал Джекобсона и $M + \text{rad } A$ — образ множества M в $A/\text{rad } A$.

Здесь $\text{Irr}(A)$ — совокупность алгебраически неприводимых представлений банаховой алгебры A в линейных пространствах (являющихся естественными банаховыми A -модулями [10]).

ТЕОРЕМА 13. *Если M — предкомпактное множество слабо компактных операторов и $M_n \rightarrow M$ (в метрике Хаусдорфа, порожденной операторной нормой) для некоторой последовательности ограниченных подмножеств M_n в $B(\mathfrak{X})$, то $\rho(M) = \max\{\rho_e(M), \liminf \rho(M_n)\}$.*

СЛЕДСТВИЕ 14. *Всякое предкомпактное множество взаимно компактных элементов нормированной алгебры — точка непрерывности совместного спектрального радиуса, и его спектральный радиус равен супремуму спектральных радиусов его конечных подмножеств.*

СЛЕДСТВИЕ 15. *Всякая существенно коммутативная полугруппа слабо компактных квазинильпотентных операторов порождает (равномерно) замкнутую радикальную подалгебру в $B(\mathfrak{X})$.*

Мы также отметим среди прочих следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 16. *Всякая полугруппа или подалгебра Ли квазинильпотентных элементов банаховой алгебры, порожденная некоторыми ее компактными элементами, порождает замкнутую (ассоциативную) радикальную подалгебру.*

Авторы глубоко признательны В. Войтыньскому за препринт [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Rota G.-C., Strang W. G. Indag. Math., **22**, 379–381 (1960).
2. Шульман В. С. Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 2, 84–85 (1984).
3. Туровский Ю. В. Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 2, 77–78 (1984).
4. Туровский Ю. В. В сб.: Спектральная теория операторов и ее приложения, вып. 6, Баку, 1985, с. 144–181.
5. Turovskii Yu. V. J. Funct. Anal., **162**, No. 2, 313–323 (1999).
6. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп, Вища школа, 1985.
7. Wojtyński W. J. Funct. Anal., **153**, No. 2, 405–413 (1998).
8. Wojtyński W. Stud. Math., **59**, 263–273 (1977).
9. Berger M. A., Wang Y. Linear Algebra Appl., **166**, 21–27 (1992).
10. Rickart Ch. E. General theory of Banach algebras, Princeton, 1960.

Институт математики и механики
АН Азербайджана, Баку
e-mail: sinam@azeri.com

Вологодский политехнический институт,
кафедра математики
e-mail: victor@vstu.edu.ru

Поступило в редакцию
11 августа 1998 г.