Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Рабинович, С. Г. Самко, Сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на сложных карлесоновских кривых, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 87–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:32:54

Предложение 13. Пусть φ есть l -непрерывное интервальное округление и (A, B, α, β) — его функциональная модель. Для того чтобы φ было идемпотентно аддитивным, необходимо и достаточно, чтобы функции α и β были убывающими.

Условие непрерывности позволяет значительно упростить функциональную модель.

Следствие 14. Непрерывное интервальное округление φ можно задавать условием

$$E_\varphi = \{(x, y) : y \geq \gamma(x), x \leq \delta(y)\}, \quad (3)$$

выбирая произвольные числа a, b и непрерывные невозрастающие функции γ, δ на $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, удовлетворяющие условиям

- (а) $\delta(\gamma(x)) \geq x, \gamma(\delta(y)) \leq y$;
- (б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = +\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} \delta(y) = -\infty$.

Автор выражает искреннюю признательность Т. Э. Каминскому за постановку задач и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Биркгоф, *Теория структур*, ИЛ, М., 1952. [2] Т. Е. Kaminsky, V. Kreinovich, Notes on intuitionistic fuzzy sets, **4:3** (1998), 57–64. [3] Т. Э. Каминский, в кн.: Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики, Русь, Вологда, 2000, 23–36. [4] U. Kulisch, Numer. Math., **18:1** (1971), 1–17. [5] G. L. Litvinov, *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction*, <http://arxiv.org/abs/math/0507014v1>. [6] Е. В. Шульман, J. London Math. Soc. (2), **54:1** (1996), 111–120.

Вологодский государственный педагогический университет
e-mail: kryukovanastya@yahoo.com

Поступило в редакцию
18 января 2010 г.

УДК 517.95

Сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на сложных карлесоновских кривых

© 2012. В. С. РАБИНОВИЧ, С. Г. САМКО

Памяти профессора И. Б. Симоненко посвящается

1. Введение. В работе [15] И. Б. Симоненко впервые ввел локальный метод исследования фредгольмовости одномерных и многомерных сингулярных интегральных операторов (СИО). Посредством этого метода исследование фредгольмовости СИО $A = aI + bS_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами a и b , действующих в $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, на кривых Ляпунова Γ , сводилось к исследованию локальных представителей оператора A в каждой точке $t_0 \in \Gamma$, являющихся простейшими операторами типа $A_{t_0} = a(t_0)I + b(t_0)S_{\mathbb{R}}$, действующими в $L^p(\mathbb{R})$. Этот метод был применен в [14] к СИО с кусочно непрерывными коэффициентами, действующими в пространствах $L^p(\Gamma, w)$ со степенным весом

w на кривых Ляпунова Г. Локальными представителями в этом случае являются однородные операторы $A = aI + bS_{\mathbb{R}}$, действующие в $L^p(\mathbb{R})$, где a, b — кусочно постоянные функции только с одним разрывом в точке 0, и условие обратимости таких операторов дается в терминах преобразований Меллина их ядер.

В работе применяется локальный принцип Симоненко для исследования фредгольмовости сингулярных интегральных операторов, действующих в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на некоторых сложных карлесоновских кривых с коэффициентами, допускающими осциллирующие разрывы. Локальными представителями в этом случае являются *псевдодифференциальные операторы Меллина* с переменными символами. Символ локального представителя в сингулярной точке t кривой, веса и коэффициентов содержит все их локальные характеристики: вращения и осцилляции кривой, осцилляции весов, коэффициентов и значение $p(t)$ показателя пространства Лебега в точке t . Выражение для символа объясняет появление двойных логарифмических спиралей и логарифмических лунок в локальных спектрах сингулярных интегральных операторов. Отметим, что в теории Гохберга, Крупника и Спитковского ([4], [16]) для СИО, действующих в пространствах L^p с весами Макенхаупта на кривых Ляпунова, типичными локальными спектрами являются циркулярные кривые и циркулярные лунки.

