Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Линфэн, Ч. Юэпин, Оценка собственных значений весового p -лапласиана на компактных многообразиях с краем, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 70–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:02:54

Рассмотрим контуры $\Gamma_N = \{\lambda: |\lambda| = (N + 1/2)^2\}$. Вычисляя предел контурных интегралов

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} B(x, \lambda) d\lambda$$

при $N \rightarrow \infty$ двумя способами (см. [11, лемма 9]): используя (11) и аналогичную оценку для $\Gamma(x, \lambda)$ и с помощью теоремы о вычетах, приходим к соотношению $\gamma(x, \lambda_{kl0})\alpha_{kl0} = 0_m$, $k \geq 1$, $l = 1, \dots, m$. Согласно условию 3 теоремы 1, $\gamma(x, \lambda) \equiv 0$. Отсюда следует, что $\beta(x) \equiv 0$. $\square$

Пусть $\psi(x)$ — решение уравнения (8). Получим $S_n(x) = \psi_n(x)X_n^{-1}$ и построим $Q(x)$ по формулам (9). Осталось показать, что $L = L(Q)$ — краевая задача со спектральными данными $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$, что можно проделать аналогично тому, как это делалось в [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
 [2] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова Думка, Киев, 1977. [3] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007. [4] З. С. Агранович, В. А. Марченко, *Обратная задача теории рассеяния*, Изд-во ХГУ, Харьков, 1960. [5] R. Carlson, J. Math. Anal. Appl., **267**:2 (2002), 564–575. [6] M. M. Malamud, in: Sturm–Liouville Theory. Past and present, Birkhauser, Basel, 2005, 237–270. [7] V. A. Yurko, Inverse Problems, **22**:4 (2006), 1139–1149. [8] D. Chelkak, E. Korotyaev, J. Funct. Anal., **257**:5 (2009), 1546–1588. [9] Ya. V. Mykytyuk, N. S. Trush, Inverse Problems, **26**:1 (2010), 015009. [10] Н. П. Бондаренко, Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер. матем. мех. информ., **10**:4 (2010), 3–13. [11] N. Bondarenko, *Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval*, <http://arxiv.org/abs/1008.4339v1>.

Саратовский государственный университет
 e-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
 13 января 2011 г.

УДК 517.9

Оценка собственных значений весового p -лапласиана на компактных многообразиях с краем*

© 2012. Ван Линьфэн, Чжу Юэпин

1. Введение. Пусть (M^n, g) — компактное риманово многообразие с выпуклым краем ∂M (это означает, что вторая фундаментальная форма края ∂M неотрицательна на векторе внешней нормали). Ли и Яу [6] получили оценку снизу для первого ненулевого собственного значения задачи Неймана для оператора Лапласа Δ на M . Для некоторой функции $h \in C^\infty(M)$ обозначим через $d\mu = e^{h(x)} dV(x)$ взвешенную меру, где $dV(x)$ — мера Римана–Лебега. При рассмотрении меры $d\mu$ всегда используют m -мерную кривизну Бакри–Эмери $\text{Ric}_m = \text{Ric-Hess } h - \frac{\nabla h \otimes \nabla h}{m-n}$ вместо кривизны Риччи. Здесь $m \geq n$, причем $m = n$ тогда и только тогда, когда h постоянна [9]. Для $p > 1$ определим ве-

*Поддержано ГФЕН (гранты 10971066, 11171254 и 10971228).

совой p -лапласиан $\Delta_{\mu,p}$ формулой $\Delta_{\mu,p}u = e^{-h} \operatorname{div}(e^h |\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ для любой гладкой функции u на M . Первое ненулевое собственное значение $\lambda_{\mu,p}$ задачи Неймана для $\Delta_{\mu,p}$ можно охарактеризовать следующим образом:

$$\lambda_{\mu,p} = \inf_{u \in W^{1,p}} \left\{ \int_M |\nabla u|^p d\mu; \int_M |u|^p d\mu = 1, \int_M |u|^{p-2} u d\mu = 0 \right\}.$$

