Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Гончарук, Числа вращения и модули эллиптических кривых, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 1, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:33:28

Числа вращения и модули эллиптических кривых

© 2012. Н. Б. Гончарук

Памяти В. И. Арнольда

По заданному диффеоморфизму окружности f можно построить отображение, переводящее вещественное число a в число вращения диффеоморфизма $f + a$. В 1978 г. В. И. Арнольд предложил комплексный аналог этого отображения: каждое число z , $\text{Im } z > 0$, переходит в модуль $\mu(z)$ эллиптической кривой, которая строится по отображению $f + z$.

В предлагаемой статье исследовано поведение отображения μ вблизи отрезков вещественной оси, на которых число вращения диффеоморфизма $f + a$ рационально. В статье показано, что отображение μ аналитически продолжается во все внутренние точки таких отрезков, кроме, быть может, конечного числа исключительных точек. Вблизи исключительных точек и концов отрезка значение функции μ стремится к значению числа вращения отображения $f + a$.

Объединение образов таких отрезков вещественной оси под действием отображения μ — фрактальное множество в верхней полуплоскости, которое можно считать комплексным аналогом языков Арнольда.

§1. Введение

В разд. 1.1 этого параграфа описана основная конструкция — конструкция Арнольда, в разд. 1.2 сформулированы полученные результаты.

1.1. Конструкция Арнольда. В книге [2, §27, с. 185] В. И. Арнольд предложил конструкцию, связывающую диффеоморфизмы окружности с модулями эллиптических кривых. Мы приводим вариант этой конструкции, предложенный Р. М. Федоровым.

Рис. 1. Конструкция Арнольда

Пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ — аналитический диффеоморфизм окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, сохраняющий ориентацию (только такие диффеоморфизмы окружности мы будем рассматривать в дальнейшем). Пусть $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ — естественная проекция прямой на окружность, а $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — поднятие диффеоморфизма f на вещественную ось: $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Рассмотрим отображение $F + a + i\alpha$, где $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Это отображение переводит вещественную ось в прямую $\text{Im } z = \alpha$. Факторизуем окрестность

полосы $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \alpha$ по сдвигу $z \mapsto z + 1$ и отображению $F + a + i\alpha$ (точнее, по его аналитическому продолжению). Мы получим тор с индуцированной комплексной структурой, т. е. эллиптическую кривую $T_{a+i\alpha} = T_{F,a+i\alpha}$.

У тора $T_{a+i\alpha}$ есть двумя естественным образом выделенными образующими группы первых гомологий. Это петли, получившиеся после факторизации из отрезков $[0, 1]$ и $[0, F(0) + a + i\alpha]$. Значит, модуль эллиптической кривой $T_{a+i\alpha}$ с выделенными образующими — это корректно определенное комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости. Мы будем обозначать его через $\mu_F(a + i\alpha) = \mu(T_{F,a+i\alpha})$.

Замечание 1. Первоначально Арнольд [2] рассматривал только чисто мнимые сдвиги: $a = 0$.

1.2. Формулировки основных результатов. Вместе с описанной в предыдущем разделе конструкцией В. И. Арнольд сформулировал гипотезу о связи предельного поведения функции $\mu_F(i\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ с числом вращения диффеоморфизма f .

Гипотеза [2]. Если $\rho(f)$ — число вращения диффеоморфизма f — диофантово, то предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_F(i\alpha)$ существует и равен числу вращения диффеоморфизма f , соответствующему поднятию F :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_F(i\alpha) = \rho_F(f). \quad (1.1)$$

Объясним, почему это предположение естественно. Заметим, что если f — поворот окружности и $F(x) = x + c$, то $\mu_F(i\alpha) = c + i\alpha$ и равенство (1.1) верно. С другой стороны, если число вращения аналитического диффеоморфизма f диофантово, то диффеоморфизм f гладко сопряжен повороту в силу теоремы Йоккоза (см. [8]). Поэтому естественно ожидать, что равенство (1.1) будет выполнено и в этом случае.

Гипотеза Арнольда была доказана В. С. Молдавским в статье [3].

Возникает естественный вопрос: верно ли равенство (1.1) в случае, когда число вращения не диофантово? Например, в случае рационального числа вращения, когда у диффеоморфизма f есть периодическая орбита?

В статье [4] Ильяшенко и Молдавский показали, что для большинства диффеоморфизмов с рациональным числом вращения (а именно, для гиперболических диффеоморфизмов) равенство (1.1) не выполнено.

Напомним, что периодическая орбита диффеоморфизма окружности называется *гиперболической*, если ее мультипликатор отличен от 1, и *параболической* в противном случае. Диффеоморфизм окружности называется *гиперболическим*, если у него есть периодические орбиты и все они гиперболические.

Теорема 1.1 [4]. Пусть f — гиперболический диффеоморфизм окружности. Тогда число $\mu_F(i\alpha)$ отделено от вещественной оси при $\alpha \rightarrow 0$.

Эти результаты касаются поведения отображения $\mu_F(i\alpha)$, которое первоначально рассматривал Арнольд, — отображения модулей в однопараметрическом семействе эллиптических кривых $T_{i\alpha}$. Федоров предложил расширить семейство эллиптических кривых до двухпараметрического и рассмотреть отображение $\mu_F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ верхней полуплоскости в себя.