В заметке результаты статей [2], [3], [12], где рассматривались постоянные показатели p , распространяются на пространства с переменными показателями Лебега. Это распространение существенно нетривиально, так как, в частности, пространства $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+, dr/r)$ не инвариантны относительно сдвигов и подобий, что является очень важным для методов указанных статей.

Отметим, что теория СИО с кусочно непрерывными коэффициентами, действующих в пространствах $L^p(\Gamma, w)$, где Γ — общая кривая Карлесона, а w — вес Макенхаупта, развита в монографии [1] посредством факторизации Винера–Хопфа и теории субмультипликативных функций (см. также ссылки, приведенные в этой монографии.) В [5]–[7] некоторые результаты из [1] распространены на алгебры СИО, действующих в пространствах Лебега с переменными показателями.

Надо отметить большой интерес, появившийся недавно, к исследованию классических операторов анализа: СИО, операторов Харди, псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Лебега с переменными показателями. Мы упомянем только работы [8]–[11], [13]. См. также ссылки, приведенные там.

2. Кривые, коэффициенты, сингулярные интегралы. Множество $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *простой гладкой кривой*, если существует гомоморфизм $\varphi: [0, 1] \rightarrow \gamma$, такой, что $\varphi \in C^\infty(0, 1)$ и $\varphi'(r) \neq 0$ для всех $r \in (0, 1)$. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются *концевыми точками* кривой γ . Мы называем множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *сложной кривой*, если $\Gamma = \bigcup_{k=1}^K \Gamma_k$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$ — ориентированные и спрямляемые простые кривые, попарно не пересекающиеся, за исключением, возможно, концевых точек. *Узлом* кривой Γ называется точка, которая является концом по крайней мере одной из дуг $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$. Множество узлов обозначается через $\mathcal{F}$.

Будем говорить, что функция $f: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$, принадлежащая C^∞ , является *медленно осциллирующей в нуле*, если $\sup_{r \in (0, \varepsilon)} |(r d/dr)^k f(r)| < \infty$ для

$k = 0, 1, 2, \dots$ и $\lim_{r \rightarrow 0} r f'(r) = 0$. Примером функции, которая медленно осциллирует в нуле, может служить функция $f(r) = g(\log(-\log r))$, где g принадлежит пространству $C_b^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных вместе со всеми производными.

Пусть Γ — сложная кривая и $t_0 \in \mathcal{F}$. Будем говорить, что Γ *медленно осциллирует* в точке t_0 , если существует $\varepsilon > 0$, такое, что часть $\Gamma(t_0, \varepsilon) = \{t \in \Gamma : |t_0 - t| < \varepsilon\} = \{t_0\} \cup \Gamma_{t_0 1} \cup \dots \cup \Gamma_{t_0 n_{t_0}}$ кривой Γ такова, что

$$\Gamma_{t_0 j} = \{z \in \mathbb{C} : z = t_0 + r e^{i\varphi_{t_0, j}(r)}, r \in (0, \varepsilon), j = 1, \dots, n_{t_0}\},$$

где $\varphi_{t_0, j}(r) = \theta_{t_0}(r) + \theta_{t_0 j}(r)$, $\theta_{t_0}, \theta_{t_0 1}, \dots, \theta_{t_0 n_{t_0}}$ — вещественнозначные C^∞ -функции, такие, что

$$0 \leq m_1 < \theta_{t_0 1}(r) < M_1 < m_2 < \theta_{t_0 2}(r) < M_2 < \dots < m_{n_{t_0}} < \theta_{t_0 n_{t_0}}(r) < M_{n_{t_0}} < 2\pi$$

для всех $r \in (0, \varepsilon)$ с некоторыми m_j, M_j (вообще говоря, зависящими от t_0). Мы предполагаем, что функции $r\theta'_{t_0}(r), r\theta'_{t_0 1}(r), \dots, r\theta'_{t_0 n_{t_0}}(r)$ медленно осциллируют в нуле.

