Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Крюкова, Об округлениях в топологических
частично упорядоченных пространствах, *Функци.
анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3063>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:28:42

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений*, КомКнига (URSS), М, 2005. [2] J. Saint Raymond, C. R. Acad. Sci. Paris, **298** (1984), 71–74. [3] Б. Д. Гельман, Функциональный анализ и его прил., **42:3** (2008), 78–81.

Воронежский государственный университет
e-mail: gelman@func.vsu.ru

Поступило в редакцию
19 мая 2010 г.

УДК 517.984

Об округлениях в топологических частично упорядоченных пространствах

© 2012. А. Л. Крюкова

1. Введение. В практике компьютерных вычислений одна из наиболее часто встречающихся операций — это округление (промежуточных) результатов. Истоки аксиоматической теории округлений содержатся в работе Кулиша [4], в которой он определил их как отображения линейно упорядоченного множества в его подмножество, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям (аксиомам). Понятие интервального округления было сформулировано и систематически изучалось в работах [2], [3]. В данной работе интервальные округления изучаются в рамках общей теории топологических частично упорядоченных пространств. Мы устанавливаем некоторые общие свойства округлений, (частично) характеризуем их в классе изотонных отображений, изучаем способы их описания и, в частности, для интервальных округлений строим функциональную модель, позволяющую во многих случаях сводить изучение свойств округлений к чисто аналитическим вопросам.

2. Округления и их неподвижные точки. Напомним, что частично упорядоченное пространство называется решеткой, если любые два его элемента обладают точной нижней и точной верхней гранями. Решетка называется полной (условно полной), если точную верхнюю и точную нижнюю грани имеет каждое (соответственно каждое ограниченное) ее подмножество.

Мы будем называть упорядоченное пространство условно l -полным, если любое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

Для любого упорядоченного пространства $(X, \leq)$ обозначим через $IE(X)$ совокупность всех его отображений φ в себя, для которых 1) $x \leq \varphi(x)$ и 2) $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, если $x_1 \leq x_2$. Отображение $\varphi \in IE(X)$ называется (*верхним*) *округлением* (или замыканием [1]), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию 3) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Округления φ и ψ в пространствах $(X, \leq)$ и $(Y, \leq)$ назовем *эквивалентными*, если существует сохраняющая порядок биекция $f: X \rightarrow Y$, такая, что

$$f(\varphi(x)) = \psi(f(x)) \quad (1)$$

для любого $x \in X$.

Множество точек $x \in X$, для которых $\varphi(x) = x$, будем называть *множеством неподвижных точек округления* φ и обозначать через E_φ .

Теорема 1. *Округления φ и ψ на условно l -полных пространствах X и Y соответственно эквивалентны, если существует возрастающая биекция пространства X на Y , отображающая E_φ на E_ψ .*

Пусть G — некоторая группа автоморфизмов пространства $(X, \leq)$. Отображение φ называется *ковариантным* относительно G , если оно коммутирует с элементами из G , т.е. если $\varphi(T(x)) = T(\varphi(x))$ для всех $T \in G$. В частности, можно говорить о ковариантных округлениях.

Следствие 2. *Округление φ ковариантно относительно некоторой группы автоморфизмов тогда и только тогда, когда E_φ инвариантно относительно этой группы.*

Округление φ называется *идемпотентно аддитивным*, если для любых двух элементов $x, y \in X$, таких, что $x \vee y$ существует,

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y). \quad (2)$$

Следствие 3. *Пусть условно l -полное пространство X таково, что у любых двух элементов существует точная верхняя грань. Округление φ на X идемпотентно аддитивно тогда и только тогда, когда $x \vee y \in E_\varphi$ для любых $x, y \in E_\varphi$.*

Легко видеть, что множество $IE(X)$ является полугруппой относительно композиции, а множество $O(X)$ всех округлений — это множество всех идемпотентных элементов этой полугруппы. Следовательно, композиция двух округлений является округлением тогда и только тогда, когда эти округления перестановочны. Поэтому для изучения подполугрупп в $IE(X)$, состоящих из округлений, важно знать, какие округления перестановочны.

Следствие 4. *Два округления φ, ψ перестановочны тогда и только тогда, когда $\varphi(E_\psi) \subset E_\psi$ и $\psi(E_\varphi) \subset E_\varphi$.*

Пусть X — выпуклое подмножество линейного вещественного пространства $\mathcal{X}$, а упорядочение задается выпуклым конусом $\mathcal{K}$. В этих условиях $IE(X)$ обладает выпуклой структурой, т.е. является выпуклым подмножеством линейного пространства всех отображений из X в $\mathcal{X}$.

Теорема 5. *Всякое округление в $(X, \leq_{\mathcal{K}})$ является крайней точкой в $IE(X)$.*

3. Непрерывность снизу. Пусть в упорядоченном множестве $(X, \leq)$ задана топология. Одним из наиболее естественных условий согласованности ее с порядком является условие

(i) график порядка $\Gamma = \{(x, y) : x \leq y\}$ — замкнутое подмножество в $X \times X$.