В [7] и [8] было доказано, что точная нижняя грань здесь достигается на собственной функции u задачи Неймана, которая принадлежит классу $C^{1,\alpha}$ и удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\Delta_{\mu,p}u = -\lambda_{\mu,p}|u|^{p-2}u. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть (M^n, g) — компактное риманово многообразие с выпуклым краем, и пусть $d\mu = e^{h(x)} dV(x)$ — взвешенная мера, где h — гладкая функция. Предположим, что m -мерная кривизна Бакри–Эмери на M удовлетворяет неравенству $\operatorname{Ric}_m \geq -(m-1)$. Через R обозначим диаметр многообразия M . Тогда при $p \geq 2$ первое ненулевое собственное значение задачи Неймана для оператора $\Delta_{\mu,p}$ удовлетворяет оценке снизу вида

$$\lambda_{\mu,p} \geq \frac{2(p-1)}{(2+m)pR^p} \exp[-(p-1 + \sqrt{m(m-1)})R]. \quad (2)$$

2. Регуляризация. При $p \neq 2$ весовой p -лапласиан вырождается в тех точках, где $\nabla u = 0$. Наше доказательство опирается на некую процедуру регуляризации; такой метод использовался в [3]–[5]. При $\epsilon > 0$ определим оператор $\Delta_{\mu,p,\epsilon}$ на гладкой функции v формулой $\Delta_{\mu,p,\epsilon}v = e^{-h} \operatorname{div}[e^h (|\nabla v|^2 + \epsilon)^{(p-2)/2} \nabla v]$. Рассмотрим следующую вариационную постановку:

$$\tilde{\lambda}_\epsilon = \inf_{u \in W^{1,p}(M)} \left\{ \int_M [|\nabla u|^2 + \epsilon]^{p/2} d\mu; \int_M |u|^p d\mu = 1, \int_M |u|^{p-2} u d\mu = 0 \right\}.$$

Лемма 2. Точная нижняя грань достигается на собственной функции u_ϵ класса C^∞ задачи Неймана, удовлетворяющей уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\Delta_{\mu,p,\epsilon}u_\epsilon = -\lambda_\epsilon |u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon \quad (3)$$

при $\lambda_\epsilon = \int_M [|\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon]^{(p-2)/2} |\nabla u_\epsilon|^2 d\mu$. Кроме того,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \lambda_\epsilon = \lambda_{\mu,p}. \quad (4)$$

Доказательство. Существование собственной функции u_ϵ задачи Неймана в классе C^∞ доказано в [2]. Мы лишь докажем (4). Заметим, что предел $\lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{\lambda}_\epsilon$

существует в силу неравенства $\tilde{\lambda}_\epsilon \geq \lambda_{\mu,p}$. В силу того же неравенства получаем, что $\lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{\lambda}_\epsilon \geq \lambda_{\mu,p}$. При $\epsilon > 0$ для всех таких $u \in W^{1,p}(M)$, что $\int_M |u|^p d\mu = 1$ и $\int_M |u|^{p-2} u d\mu = 0$, справедливо неравенство $\int_M (|\nabla u|^2 + \epsilon)^{p/2} d\mu \geq \tilde{\lambda}_\epsilon$, которое означает, что $\int_M |\nabla u|^p d\mu \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{\lambda}_\epsilon$, или $\lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{\lambda}_\epsilon \leq \lambda_{\mu,p}$. Теперь равенство (4) вытекает из соотношения $\lambda_{\mu,p} \leq \lambda_\epsilon \leq \tilde{\lambda}_\epsilon$. $\square$

Для любого $\epsilon > 0$ положим $\tilde{u}_\epsilon = u_\epsilon C_\epsilon^{-1}$ и $\tilde{\epsilon} = \epsilon C_\epsilon^{-2}$, где $C_\epsilon = \max\{|u_\epsilon|(x); x \in M\}$. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде $\Delta_{\mu,p,\tilde{\epsilon}}\tilde{u}_\epsilon = -\lambda_\epsilon |\tilde{u}_\epsilon|^{p-2}\tilde{u}_\epsilon$. Поскольку $\int_M |\tilde{u}_\epsilon|^{p-2}\tilde{u}_\epsilon d\mu = 0$, функция $\tilde{u}_\epsilon$ меняет знак на M , и мы можем