Например, если $\theta_{t_0}(r) + \theta_{t_0 j}(r) = \delta_{t_0} \log r + \mu_{t_0 j}$ ($j = 1, \dots, n_{t_0}$) и $0 \leq \mu_{t_0 1} < \mu_{t_0 2} < \dots < \mu_{t_0 n_{t_0}} < 2\pi$, то приведенные выше предположения выполняются.

Сложную кривую, медленно осциллирующую в каждом узле, будем называть *медленно осциллирующей сложной кривой*. Класс медленно осциллирующих сложных кривых в дальнейшем обозначается через $\mathcal{C}_{SO}$. Принимая во внимание, что $|d(re^{i\varphi(r)})| = \sqrt{(1 + (r\varphi'(r))^2} dr$, нетрудно увидеть, что медленно осциллирующая сложная кривая является *карлессоновской кривой* (см. [1, с. 2]).

Пусть $p: \Gamma \rightarrow (1, \infty)$ — измеримая функция, $1 < p_- \leq p(t) \leq p_+ < \infty, t \in \Gamma$, и $|p(t) - p(\tau)| \leq A / \log \frac{1}{|t - \tau|}$ для любых точек $t, \tau \in \Gamma \setminus \mathcal{F}$, таких, что $|t - \tau| < 1/2$. Если $t_0 \in \mathcal{F}$, то мы будем предполагать, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что функция $p_{t_0 j}(r) = p(t_0 + r e^{i\varphi_{t_0, j}(r)}) = p_{t_0}(r)$, $r \in (0, \varepsilon)$, не зависит от j и $p_{t_0}(r)$ удовлетворяет условиям $|p_{t_0}(r) - p_{t_0}(\rho)| \leq A / \log \frac{1}{|\log(r/\rho)|}$ для $1/\sqrt{e} \leq r/\rho \leq \sqrt{e}$, и $|p_{t_0}(r) - p_{t_0}(0)| \leq C / \log(2 + |\log r|)$, $r, \rho \in (0, \varepsilon)$. Из этих условий следует, что $p_{t_0}(\cdot)$ — непрерывная функция в нуле и $\lim_{r \rightarrow +0} p_{t_0}(r) = p_{t_0}(0) = p(t_0)$. Будем обозначать через $\mathcal{P}(\Gamma)$ класс переменных показателей, удовлетворяющих приведенным выше условиям.

Пусть $w: \Gamma \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция, называемая в дальнейшем *весом*. Весовое пространство Лебега $L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ с переменным показателем $p(\cdot)$ определяется посредством модуляра $I^p(w, f) := \int_\Gamma |w(\tau) f(\tau)|^{p(\tau)} |d\tau| < \infty$ и нормы $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)} = \inf\{\lambda > 0 : I^p(w, f/\lambda) \leq 1\}$. Мы рассматриваем веса на $\mathbb{R}_+$, имеющие форму $w(r) = \exp v(r)$, где функция $\varkappa_w(r) = r v'(r)$ медленно осциллирует, и обозначаем класс таких весов через $\mathcal{R}$. Положим $\varkappa_w^+ = \limsup_{r \rightarrow 0} \varkappa_w(r)$, $\varkappa_w^- = \liminf_{r \rightarrow 0} \varkappa_w(r)$. Пусть $w: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$ — вес на кривой Γ . Мы предполагаем, что для каждой точки $t_k \in \mathcal{F}$ существует окрестность U_k , такая, что w и w^{-1} принадлежат $L^\infty(\Gamma \setminus \bigcup_{t_k \in \mathcal{F}} (\Gamma \cap U_k))$. Мы говорим, что вес w медленно осциллирует, если для каждой точки $t_0 \in \mathcal{F}$ и для каждого $j \in \{1, \dots, n_{t_0}\}$ функция $w_{t_0}(r) = w(t_0 + r e^{i\varphi_{t_0, j}(r)}) = e^{v_{t_0}(r)}$, $r \in (0, \varepsilon)$, не зависит от j и $w_{t_0}(r)$ есть вес, принадлежащий $\mathcal{R}$. Обозначим через $\mathcal{A}_{p(\cdot)}(\Gamma)$ класс медленно осциллирующих весов, таких, что $-1/p(t_k) < \varkappa_{w_{t_k}}^- \leq \varkappa_{w_{t_k}}^+ < 1 - 1/p(t_k)$ для любой точки $t_k \in \mathcal{F}$.