Пространство $(X, \leq)$ называется *интервально компактным*, если выполнено условие

(k) Для любых $x, y \in X$ множество $I(x, y) = \{z : x \leq z \leq y\}$ является компактным.

Рассмотрим теперь условие, которое, будучи значительно сильнее условия (i), тем не менее, выполняется во многих важных примерах:

(ii) график порядка является замыканием своей внутренности.

Внутренность множества Γ определяет на X отношение $\prec$ «строгого» порядка (т.е. транзитивное, но не рефлексивное), порожденное отношением $\leq$:

$x \prec y$, если $(x, y) \in \text{int}(\Gamma)$. Другими словами, $x \prec y$, если существуют окрестности $U \ni x$, $V \ni y$, такие, что $x' \leq y'$ при любых $x' \in U$, $y' \in V$.

Удобно также «детализировать» отношение $\prec$, полагая $x \overset{1}{\prec} y$, если существует окрестность $U \ni x$, такая, что $x' \leq y$ для всех $x' \in U$, и, аналогично, $x \overset{2}{\prec} y$, если существует окрестность $V \ni y$, такая, что $x \leq y'$ для всех $y' \in V$. В ряде примеров (например, для аддитивно инвариантных порядков в линейных пространствах) эти отношения совпадают. Однако в общем случае приходится отдельно формулировать два условия:

(iii) для любого $y \in X$ множество всех x , таких, что $x \leq y$, является замыканием множества всех x , таких, что $x \overset{1}{\prec} y$;

(iv) для любого $x \in X$ множество всех y , таких, что $x \leq y$, является замыканием множества всех y , таких, что $x \overset{2}{\prec} y$.

Будем говорить, что $(X, \leq)$ является T -полурешеткой, если для любых двух элементов существует точная верхняя грань, для любого ограниченного сверху (снизу) подмножества существует точная верхняя (точная нижняя) грань и выполнены условия (i), (iii), (iv) и (k).

Примерами могут служить банаховы решетки, упорядоченные телесным конусом, а также их замкнутые выпуклые подрешетки. Другой класс примеров — условно полные решетки с порядковой топологией.

Естественный и включающий в себя все наиболее важные примеры класс округлений в топологических упорядоченных пространствах составляют непрерывные снизу, или l -непрерывные, округления, т. е. такие округления ψ , что $\psi(\lim x_n) = \lim \psi(x_n)$ для любой возрастающей сходящейся последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 6. *Округление на T -полурешетке $(X, \leq)$ l -непрерывно тогда и только тогда, когда множество $E = E_\varphi$ всех его неподвижных точек замкнуто.*

Если топология в T -полурешетке X задается равномерной структурой (как в случае линейно-топологических решеток или метрических решеток), то в $O(X)$ имеется топология равномерной сходимости на компактах, причем эта топология также равномерна. Возникает вопрос о полноте пространства округлений.

В постановке, не учитывающей топологические свойства пространства, ответ на него отрицателен уже в случае, когда $(X, \leq)$ — прямая с обычным порядком. Однако ситуация меняется, если ограничиться рассмотрением l -непрерывных округлений.

Теорема 7. *Пространство F_0 всех l -непрерывных округлений на метрической T -полурешетке полно.*

4. Округления на прямой. Рассмотрим в качестве исходного пространства $(X, \leq)$ вещественную прямую $\mathbb{R}$ с обычным порядком и топологией.

В рассматриваемом случае теорема 5 допускает обращение:

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех непрерывных слева неубывающих функций f на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $f(t) \geq t$. Функция $f \in \mathcal{F}$ является крайней точкой выпуклого множества $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $f(f(x)) = f(x)$.*

Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное пространство с метрикой ρ .

Будем говорить, что класс всех округлений на $(X, \leq)$ *устойчив по Хайерсу–Уламу* в классе $\mathcal{F} \subset IE(X)$ (см., например, [6]), если любое «почти идемпотентное» отображение из $\mathcal{F}$ близко к идемпотентному. Точная формулировка: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что если $f \in \mathcal{F}$ и $\rho(f(f(x)), f(x)) < \delta$ для всех x , то $\rho(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon$ для всех x , где φ — некоторое округление.

Теорема 9. *Класс всех l -непрерывных округлений на прямой устойчив по Хайерсу–Уламу в классе полунепрерывных отображений из $IE(\mathbb{R})$.*

Будем говорить, что два подмножества прямой M_1 и M_2 *перемежаются*, если из того, что между точками $x \in M_1$, $y \in M_2$ нет точек, принадлежащих $M_1 \cup M_2$, следует, что хотя бы одна из точек x, y принадлежит $M_1 \cap M_2$.