Такое обобщение оправдано тем, что отображение μ_F оказывается голоморфным. Утверждение о голоморфности отображения модулей (см. предло-

жение 2.2) является частным случаем теоремы Э. Рислера [6, гл. 2, предложение 2], формулировку которой мы приведем позже (см. теорему 2.1). Теорема Рислера, в свою очередь, следует из теоремы Альфорса–Берса о выпрямлении конформных структур, зависящих от параметра.

Основными результатами этой статьи являются следующие две теоремы. Первую из них мы докажем в §2, а вторую — в §3.

Теорема 1.2. *Отображение μ_F аналитически продолжается в окрестность каждой точки $a_0 \in \mathbb{R}$, для которой отображение $f + a_0$ гиперболическое.*

Доказательство этой теоремы существенным образом использует конструкцию, предложенную Ксавье Бюффом в устной беседе с Ю. С. Ильяшенко.

Теорема 1.3. *Пусть f — аналитический диффеоморфизм окружности, имеющий изолированные периодические орбиты. Пусть, кроме того, хотя бы одна из периодических орбит диффеоморфизма f является параболической. Тогда модуль $\mu_F(i\alpha)$ стремится к числу вращения $\rho(f)$ при $\alpha \rightarrow 0$:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_F(i\alpha) = \rho(f).$$

Теорема 1.3 была впервые доказана Ж. Лакруа, однако его доказательство не опубликовано. Доказательство, приведенное в этой статье, существенно отличается от доказательства Лакруа.

Рис. 2. Предполагаемые образы (под действием отображения μ_F) отрезков вещественной оси, на которых число вращения $\rho(f + a)$ рационально

Пользуясь теоремой 1.2, можно определить новое фрактальное множество, связанное с диффеоморфизмом окружности.

Рассмотрим множество пределов $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_F(a + i\alpha)$ для гиперболических диффеоморфизмов $f + a$. Это множество отражает предельное поведение отображения μ_F вблизи вещественной оси. По теореме 1.2 такое множество — это объединение не более чем счетного числа аналитических кривых в верхней полуплоскости. Это фрактальное множество в каком-то смысле является комплексным аналогом языков Арнольда.

Структуру этого фрактального множества может прояснить следующее утверждение.

Теорема 1.4 (К. Бюфф, Н. Б. Гончарук). *Отображение μ_F продолжается до непрерывного отображения замкнутой верхней полуплоскости в себя.*

На вещественной оси рассмотрим отрезки (a_1^k, a_2^k) , $k \in \mathbb{N}$, для каждого из которых все отображения $f + a$, $a \in (a_1^k, a_2^k)$, являются гиперболическими, а отображения $f + a_1^k$, $f + a_2^k$ имеют параболические орбиты. Тогда образ $\mu_F(\mathbb{R})$ — это объединение вещественной оси и счетного числа аналитических

кривых $\mu_F([a_1^k, a_2^k])$, концы каждой из которых совпадают с точкой $\rho(f + a)$, $a \in [a_1^k, a_2^k]$, а остальные точки лежат в верхней полуплоскости.

Доказательство этой теоремы недавно получено К. Бюффом и автором этой статьи. Подробный текст доказательства готовится к публикации.

Таким образом, $\mu_F(\mathbb{R})$ — это объединение вещественной оси и нашего фрактального множества. Фрактальное множество является счетным набором аналитических кривых, которые начинаются и заканчиваются в рациональных точках вещественной оси. Схематически это множество изображено на рис. 2.

Остаются открытыми вопросы о геометрической структуре этого фрактального множества:

- Пересекаются ли кривые, соответствующие разным значениям числа вращения?
- Могут ли они самопересекаться?
- Под каким углом такая кривая подходит к вещественной оси?
- Как геометрически устроено «гнездо» таких кривых, которые соответствуют одному и тому же значению числа вращения?

§ 2. Аналитическая продолжаемость отображения μ_F в окрестности точек вещественной оси

В этом параграфе доказана теорема 1.2.

При доказательстве этой теоремы мы будем считать, что $a_0 = 0$; случай $a_0 \neq 0$ сводится к случаю $a_0 = 0$ заменой отображения f на отображение $f + a_0$.

Доказательство теоремы существенным образом использует конструкцию, предложенную Ксавье Бюффом. Эта конструкция описана в разд. 2.1. Похожей конструкцией пользовался Рислер, см. [6, гл. 2].

В разд. 2.2 приведено доказательство теоремы 1.2 по модулю вспомогательных лемм. В разд. 2.3 собраны необходимые леммы.

2.1. Конструкция Бюффа. Пусть f — гиперболическое отображение с числом вращения p/q , а F — его поднятие на вещественную ось. Рассмотрим полосу $\Pi = \{-\varepsilon < \operatorname{Im} z < \varepsilon\}$, в которую аналитически продолжается отображение F . Аналитическое продолжение отображения F мы также будем обозначать через F . Пусть $\{A_i\}$ — множество всех поднятий точек притягивающих периодических орбит отображения f на прямую, $\{R_i\}$ — множество всех поднятий точек отталкивающих орбит отображения f .