Функция $a: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ называется *медленно осциллирующей* на Γ , $a \in PSO(\Gamma)$, если $a \in C^\infty(\Gamma \setminus \mathcal{F})$ и для каждого узла $t_0 \in \mathcal{F}$ функция $a(t_0 + re^{i\varphi_{t_0,j}(r)}) = a_{t_0,j}(r)$, $r \in (0, \varepsilon)$, $j \in \{1, \dots, n_{t_0}\}$, медленно осциллирует в точке $r = 0$.

Сингулярный интегральный оператор Коши на кривой Γ определяется как

$$(S_\Gamma f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t_0, \varepsilon)} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть $\Gamma \in \mathcal{CSO}$, $w \in \mathcal{A}_p(\cdot)(\Gamma)$, $p \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Тогда оператор $S_\Gamma: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ ограничен.

3. Фредгольмовость. Можно доказать, что оператор $S_\Gamma: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ является оператором локального типа в смысле Симоненко. Это означает, что для любых функций $\varphi, \psi \in C^\infty(\Gamma)$, таких, что $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$, оператор $\varphi S_\Gamma \psi I: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ компактен. Будем говорить, что $A: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ локально обратим в точке $t_0 \in \Gamma$, если существует окрестность U_{t_0} точки t_0 и ограниченные операторы $\mathcal{L}_{t_0}$, $\mathcal{R}_{t_0}$, такие, что $\mathcal{L}_{t_0} A \chi_{U_{t_0}} I = \chi_{U_{t_0}} I$ и $\chi_{U_{t_0}} A \mathcal{R}_{t_0} = \chi_{U_{t_0}} I$.

Предложение (локальный принцип Симоненко ([15], [14])). Оператор локального типа $A: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ является фредгольмовым оператором тогда и только тогда, когда он локально обратим в каждой точке $t \in \Gamma$.

Замечание 1. Отметим, что локальный принцип Симоненко был доказан в [15] для операторов, действующих в пространствах L^p с постоянным показателем. Однако он остается справедливым также для операторов, действующих в $L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$.

Введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата заметки.

(i) Пусть $t_0 \in \mathcal{F}$. Положим $\varepsilon_k = 1$, если t_0 — начальная точка простой ориентированной кривой $\Gamma_{t_0 k}$, и пусть $\varepsilon_k = -1$, если t_0 — конечная точка этой кривой. Определим отображение $\nu: [0, 2\pi) \times (\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ формулой

$$\nu(\delta, z) = \begin{cases} \text{cth}(\pi z), & \delta = 0, \\ e^{(\pi - \delta)z} / \text{sh}(\pi z), & \delta \in (0, 2\pi), \end{cases}$$

и пусть

$$s_{jk}^{t_0}(r, z) = \begin{cases} \varepsilon_k \nu(2\pi + \theta_{t_0 j}(r) - \theta_{t_0 k}(r), z), & j < k, \\ \varepsilon_k \nu(0, z), & j = k, \\ \varepsilon_k \nu(\theta_{t_0 j}(r) - \theta_{t_0 k}(r), z), & j > k. \end{cases} \quad (2)$$

Положим

$$\hat{\sigma}_{t_0}(S_\Gamma)(r, z) = \left(s_{jk}^{t_0} \left(r, \frac{z + i(1/p(t_0) + \varkappa_w(r))}{1 + ir\theta'_{t_0}(r)} \right) \right)_{j,k=1}^{n_{t_0}}, \quad (r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (3)$$

(ii) Если $a \in PSO(\Gamma)$, то $\hat{\sigma}_{t_0}(aI) = \text{diag}(a_{t_0,1}(r), \dots, a_{t_0,n_{t_0}}(r))$.