Теорема 10. *Пусть φ, ψ суть l -непрерывные верхние округления на $\mathbb{R}$. Для того чтобы они коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы множества E_φ и E_ψ перемежались.*

5. Интервальные округления. Процедура интервализации (см. [5]) сопоставляет любому упорядоченному пространству $(X, \leq)$ новое упорядоченное пространство $\text{Inter}(X)$, состоящее из всех пар $(x, y) \in X \times X$, таких, что $x \leq y$. Порядок на $\text{Inter}(X)$ вводится правилом

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2), \text{ если } x_2 \leq x_1, y_1 \leq y_2.$$

Мы будем записывать элементы из $\text{Inter}(X)$ в форме $[x, y]$, вместо (x, y) .

Предложение 11. *Если $(X, \leq)$ есть T -решетка, то $\text{Inter}(X)$ является T -полурешеткой.*

Округления на упорядоченном пространстве $\text{Inter}(X)$ называются *интервальными округлениями на $(X, \leq)$* .

В частности, $\text{Inter}(\mathbb{R})$ — это T -полурешетка замкнутых интервалов на прямой, причем порядок совпадает с теоретико-множественным включением. Естественно отождествлять интервал $[a, b]$ с точкой (a, b) координатной плоскости и в этом смысле говорить, например, о проекциях какого-то множества интервалов.

Мы получим описание интервальных округлений на прямой в терминах функциональной модели.

Теорема 12. *l -непрерывное интервальное округление задается выбором замкнутых подмножеств прямой A и B , неограниченных снизу и сверху соответственно, функции $\alpha: A \rightarrow (-\infty, +\infty]$, полунепрерывной сверху, и функции $\beta: B \rightarrow [-\infty, +\infty)$, полунепрерывной снизу, таких, что выполнены условия*

(i) *функция α (функция β) является неограниченной сверху (соответственно снизу) на любом множестве вида $\{x \in A : x < a\}$ (соответственно $\{y \in B : y > b\}$);*

(ii) $\alpha(x) \geq x, \beta(y) \leq y$;

(iii) $\alpha(\beta(y)) \geq y, \beta(\alpha(x)) \leq x$.

Множество неподвижных точек этого округления состоит из всех точек $(x, y) \in A \times B$, для которых $y \leq \alpha(x), x \geq \beta(y)$.

Набор $\chi = (A, B, \alpha, \beta)$, соответствующий округлению φ , называется его *функциональной моделью*.

В терминах функциональной модели удобно характеризовать важные специальные классы округлений. Укажем, например, как выделяется в этих терминах класс идемпотентно аддитивных округлений.

Предложение 13. Пусть φ есть l -непрерывное интервальное округление и (A, B, α, β) — его функциональная модель. Для того чтобы φ было идемпотентно аддитивным, необходимо и достаточно, чтобы функции α и β были убывающими.

Условие непрерывности позволяет значительно упростить функциональную модель.

Следствие 14. Непрерывное интервальное округление φ можно задавать условием

$$E_\varphi = \{(x, y) : y \geq \gamma(x), x \leq \delta(y)\}, \quad (3)$$

выбирая произвольные числа a, b и непрерывные невозрастающие функции γ, δ на $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, удовлетворяющие условиям

- (а) $\delta(\gamma(x)) \geq x, \gamma(\delta(y)) \leq y$;
- (б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = +\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} \delta(y) = -\infty$.

Автор выражает искреннюю признательность Т. Э. Каминскому за постановку задач и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Биркгоф, *Теория структур*, ИЛ, М., 1952. [2] Т. Е. Kaminsky, V. Kreinovich, Notes on intuitionistic fuzzy sets, **4:3** (1998), 57–64. [3] Т. Э. Каминский, в кн.: Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики, Русь, Вологда, 2000, 23–36. [4] U. Kulisch, Numer. Math., **18:1** (1971), 1–17. [5] G. L. Litvinov, *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction*, <http://arxiv.org/abs/math/0507014v1>. [6] Е. В. Шульман, J. London Math. Soc. (2), **54:1** (1996), 111–120.

Вологодский государственный педагогический университет
e-mail: kryukovanastya@yahoo.com

Поступило в редакцию
18 января 2010 г.

УДК 517.95

Сингулярные интегральные операторы в весовых пространствах Лебега с переменными показателями на сложных карлесоновских кривых

© 2012. В. С. РАБИНОВИЧ, С. Г. САМКО

Памяти профессора И. Б. Симоненко посвящается

1. Введение. В работе [15] И. Б. Симоненко впервые ввел локальный метод исследования фредгольмовости одномерных и многомерных сингулярных интегральных операторов (СИО). Посредством этого метода исследование фредгольмовости СИО $A = aI + bS_\Gamma$ с непрерывными коэффициентами a и b , действующих в $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, на кривых Ляпунова Γ , сводилось к исследованию локальных представителей оператора A в каждой точке $t_0 \in \Gamma$, являющихся простейшими операторами типа $A_{t_0} = a(t_0)I + b(t_0)S_{\mathbb{R}}$, действующими в $L^p(\mathbb{R})$. Этот метод был применен в [14] к СИО с кусочно непрерывными коэффициентами, действующими в пространствах $L^p(\Gamma, w)$ со степенным весом