Рис. 3. Конструкция Бюффа для отображения f , имеющего один гиперболический аттрактор $\pi(A)$ и один гиперболический репеллер $\pi(R)$

Рассмотрим кривую γ и комплексное число $a + i\alpha$, удовлетворяющие следующим пяти требованиям (существование таких кривых следует из леммы 2.3, доказанной ниже).

1. Кривая γ инвариантна относительно целочисленных сдвигов $z \mapsto z + n$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\gamma \in \Pi$.
3. Кривая γ обходит все точки из $\{R_i\}$ сверху, а все точки из $\{A_i\}$ — снизу.
4. $F(\gamma) + a + i\alpha$ — несамопересекающаяся кривая, не пересекающая γ .
5. Кривая $F(\gamma) + a + i\alpha$ расположена выше кривой γ .

Тогда определена криволинейная полоса, заключенная между кривой γ и ее образом $F(\gamma) + a + i\alpha$. Факторизуем окрестность этой полосы по сдвигу $z \mapsto z + 1$ и по отображению $F + a + i\alpha$. Мы вновь, как и в конструкции Арнольда, получим тор с индуцированной комплексной структурой.

Таким образом, по диффеоморфизму F , кривой γ и числу $a + i\alpha$ мы построили эллиптическую кривую, которую мы будем обозначать через $B(\gamma, a + i\alpha)$ (см. рис. 3). Модуль получившейся эллиптической кривой мы будем обозначать через $\nu(\gamma, a + i\alpha)$.

Замечание 2. Петля на торе $B(\gamma, a + i\alpha)$, полученная из γ после факторизации, является естественным образом выделенной образующей группы первых гомотопий. Значит, $\nu(\gamma, a + i\alpha)$ — комплексное число в верхней полуплоскости, корректно определенное с точностью до целочисленных сдвигов.

Заметим, что конструкция Арнольда является предельным случаем конструкции Бюффа, когда кривая γ стремится к вещественной оси. Но у конструкции Бюффа есть существенное преимущество: полученная эллиптическая кривая может быть определена при $\alpha = 0$.

2.2. Доказательство теоремы 1.2 по модулю вспомогательных лемм.

Пусть f — гиперболический диффеоморфизм окружности, а F — его поднятие на вещественную ось. Мы докажем, что при данном значении $a + i\alpha$ кривую γ можно выбрать настолько близкой к вещественной оси, что эллиптическая кривая Арнольда будет совпадать с эллиптической кривой Бюффа.

Эллиптическая кривая Арнольда получена факторизацией полосы $\Pi = \{-\varepsilon < \operatorname{Im} z < \alpha + \varepsilon\}$ по двум голоморфным отображениям: сдвигу $z \mapsto z + 1$ и отображению $F + a + i\alpha$. Здесь ε — достаточно маленькое число, зависящее от $a + i\alpha$.

Пусть кривая γ удовлетворяет требованиям 1–5 из разд. 2.1 для числа $a + i\alpha$, причем она настолько близка к вещественной оси, что $\gamma \in \Pi$, $F(\gamma) + a + i\alpha \in \Pi$. Тогда фактормножество полосы Π по действию сдвига $z \mapsto z + 1$ и отображения $F + a + i\alpha$ является одновременно и кривой Арнольда, и кривой Бюффа.

В частности, для такой кривой выполнено равенство

$$\nu(\gamma, i\alpha) = \mu_F(i\alpha). \quad (2.1)$$

Заметим, что кривая γ зависит от α , и естественно ожидать, что при малых α она должна быть близка к вещественной оси.

В лемме 2.3 будет построено семейство кривых γ_t . Эти кривые непрерывно зависят от параметра $t \in (0, \tau]$ и стремятся к вещественной оси при $t \rightarrow 0$, а эллиптические кривые Бюффа $B(\gamma_t, i\alpha)$ определены при всех $\alpha \geq 0$ (в том числе определены кривые $B(\gamma_t, 0)$). По лемме 2.4 в таком семействе модули Бюффа не зависят от выбора кривой: $\nu(\gamma_{t_1}, i\alpha) = \nu(\gamma_{t_2}, i\alpha)$ для любых $t_1, t_2 \in (0, \tau]$.

В качестве кривой γ в равенстве (2.1) возьмем кривую $\gamma_{t(\alpha)}$ из семейства γ_t , достаточно близкую к вещественной прямой.

Получим, что для достаточно малых $\alpha > 0$ и любого значения $t_0 \in (0, \tau]$

$$\mu_F(i\alpha) = \nu(\gamma_{t_0(\alpha)}, i\alpha) = \nu(\gamma_{t_0}, i\alpha).$$

Параметр t_0 уже не зависит от α .

В лемме 2.2 мы покажем, что отображение модулей μ_F голоморфно в верхней полуплоскости, а отображение $\nu(\gamma, \cdot)$ — вблизи каждой точки своей области определения. Напомним, что функция $\nu(\gamma_{t_0}, \cdot)$ определена (а значит, голоморфна) в нуле и совпадает с отображением модулей μ_F на вертикальном интервале $(0, i\varepsilon)$. Следовательно, она является аналитическим продолжением функции μ_F в некоторую окрестность нуля. Теорема доказана.