(iii) Пусть $t_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{F}$. Тогда $\hat{\sigma}_{t_0}(S_\Gamma) = \text{sign } \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\sigma}_{t_0}(aI) = a(t_0)$.

(iv) Если $A = aI + bS_\Gamma$, то $\hat{\sigma}(A^{t_0}) = \hat{\sigma}_{t_0}(aI) + \hat{\sigma}_{t_0}(bI)\hat{\sigma}_{t_0}(S_\Gamma)$.

Теорема 2. Пусть $A = aI + bS_\Gamma$, $a, b \in PSO(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathcal{C}_{SO}$, $w \in \mathcal{A}_{p(\cdot)}(\Gamma)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Тогда $A: L^{p(\cdot)}(\Gamma, w) \rightarrow L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$ является фредгольмовым оператором в том и только в том случае, когда

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} |\det \hat{\sigma}(A^t)(r, \lambda)| > 0 \quad (4)$$

для каждой точки $t \in \mathcal{F}$ и

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad (5)$$

для каждой точки $t \in \Gamma \setminus \mathcal{F}$.

Фредгольмов индекс оператора A определяется формулой

$$\text{index } A = - \sum_{j=1}^K \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} \right]_{t \in \Gamma_j} - \sum_{j=1}^L \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} [\arg \det \sigma(A^{t_j})(r, z)]_{z=-\infty}^\infty, \quad (6)$$

где K есть число всех ориентированных простых кривых, формирующих сложную кривую Γ , а L — число всех ее узлов.

Доказательство теоремы 2 основывается на методах, развитых в статьях [2], [3], [12]. Эти методы сводят вопрос о локальной обратимости локальных представителей СИО в сингулярных точках кривой Γ к вопросу локальной обратимости псевдодифференциальных операторов Меллина с переменными символами. Применяя методы и результаты из [13], касающиеся ограниченности и фредгольмовости псевдодифференциальных операторов, действующих в весовых пространствах $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, w)$ с переменными показателями $p(\cdot)$, мы доказываем теорему 2.

Замечание 2. Условие (4) содержит все локальные характеристики СИО A в сингулярной точке t : характеристику вращения $r\theta'_t(r)$ кривой Γ в точке $t \in \mathcal{F}$, характеристики $\theta_{tj}(r)$ осцилляций кривых Γ_{tj} , формирующих узел $t \in \mathcal{F}$, характеристику $\varkappa_w(r)$ веса в точке $t \in \mathcal{F}$ и значение $p(t)$ переменного показателя в точке $t \in \mathcal{F}$. Если $t \in \Gamma \setminus \mathcal{F}$, то условие (5) не зависит от $p(\cdot)$ и совпадает с хорошо известным условием локальной обратимости СИО, действующих в пространствах $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, на кривых Ляпунова Γ и имеющих непрерывные коэффициенты.