считать, что $\min \tilde{u}_\epsilon = -1$ и $\max \tilde{u}_\epsilon \leq 1$. Пусть $a > 1$. Положим $f_\epsilon = \log(a + \tilde{u}_\epsilon)$ и $A_\epsilon^2 = |\nabla f_\epsilon|^2 + \tilde{\epsilon}(a + \tilde{u}_\epsilon)^{-2}$. Тогда

$$e^{-h} \operatorname{div}[e^h A_\epsilon^{p-2} \nabla f_\epsilon] + (p-1) A_\epsilon^{p-2} |\nabla f_\epsilon|^2 = -\lambda_\epsilon \left| \frac{\tilde{u}_\epsilon}{a + \tilde{u}_\epsilon} \right|^{p-2} \frac{\tilde{u}_\epsilon}{a + \tilde{u}_\epsilon}. \quad (5)$$

Лемма 3. *Обозначим единичную внешнюю нормаль к ∂M через e_n . Тогда во всех точках границы ∂M выполнено неравенство $\nabla_{e_n} A_\epsilon^2 \leq 0$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ — ортонормированные касательные векторы к ∂M . В силу краевого условия Неймана для $\tilde{u}_\epsilon$ получаем $\nabla_{e_n} f_\epsilon = 0$. Далее, так как вторая ковариантная производная функции f_ϵ определена формулой $f_{\epsilon,ij} = (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} e_i) f_\epsilon$, а вторая фундаментальная форма имеет вид $h_{ij} = (\nabla_{e_i} e_n) \cdot e_j$, $i, j = 1, \dots, n-1$, то на границе получаем

$$\begin{aligned} \nabla_{e_n} (A_\epsilon^2) &= 2 \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (\nabla_{e_n} \nabla_{e_i} f_\epsilon) - \frac{2\tilde{\epsilon}}{(a + \tilde{u}_\epsilon)^3} \nabla_{e_n} \tilde{u}_\epsilon \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (f_{\epsilon, in} + \nabla_{e_n} e_i f_\epsilon) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (f_{\epsilon, ni} + \nabla_{e_n} e_i f_\epsilon) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (\nabla_{e_i} \nabla_{e_n} f_\epsilon - \nabla_{e_i} e_n f_\epsilon + \nabla_{e_n} e_i f_\epsilon) \\ &= -2 \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (\nabla_{e_j} f_\epsilon) + 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (\nabla_{e_j} f_\epsilon) (\nabla_{e_n} e_i) \cdot e_j \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} (\nabla_{e_i} f_\epsilon) (\nabla_{e_j} f_\epsilon) (\nabla_{e_n} e_i) \cdot e_j = 0, \end{aligned}$$

где использован тот факт, что $(\nabla_{e_n} e_i) \cdot e_j = -(\nabla_{e_n} e_j) \cdot e_i$. □

Пусть $a > 1$. Рассмотрим уравнение

$$e^{-h} \operatorname{div}[e^h |\nabla f|^{p-2} \nabla f] + (p-1) |\nabla f|^p = -\lambda_{\mu,p} \left| \frac{u}{a+u} \right|^{p-2} \frac{u}{a+u}, \quad (6)$$

где $\min u = -1$, $\max u \leq 1$ и

$$f = \log(a + u). \quad (7)$$

Лемма 4. *Существуют такая подпоследовательность последовательности f_ϵ , которую мы снова обозначим через f_ϵ , и такая липшицева функция f , удовлетворяющая (6), (7) и краевому условию Неймана, что $f_\epsilon \rightarrow f$ и $\nabla f_\epsilon \rightarrow \nabla f$ равномерно на M при $\epsilon \searrow 0$. Соответственно $\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u$, $\nabla \tilde{u}_\epsilon \rightarrow \nabla u$ равномерно на M .*