Замечание 3. Значение предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_F(i\alpha) = \nu(\gamma_{t_0}, 0)$ — модуль эллиптической кривой $B(\gamma_{t_0}, 0)$, а значит, лежит в верхней полуплоскости. Это дает еще одно доказательство теоремы 1.1.

2.3. Вспомогательные утверждения о конструкции Бюффа. При доказательстве теоремы 1.2 мы использовали утверждение о голоморфности отображения модулей. Оно следует из теоремы Рислера (см. [6, гл. 2, предложение 2]).

Теорема 2.1 [6]. Пусть F_λ — семейство аналитических отображений, аналитически зависящих от λ и определенных в окрестности вещественной оси, причем $F_\lambda(z+1) = F_\lambda(z) + 1$. Пусть кривая γ инвариантна относительно целочисленных сдвигов, а ее образ под действием F_{λ_0} лежит выше нее. Факторизуем окрестность криволинейной полосы Π_λ , заключенной между γ и $F_\lambda(\gamma)$, $\lambda \approx \lambda_0$, по отображениям F_λ и $z \mapsto z+1$. Тогда модуль полученной эллиптической кривой τ_λ , а также униформизирующее отображение для этой кривой $\Psi_\lambda: \Pi_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Psi_\lambda \circ F(z) = \Psi_\lambda(z) + \tau_\lambda, \quad \Psi_\lambda(z+1) = \Psi_\lambda(z) + 1, \quad \Psi_\lambda(0) = 0,$$

аналитически зависят от λ .

Ясно, что конструкция Арнольда и конструкция Бюффа являются частными случаями описанной конструкции. Заметим, что свойства 1–5 в определении эллиптической кривой Бюффа $B(\gamma, a+i\alpha)$ сохраняются при малом изменении $a+i\alpha$. Значит, если кривая Бюффа определена для некоторого числа $a+i\alpha$, то она определена и для его окрестности. Поэтому из теоремы Рислера мы получаем такое следствие:

Предложение 2.2 (голоморфность отображения модулей). Значение $\mu_F(a+i\alpha)$ голоморфно зависит от $a+i\alpha$.

Для любой кривой γ значение $\nu(\gamma, a+i\alpha)$ голоморфно зависит от $a+i\alpha$ в любой точке, в которой определено.

В следующей лемме мы построим семейство кривых γ_t , стремящихся к вещественной оси, для которых эллиптическая кривая Бюффа определена.

Лемма 2.3. Пусть f — гиперболическое отображение окружности, а F — его поднятие на вещественную ось. Рассмотрим полосу $\Pi = \{z \mid -\varepsilon < \operatorname{Im} z < \varepsilon\}$, в которую аналитически продолжается отображение F . Тогда существует семейство кривых γ_t , $t \in (0, \tau]$, на плоскости, обладающее следующими свойствами:

1. Это семейство непрерывно (в топологии C^0) зависит от t .
2. Кривые γ_t принадлежат полосе Π и в топологии C^0 стремятся к вещественной оси при $t \rightarrow 0$.
3. Для любой кривой γ_t эллиптическая кривая Бюффа определена при $a = 0$ и любом $\alpha \geq 0$.

Наибольшую сложность при доказательстве леммы представляет доказательство п. 4 из разд. 2.1.

Доказательство. Пусть $\rho(f) = p/q$. Если $\rho(f) = 0$, положим $p = 0$, $q = 1$.

Построим набор точек $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$, в которых кривые γ_t будут пересекать вещественную ось. Этот набор не будет зависеть от t .

Если $\rho(f) = 0$, возьмем по одной точке $y_i \in S^1$ между каждыми двумя соседними неподвижными точками отображения f . Все точки $\pi^{-1}(y_i)$ образуют набор $\{x_i\}$.

Пусть $\rho(f) \neq 0$. Пусть $\{A_i^1\}$ и $\{R_i^1\}$ — соседние притягивающая и отталкивающая периодические орбиты отображения f , причем дуги (A_i^1, R_i^1) не содержат точек периодических орбит отображения f . Возьмем точку $y_1 \in [A_1^1, R_1^1] \subset S^1$. Будем последовательно выбирать точки y_i так, чтобы

$$d(y_i, A_i^1) > d(f(y_{i-1}), A_i^1), \quad d(y_i, f(y_{i-1})) < \varepsilon, \quad i = 2, 3, \dots, q-1, \quad (2.2)$$

где d — расстояние вдоль окружности.

Если число ε взято достаточно маленьким, то точки y_i близки к точкам $f^i(y_1)$ (но сдвинуты в сторону репеллеров: $y_i \in (f(y_{i-1}), R_i^1)$). Тогда $d(y_1, A_1^1) > d(f(y_{q-1}), A_1^1)$, т.е. равенство (2.2) выполнено и для $i = 1$. Действительно, $d(y_1, A_1^1) > d(f^q(y_1), A_1^1)$, а расстояние $d(f(y_{q-1}), f^q(y_1))$ мало.

Все прообразы $\pi^{-1}(y_i)$ включим в искомый набор $\{x_i\}$ и проведем аналогичную процедуру для всех пар соседних периодических орбит отображения f . Набор $\{x_i\} = \gamma_t \cap \mathbb{R}$ построен.