Замечание 3. Результаты этой заметки переносятся на операторы $A_{NM} = \sum_{j=1}^N \prod_{k=1}^M A_{jk}$, где $A_{jk} = a_{jk}I + b_{jk}S_\Gamma$ и $a_{jk}, b_{jk} \in PSO(\Gamma)$, а также на операторы из банаховой алгебры, порожденной операторами A_{NM} , действующими в $L^{p(\cdot)}(\Gamma, w)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Progress in Math., vol. 154, Birkhauser, Basel, 1997. [2] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, V. S. Rabinovich, *J. Operator Theory*, **43**:1 (2000), 171–198. [3] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, V. S. Rabinovich, *Manuscripta Math.*, **95**:3 (1998), 363–376. [4] I. C. Gohberg, N. Ya. Krupnik, I. M. Spitkovsky, *Integral Equations Operator Theory*, **17**:3 (1993), 322–327. [5] A. Yu. Karlovich, in: *Operator Algebras, Operator Theory and Applications, Operator Theory Adv. Appl.*, vol. 195, Birkhäuser, Basel, 2010, 185–212. [6] A. Yu. Karlovich, in: *Topics in Operator Theory 1: Operators, Matrices*

and Analytic Functions, Operator Theory Adv. Appl., vol. 202, 2010, 321–336. [7] A. Yu. Karlovich, <http://arxiv.org/abs/1002.4813v1>. [8] V. Kokilashvili, S. Samko, Proc. A. Razmadze Math. Inst., **131** (2003), 61–78. [9] V. Kokilashvili, S. Samko, Proc. A. Razmadze Math. Inst., **138** (2005), 106–110. [10] V. Kokilashvili, V. Paataashvili, S. Samko, in: Operator Theory Adv. Appl., vol. 170 (dedicated to 70th birthday of Prof. I. B. Simonenko), Birkhäuser, Basel, 2007, 167–186. [11] V. Kokilashvili, N. Samko, S. Samko, Math. Nachr., **280**:9–10 (2007), 1145–1156. [12] В. С. Рабинович, Изв. РАН, сер. матем., **60**:6 (1996), 169–200. [13] V. Rabinovich, S. Samko, Integral Equations and Operator Theory, **60**:4 (2008), 507–537. [14] И. Б. Симоненко, Чинь Нгок Минь, *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость*, Изд-во Ростовского ун-та, 1986. [15] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**:3 (1965), 567–586; **29**:4 (1965), 757–782. [16] I. M. Spitkovsky, J. Funct. Anal., **105**:1 (1992), 129–143.

Национальный политехнический институт Мексики,
e-mail: vladimir.rabinovich@gmail.com

Поступило в редакцию
28 апреля 2010 г.

Университет Алгарве, Португалия
e-mail: ssamko@ualg.pt

УДК 515.16

Об эйлеровых характеристиках многообразий особенностей волновых фронтов*

© 2012. В. Д. СЕДЫХ

Все понятия и факты теории особенностей лежандровых отображений [1], которые мы здесь используем, кратко изложены в нашей предыдущей заметке [5].

Пусть B — гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n , E — гладкое $(2n-1)$ -мерное многообразие, снабженное контактной структурой, и $\rho: E \rightarrow B$ — лежандрово расслоение. Рассмотрим гладкое компактное (без края) лежандрово подмногообразие L в E и лежандрово отображение $f = \rho \circ i: L \rightarrow B$, где $i: L \rightarrow E$ — тождественное вложение. Образ $\mathcal{F} = f(L)$ отображения f называется (волновым) фронтом. Мы будем говорить, что утверждение, касающееся лежандровых отображений или их фронтов, справедливо для отображения f или фронта $\mathcal{F}$ общего положения, если оно имеет место для вложений i из некоторого открытого всюду плотного подмножества в пространстве всех вложений $i: L \rightarrow E$ (в C^∞ -топологии).

При $n \leq 6$ особенности отображения f общего положения лежандрово эквивалентны особенностям в нуле отображения

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\bar{t}, \bar{q}) \mapsto \left(-S(\bar{t}, \bar{q}) + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial \bar{t}} S(\bar{t}, \bar{q}), \bar{q} \right),$$

где $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\bar{q} = (q_{k+1}, \dots, q_{n-1})$, а $S = S(\bar{t}, \bar{q})$ — гладкая функция одного из следующих типов (μ целое):

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00388.