Доказательство. Согласно оценке из работы [1] (можно сослаться также на [7] и [8]), мы знаем, что при каждом $a > 1$ существует такая не зависящая от ϵ постоянная C , что $|\nabla f_\epsilon|^2 \leq C$. Более того, существует такая постоянная $\alpha \in (0, 1)$, что норма функции f_ϵ в $C^{1,\alpha}$ равномерно ограничена на M . По теореме Арцела существуют такие подпоследовательность f_ϵ и липшицева

функция f , что $f_\epsilon \rightarrow f$ и $\nabla f_\epsilon \rightarrow \nabla f$ равномерно на M при $\epsilon \searrow 0$. Сходимость последовательности $\tilde{u}_\epsilon$ следует из того, что $f_\epsilon = \log(a + \tilde{u}_\epsilon)$. $\square$

3. Доказательство теоремы 1. Определим оператор L_ϵ , действующий на функции по формуле

$$L_\epsilon v = e^{-h} \operatorname{div}(e^h A_\epsilon^{p-2} \nabla v) + (p-2)e^{-h} \operatorname{div} \left(e^h A_\epsilon^{p-4} \left(\nabla f_\epsilon \cdot \nabla v - \frac{\tilde{\epsilon}}{(a + \tilde{u}_\epsilon)^2} v \right) \nabla f_\epsilon \right).$$

Этот оператор представляет собой линеаризацию оператора $e^{-h} \operatorname{div}[e^h A_\epsilon^{p-2} \nabla f_\epsilon]$ на f_ϵ . Легко проверить, что он неотрицательно определен при $p > 1$. Используя (5), тождество Риччи [6] и тот факт, что $|\nabla^2 f_\epsilon|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta f_\epsilon)^2$, после некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned} & L_\epsilon A_\epsilon^p + \Phi(x) \nabla A_\epsilon^p \cdot \nabla f_\epsilon \\ & \geq \frac{p(p-1)^2}{m} A_\epsilon^{2p} + \frac{p(p-1)\lambda_\epsilon}{m} \frac{2\tilde{u}_\epsilon - am}{a + \tilde{u}_\epsilon} A_\epsilon^p \left| \frac{\tilde{u}_\epsilon}{a + \tilde{u}_\epsilon} \right|^{p-2} \\ & \quad - p(m-1) A_\epsilon^{2p-2} - \frac{2p(p-1)^2 \tilde{\epsilon}}{m(a + \tilde{u}_\epsilon)^2} A_\epsilon^{2p-2} - \frac{2(p-1)\tilde{\epsilon}^2 A_\epsilon^{2p-4}}{(a + \tilde{u}_\epsilon)^4} \\ & \quad - \frac{(p-1)\tilde{\epsilon}\lambda_\epsilon}{(a + \tilde{u}_\epsilon)^3} \left[ap + \frac{2m-2p}{m} \tilde{u}_\epsilon \right] \left| \frac{\tilde{u}_\epsilon}{a + \tilde{u}_\epsilon} \right|^{p-2} A_\epsilon^{p-2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Phi(x)$ — гладкая функция на M . Чтобы доказать теорему 1, мы сначала докажем градиентную оценку, представляющую и самостоятельный интерес.

Теорема 5. Пусть (M^n, g) — компактное риманово многообразие с выпуклым краем, а $d\mu = e^{h(x)} dV(x)$ — взвешенная мера, где h — гладкая функция. Предположим, что m -мерная кривизна Бакри–Эмери на M удовлетворяет оценке $\operatorname{Ric}_m \geq -(m-1)$, а также что u — предельная функция, как в лемме 4. Тогда при $a > 1$, $p \geq 2$ и при всех $x \in M$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\nabla u}{a + u} \right| (x) \leq \left[\frac{(2+m)p}{2(p-1)} \right]^{1/p} \left[\frac{a-1}{a} \right]^{1/p-1} \lambda_{\mu, p}^{1/p} + \frac{[m(m-1)]^{1/2}}{p-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть A_ϵ^p достигает максимума в некоторой точке $x_\epsilon \in M$. Поскольку M компактно, можно выбрать такую подпоследовательность последовательности x_ϵ , которую снова обозначим через x_ϵ , что $x_\epsilon \rightarrow x_0 \in M$ при $\epsilon \searrow 0$. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 6. Существует такая подпоследовательность последовательности f_ϵ , что $\lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon(x_\epsilon) = f(x_0)$ и $\lim_{\epsilon \searrow 0} \nabla f_\epsilon(x_\epsilon) = \nabla f(x_0)$. Кроме того, $|\nabla f|^p$ достигает максимума в точке x_0 .