Построим систему карт в окрестности вещественной прямой, в которых отображение F линейно.

Пусть $\{b_1^1, \dots, b_q^1\}$ — периодическая орбита отображения f с множителем λ . Тогда $(F^q - k)(b_i^1) = b_i^1$ для некоторого целого числа k . В окрестности точки $b_1^1 \in \mathbb{R}$ рассмотрим аналитическую карту $z_{b_1^1}$, которая линеаризует отображение $F^q - k$ и сохраняет вещественную ось. Такая карта существует по классической теореме Шрёдера–Кёнига (см. [10], [11], [9], а современное доказательство см. в [5, гл. 1, разд. 5D]).

В окрестностях точек $b_1^1 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, возьмем карты, отличающиеся от $z_{b_1^1}$ сдвигом на n .

В окрестностях точек $b_i^1 + l$, $i \neq 1$, возьмем такие карты $z_{b_i^1}$, чтобы отображение F в картах $z_{b_i^1}$ (в прообразе) и $z_{b_{i+1}^1}$ (в образе) действовало умножением на $\sqrt[q]{\lambda}$. Тогда отображение F в картах $z_{b_q^1}$ (в прообразе) и $z_{b_1^1}$ (в образе) тоже будет действовать умножением на $\sqrt[q]{\lambda}$.

Такое построение проведем для всех периодических орбит отображения f . Распространим каждую карту $z_{b_m^1}$ из окрестности периодической точки в окрестность отрезка вещественной прямой, пользуясь итерациями отображения $F^q - k$, так, чтобы в точках из набора $\{x_i\}$ соседние карты перекрывались.

Таким образом, в окрестности вещественной оси возникает атлас карт, в которых отображение F линейно.

Теперь построим семейство кривых γ_t (см. рис. 4).

Рис. 4. Кривая γ_t и ее образ; $p/q = 1/2$. В действительности при малых t кривая расположена гораздо ближе к вещественной прямой

В каждой из карт $z_{b_j^1}$, соответствующих точкам периодической орбиты $\{b_1^1, \dots, b_q^1\}$, возьмем по дуге окружности $\Gamma_t^{b_j^1}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- концы дуги $\Gamma_t^{b_j^1}$ — ближайшие к b_j^1 (слева и справа) точки набора $\{x_i\}$;
- в системах координат $z_{b_j^1}$ дуги $\Gamma_t^{b_j^1}$ подобны;
- радиусы дуг непрерывно зависят от t и стремятся к бесконечности при $t \rightarrow 0$;
- дуги лежат ниже вещественной оси, если периодическая орбита $\{b_j^1\}$ притягивает, и выше — если отталкивает.

Пусть орбита $\{b_1^1, \dots, b_q^1\}$ притягивающая. Рассмотрим дуги $F(\Gamma_t^{b_j^1})$ и $\Gamma_t^{b_{j+1}^1}$. Для концов этих дуг выполнено равенство (2.2). Это значит, что оба конца дуги $\Gamma_t^{b_{j+1}^1}$ расположены ближе к точке b_{j+1}^1 , чем концы дуги $F(\Gamma_t^{b_j^1})$. Но эти дуги подобны в карте $z_{b_{j+1}^1}$, так как дуги $\Gamma_t^{b_j^1}$ и $\Gamma_t^{b_{j+1}^1}$ подобны в картах $z_{b_j^1}$ и $z_{b_{j+1}^1}$, а отображение F в этих картах линейно. Значит, дуги не пересекаются. Так как обе дуги лежат ниже вещественной оси, то образ дуги $\Gamma_t^{b_j^1}$ под действием отображения F лежит выше дуги $\Gamma_t^{b_{j+1}^1}$. Случай отталкивающей орбиты рассматривается аналогично, и в этом случае образ дуги $\Gamma_t^{b_j^1}$ под действием отображения F тоже лежит выше дуги $\Gamma_t^{b_{j+1}^1}$.

Заметим также, что дуги и их образы стремятся к вещественной прямой в метрике C^1 (а не только C^0). Значит, при достаточно малом t они однозначно проектируются на вещественную ось в исходной карте.

Такое построение проведем для всех периодических орбит отображения f . Мы получим семейство кривых γ_t , которые являются объединениями всех дуг, построенных для всех периодических орбит отображения f .

По построению для семейства γ_t при малых t первое и второе утверждения леммы выполнены. Проверим третье утверждение, т. е. пять свойств из разд. 2.1. Первые три из них очевидны.

Четвертое и пятое свойство достаточно проверить для $\alpha = 0$: действительно, кривая $F(\gamma_t) + i\alpha$ лежит выше кривой $F(\gamma_t)$, так как $F(\gamma_t)$ однозначно проектируется на вещественную ось.

Вблизи вещественной прямой отображение F инъективно, так как аналитическое продолжение отображения $F^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обратно к F . Значит, образ $F(\gamma_t)$ (а также $F(\gamma_t) + i\alpha$) кривой γ_t при малых t — несамопересекающаяся кривая.