Доказательство. Легко видеть, что $\lim_{\epsilon \searrow 0} f(x_\epsilon) = f(x_0)$ и

$$|f_\epsilon(x_\epsilon) - f(x_0)| \leq |f_\epsilon(x_\epsilon) - f(x_\epsilon)| + |f(x_\epsilon) - f(x_0)|.$$

Первое равенство следует из того, что $f_\epsilon \rightarrow f$ равномерно на M при $\epsilon \searrow 0$. Поскольку $\nabla f_\epsilon \rightarrow \nabla f$ равномерно на M при $\epsilon \searrow 0$, а f — функция класса $C^{1,\alpha}$, доказательство второго равенства получается таким же способом.

Заметим, что $\int_M |u_\epsilon|^p d\mu = 1$, так что для любого $\epsilon > 0$ имеем $C_\epsilon \geq C_1$ с некоторой не зависящей от ϵ постоянной C_1 . Поэтому $\lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{\epsilon} = 0$. Заметим также, что при всех $y \in M$ справедливо неравенство $(|\nabla f_\epsilon|^2 + \tilde{\epsilon}(a + \tilde{u}_\epsilon)^{-2})(y) \leq$

$(|\nabla f_\epsilon|^2 + \tilde{\epsilon}(a + \tilde{u}_\epsilon)^{-2})(x_\epsilon)$. Полагая $\epsilon \searrow 0$, получаем $|\nabla f|^2(y) \leq |\nabla f|^2(x_0)$, так что x_0 — точка максимума функции $|\nabla f|^p$ на M . $\square$

Лемма 7. *Если существует такая последовательность $\epsilon \searrow 0$, что правая часть в (8) неположительна при каждом x_ϵ , то теорема 5 справедлива.*

Доказательство. Полагая $\epsilon \searrow 0$ в правой части формулы (8), используя наше предположение, лемму 2 и лемму 6, заключаем, что

$$\frac{(p-1)^2}{m} |\nabla f|^{2p} + \frac{(p-1)\lambda_{\mu,p}}{m} \frac{2u-am}{a+u} |\nabla f|^p \left| \frac{u}{a+u} \right|^{p-2} \leq (m-1) |\nabla f|^{2p-2}$$

в точке x_0 . В силу леммы 6 мы знаем, что $|\nabla f|(x_0) > 0$. Заметим также, что $-1 \leq u \leq 1$ и дробь $\frac{2u-am}{a+u}$ — неубывающая функция аргумента u , так что в точке x_0 выполнено неравенство

$$(p-1)^2 |\nabla f|^p \leq \frac{(p-1)(ma+2)\lambda_{\mu,p}}{(a-1)^{p-1}} + m(m-1) |\nabla f|^{p-2}. \quad (10)$$

Положим $t = (a-1)/a$. Тогда $0 < t < 1$ и

$$\frac{ma+2}{(a-1)^{p-1}} = \frac{m(1-t)^{p-2} + 2(1-t)^{p-1}}{t^{p-1}} \leq (2+m)t^{1-p}. \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$s^{p-2} \leq \theta s^p + 2\theta^{1-p/2} p^{-p/2} (p-2)^{p/2-1}$$

для любых $\theta > 0$, $s > 0$ и $p > 2$. Полагая $\theta = \frac{(p-1)^2}{m(m-1)}(1 - \frac{2}{p})$, с учетом (10) и (11) мы видим, что в точке x_0

$$|\nabla f|^p \leq \frac{(2+m)p}{2(p-1)} \frac{\lambda_{\mu,p}}{t^{p-1}} + \frac{[m(m-1)]^{p/2}}{(p-1)^p},$$