При малых t образ дуги $\Gamma_t^{b_i^1}$ расположен вблизи образа ее проекции на вещественную ось, а значит, может пересекаться только с дугой $\Gamma_t^{b_{i+1}^1}$ или дугами соседних периодических орбит. Но дуги соседних периодических орбит лежат по другую сторону от вещественной оси, а $F(\Gamma_t^{b_i^1})$ и $\Gamma_t^{b_{i+1}^1}$ не пересекаются по построению. Значит, $F(\gamma_t)$ и γ_t не пересекаются. Четвертое свойство проверено.

Так как кривая $F(\Gamma_t^{b_i^1})$ лежит выше кривой $\Gamma_t^{b_{i+1}^1}$, то кривая $F(\gamma_t)$ лежит выше кривой γ_t . Пятое свойство проверено. $\square$

Лемма 2.4. Пусть семейство кривых γ_t , $t \in (0, \tau]$, непрерывно зависит от t в C^0 -топологии и эллиптические кривые Бюффа $B(\gamma_t, a + i\alpha)$ определены. Тогда модуль $\nu(\gamma_t, a + i\alpha)$ не зависит от t .

Доказательство. Напомним, что комплексная структура на торе $B(\gamma_{t_0}, a + i\alpha)$ определяется с помощью отображения $F + a + i\alpha$ на окрестности U кривой γ_{t_0} . Значит, из включения $\gamma_t \subset U$ следует, что $B(\gamma_{t_0}, a + i\alpha) = B(\gamma_t, a + i\alpha)$.

Так как кривая γ_t непрерывно зависит от t , в некоторой окрестности любой точки $t_0 \in (0, \tau]$ выполняется соотношение $\gamma_t \subset U$. Значит, функция $\nu(\gamma_t, a + i\alpha)$ постоянна в этой окрестности. Следовательно, она постоянна на $(0, \tau]$. $\square$

Доказательство лемм закончено. Тем самым закончено и доказательство теоремы 1.2.

§3. Параболический случай

3.1. Доказательство теоремы 1.3. В этом разделе мы доказываем теорему 1.3, пользуясь леммами, которые доказываются в разд. 3.2, 3.3 и 3.4.

Доказательство следует той же схеме, что и доказательство основной теоремы в статье [4]. Мы используем следующую теорему, позволяющую оценить расстояние между модулями эллиптических кривых в метрике Пуанкаре в верхней полуплоскости, если между этими кривыми есть квазиконформный гомеоморфизм с известным квазиконформным отклонением.

Теорема 3.1. Пусть T_1 и T_2 — эллиптические кривые с выделенными образующими группы первых гомотопий. Пусть существует K -квазиконформный гомеоморфизм $\phi: T_1 \rightarrow T_2$, переводящий выделенные образующие для T_1 в выделенные образующие для T_2 . Тогда расстояние в метрике Пуанкаре в верхней полуплоскости между модулями кривых T_1 и T_2 не превосходит $\ln K$, $d_P(\mu(T_1), \mu(T_2)) \leq \ln K$.

Доказательство теоремы 3.1 можно найти в статье Молдавского [3], оно получено из результатов, содержащихся в книге Альфорса [1, гл. III, D].

Доказательство теоремы 1.3. Сначала мы приведем доказательство теоремы в частном случае, когда число вращения диффеоморфизма f равно нулю. Общий случай отличается только техническими деталями.

Случай нулевого числа вращения $\rho(f) = 0$.

Леммы, касающиеся этого случая, собраны в разд. 3.3. Доказательство теоремы состоит из трех частей.

Шаг 1: сведение общего случая к случаю включаемого диффеоморфизма $g = g_v^1$.

Мы заменим исходное семейство эллиптических кривых $T_{i\alpha} = T_{F,i\alpha}$ семейством эллиптических кривых $\tilde{T}_{i\alpha} = T_{G,i\alpha}$, где G — поднятие на прямую диффеоморфизма g , включаемого в поток аналитического векторного поля.

Определение 1. Диффеоморфизм окружности g называется *включаемым*, если он представим в виде отображения потока за время 1 некоторого аналитического векторного поля v : $g = g_v^1$.

Для этого в п. 3.3.1 (см. следствие 3.7) мы построим квазиконформный гомеоморфизм между эллиптическими кривыми $T_{i\alpha}$ и $\tilde{T}_{i\alpha}$, отклонение $K = K(\alpha)$ которого равномерно ограничено по α при $\alpha \rightarrow 0$. Оказывается, что для этого достаточно построить билипшицево сопряжение между f и g (см. лемму 3.2). Затем мы применим теорему 3.1. Мы получим, что расстояние в метрике Пуанкаре в верхней полуплоскости между модулями кривых $d_P[\mu(T_{i\alpha}), \mu(\tilde{T}_{i\alpha})]$ равномерно ограничено.

А в таком случае равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(\tilde{T}_{i\alpha}) = 0$ влечет за собой равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(T_{i\alpha}) = 0 = \rho(f)$ (это следует из свойств метрики Пуанкаре в верхней полуплоскости). Тем самым общий случай мы свели к случаю включаемого диффеоморфизма.

Шаг 2: переход к другому семейству эллиптических кривых.

Изменим конструкцию эллиптической кривой. А именно, рассмотрим семейство эллиптических кривых $S_{i\alpha}$, полученных факторизацией полосы по отображениям $z \mapsto z + 1$ и $x \mapsto g_{v+i\alpha}^1(x)$. Здесь через v мы обозначили аналитическое продолжение поля v из шага 1. Формальное построение кривых $S_{i\alpha}$ приведено в начале п. 3.3.2.

В лемме 3.8 построено семейство квазиконформных гомеоморфизмов $h_\alpha: \tilde{T}_{i\alpha} \rightarrow S_{i\alpha}$, отклонение которых равномерно ограничено по α при $\alpha \rightarrow 0$. Как и на предыдущем шаге доказательства, теперь нам достаточно доказать равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(S_{i\alpha}) = 0$.

Шаг 3: вычисление модулей вспомогательного семейства эллиптических кривых.

Модули семейства $S_{i\alpha}$ можно подсчитать в явном виде, после чего вычисляется предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(S_{i\alpha})$ (см. лемму 3.9). Этот предел оказывается равным нулю, что завершает доказательство теоремы.

Случай произвольного рационального числа вращения $\rho(f) = p/q$.

Главное техническое отличие этого случая от случая нулевого числа вращения состоит в том, что вместо *включаемых* диффеоморфизмов окружности мы рассматриваем *псевдовключаемые* диффеоморфизмы.

Определение 2. Диффеоморфизм окружности f с числом вращения p/q называется *псевдовключаемым*, если он представим в виде $f = g_v^1 + p/q$, где v — аналитическое $1/q$ -периодическое поле на окружности.

Шаг 1: сведение общего случая к случаю *псевдовключаемого* диффеоморфизма $g = g_v^1 + p/q$.

В лемме 3.10 мы докажем, что любой диффеоморфизм с числом вращения p/q билипшицево сопряжен псевдовключаемому. Как и в случае нулевого числа вращения, из этого будет следовать близость модулей кривых $T_{F,i\alpha}$ и $\tilde{T}_{i\alpha} = T_{G,i\alpha}$ (см. следствие 3.11 и теорему 3.1).

Итак, мы свели общий случай к случаю псевдовключаемого диффеоморфизма.

Шаг 2: переход к другому семейству эллиптических кривых.

Заменим семейство $\tilde{T}_{i\alpha}$ семейством эллиптических кривых $S_{i\alpha}$, полученных факторизацией полосы по отображениям $x \mapsto g_{v+i\alpha}^1(x) + p/q$ и $z \mapsto z + 1$ (формально кривые $S_{i\alpha}$ определены в начале п. 3.4.2). Для этого в лемме 3.12 построены квазиконформные отображения между кривыми $\tilde{T}_{i\alpha}$ и $S_{i\alpha}$ и получена равномерная оценка для их квазиконформного отклонения.

Шаг 3: вычисление модулей вспомогательного семейства эллиптических кривых.

Теперь, как и в случае нулевого числа вращения, осталось вычислить модули семейства $S_{i\alpha}$ и доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(S_{i\alpha}) = p/q$ (см. лемму 3.13). $\square$

3.2. Вспомогательные утверждения для теоремы 1.3. В этом разделе мы приведем несколько утверждений, которые мы использовали при доказательстве теоремы 1.3.

В шаге 1 доказательства теоремы 1.3, при сведении общего случая к случаю включаемого (псевдовключаемого) диффеоморфизма окружности, оказывается полезной следующая лемма (лемма 2.2 из статьи [4]):

Лемма 3.2. Пусть f_1 и f_2 — аналитические диффеоморфизмы окружности, сопряженные билипшицевым гомеоморфизмом h . Пусть F_1 и F_2 — их поднятия на прямую. Тогда для любого $\alpha > 0$ эллиптические кривые $T_{F_1,i\alpha}$ и $T_{F_2,i\alpha}$ квазиконформно эквивалентны, причем отклонение их квазиконформного сопряжения не превосходит большей из констант Липшица отображений h и h^{-1} .

По этой лемме, если построить липшицево сопряжение диффеоморфизмов окружности f и g , то мы получим квазиконформное сопряжение между соответствующими эллиптическими кривыми $T_{F,i\alpha}$ и $T_{G,i\alpha}$ с равномерной оценкой для квазиконформного отклонения. Следующие три утверждения мы будем применять при построении липшицевых сопряжений диффеоморфизмов окружности.

Теорема 3.3 (Ф. Такенс). Любой бесконечно гладкий параболический росток $F: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ вида $F(x) = x + ax^p + \dots$ бесконечно гладко сопряжен с одним из стандартных ростков

$$F_{\lambda,p} = g_{v_{\lambda,p}}^1, \quad v_{\lambda,p} = \frac{x^p}{1 + \lambda x^{p-1}}.$$

Доказательство теоремы см. в статье [7].

Лемма 3.4. Стандартные отображения $F_{\lambda,p}$ для разных λ (и одинаковых p) C^1 -гладко сопряжены в окрестности нуля.