откуда следует, что это неравенство справедливо для любого $x \in M$. Теорема 5 вытекает из этого неравенства и того факта, что $(x+y)^\nu \leq x^\nu + y^\nu$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \nu < 1$. $\square$

Лемма 8. *Теорема 5 справедлива, если существует такая последовательность $\epsilon \searrow 0$, что $x_\epsilon \notin \partial M$.*

Доказательство. Заметим, что $\nabla A_\epsilon^p = 0$ и $L_\epsilon A_\epsilon^p \leq 0$ в точке x_ϵ . Теперь лемма вытекает из (8) и леммы 7. $\square$

Чтобы закончить доказательство теоремы 5, исключим случай, при котором существует такое $\epsilon > 0$, что правая часть формулы (8) положительна в точке x_ϵ и $x_\epsilon \in \partial M$. Если такое ϵ существует, то из сильного принципа максимума [2] вытекает, что $\nabla_{e_n}(A_\epsilon^2)(x_\epsilon) > 0$, а это в силу леммы 3 противоречит тому факту, что ∂M является выпуклым. $\square$

Доказательство теоремы 1. Интегрируя $|\nabla f| = |\nabla \log(a+u)|$ вдоль минимальной геодезической γ , соединяющей точки, в которых $u = -1$ и $u = \max u$,

получаем

$$\begin{aligned} \log \frac{a}{a-1} &\leq \log \frac{a + \max u}{a-1} \leq \int_{\gamma_\epsilon} |\nabla \log(a+u)| dl \\ &\leq R \left[\frac{(2+m)p}{2(p-1)} \right]^{1/p} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{1/p-1} \lambda_{\mu,p}^{1/p} + R \frac{(m(m-1))^{1/2}}{p-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбирая такое $a > 1$, что $\frac{a-1}{a} = \exp \left[-\left(1 + \frac{(m(m-1))^{1/2}}{p-1} R\right) \right]$, в силу (12) легко приходим к (2). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. C. Evans, J. Differential Equations, **45**:3 (1982), 356–373. [2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001. [3] B. Hein, Calc. Var. Partial Differential Equations, **28**:2 (2007), 249–273. [4] G. Huiskens, T. Ilmanen, J. Differential Geom., **59**:3 (2001), 353–437. [5] J. Kinnunen, T. Kuusi, Math Ann., **337**:3 (2007), 705–728. [6] R. Schoen, S.-T. Yau, *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Vol I, International Press, Cambridge, MA, 1994. [7] J. Serrin, Acta Math., **111** (1964), 247–302. [8] P. Tolksdorf, J. Differential Equations, **51**:1 (1984), 126–150. [9] L.-F. Wang, Ann. Global Anal. Geom., **37**:4 (2010), 393–402.

Школа наук, Университет Наньтона, Наньтон, Китай
e-mail: wlf711178@ntu.edu.cn, wlf711178@126.com

Поступило в редакцию
25 мая 2010 г.

Школа наук, Университет Наньтона, Наньтон, Китай
e-mail: zhu Yueping@ntu.edu.cn

УДК 517.988

Квазисжатия К-метрических пространств с метрикой, заданной конусом, не являющимся нормальным*

© 2012. Л. Гаджич, В. Ракочевич

1. Введение. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Отображение $T: X \mapsto X$ называется *квазисжатием*, если для некоторой константы $\lambda \in (0, 1)$ и для всех $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{\rho(x, y), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty), \rho(x, Ty), \rho(y, Tx)\}. \quad (1)$$

Отметим, что Чирич [3] исследовал квазисжатие как одно из самых общих отображений сжимающего типа. Хорошо известен результат Чирича, что квазисжатие имеет единственную неподвижную точку.

Илич и Ракочевич [6] рассмотрели квазисжатия пространств, метрика которых задается некоторым конусом, и доказали соответствующую теорему о неподвижной точке, но только для случая, когда этот конус является нормальным. Недавно Кадельбург, Раденович и Ракочевич [8] доказали аналогичную теорему без предположения о нормальности, но только для случая, когда константа

*Работа поддержана грантом №174025 Министерства науки, технологии и развития Республики Сербия.