Доказательство. Сопряжение потоков полей $v_{\lambda,p}$ и $v_{0,p}$ можно получить, если решить уравнения $\dot{x} = \frac{x^p}{1 + \lambda x^{p-1}}$ и $\dot{x} = x^p$. Мы получим выпрямляющие карты $t = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} + \lambda \ln x + C$ для первого уравнения и $t = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} +$

C_1 для второго. Значит, отображение, отождествляющее точки с одинаковым t (например, $x \mapsto (x^{-(p-1)} - \lambda(p-1) \ln x)^{-1/(p-1)}$), доопределенное нулем в нуле, сопрягает потоки этих векторных полей.

Посчитав производную этого отображения, легко убедиться, что в окрестности нуля она существует и непрерывна. Итак, отображения $F_{0,p}$ и $F_{\lambda,p}$ C^1 -гладко сопряжены для любого λ . $\square$

Следующая лемма позволяет в некоторых случаях продолжать билипшицевы сопряжения из окрестностей неподвижных точек диффеоморфизмов окружности на всю окружность.

Лемма 3.5. Пусть F — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм отрезка $I = [0, 1]$ на себя, не имеющий неподвижных точек, кроме концов отрезка; w — такое C^1 -гладкое векторное поле, что $w(0) = w(1) = 0$, $w(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$, и поле $w(x)$ монотонно в окрестностях концов отрезка; $G = g_w^1$ — преобразование фазового потока поля w за единичное время.

Пусть отображения F и G сопряжены непрерывно дифференцируемыми отображениями в проколотых окрестностях концов отрезка, причем производные сопрягающих отображений ограничены и отделены от нуля.

Тогда существует билипшицево отображение отрезка I на себя, сопрягающее F с G .

Доказательство. Пусть h — отображение, сопрягающее F и G в окрестности нуля: $h(F(x)) = G(h(x))$. Поскольку производная отображения h ограничена и отделена от нуля, отображения h и h^{-1} липшицевы вблизи нуля.

Продолжим сопряжение h по формуле $h(F(x)) = G(h(x))$ до сопряжения на полуинтервале $[0, 1)$. Аналогичным образом отображение h_1 , сопрягающее F и G вблизи единицы, продолжается до сопряжения на полуинтервале $(0, 1]$.

Доопределим отображение h единицей в единице, $h(1) = 1$. Полученное отображение сопрягает F и G на всем отрезке, является гладким на интервале $(0, 1)$ и липшицевым вместе со своим обратным в точке 0. Нам осталось показать, что оно липшицево вместе со своим обратным вблизи точки 1, т. е. что производная отображения h равномерно ограничена и отделена от нуля в проколотой окрестности точки 1.

Пусть поле v — образ поля w под действием h^{-1} , а поле v_1 — образ поля w под действием h_1^{-1} . Заметим, что тогда $F = g_v^1 = g_{v_1}^1$.

Представим $h'(x)$ в виде

$$h'(x) = \frac{w(h(x))}{v(x)} = \frac{w(h_1(x))}{v_1(x)} \frac{v_1(x)}{v(x)} \frac{w(h(x))}{w(h_1(x))}$$

и оценим эти отношения по отдельности.

Отношение $w(h_1(x))/v_1(x)$ ограничено и отделено от нуля в проколотой окрестности точки 1, так как оно равно $h_1'(x)$ по построению поля v_1 .

Отношение $v_1(x)/v(x)$ F -инвариантно:

$$\frac{v_1(F(x))}{v(F(x))} = \frac{F'(x)v_1(x)}{F'(x)v(x)} = \frac{v_1(x)}{v(x)}.$$

В любой фундаментальной области отображения F оно ограничено и отделено от нуля как отношение непрерывных и не обращающихся в 0 функций. Значит, оно ограничено и отделено от нуля на всем интервале $(0, 1)$.

Рассмотрим отношение $w(h(x))/w(h_1(x))$.

Будем считать, что образы любой фундаментальной области отображения F под действием h и h_1 пересекаются. В противном случае отображение h или h_1 можно заменить отображением $G^n \circ h$ или $G^n \circ h_1$.

Тогда выполнены неравенства $G^{-2}(h_1(x)) < h(x) < G^2(h_1(x))$.

В некоторой окрестности единицы поле w монотонно. Будем, например, считать, что оно возрастает (в частности, w отрицательно). Тогда выполнена оценка

$$\frac{w(G^{-2}(h_1(x)))}{w(h_1(x))} > \frac{w(h(x))}{w(h_1(x))} > \frac{w(G^2(h_1(x)))}{w(h_1(x))},$$

т. е. $(G^{-2})'(h_1(x)) > w(h(x))/w(h_1(x)) > (G^2)'(h_1(x))$. Но в окрестности 1 производная G' ограничена и отделена от нуля. Значит, отношение $w(h(x))/w(h_1(x))$ ограничено и отделено от нуля в проколотовой окрестности точки 1.

Итак, $h'(x) = \frac{w(h_1(x))}{v_1(x)} \frac{v_1(x)}{v(x)} \frac{w(h(x))}{w(h_1(x))}$ ограничено и отделено от нуля в проколотовой окрестности точки 1.

Значит, отображения h и h^{-1} липшицевы. Итак, отображения F и G липшицево сопряжены отображением h , что и требовалось доказать. $\square$

3.3. Случай нулевого числа вращения. В этом разделе мы докажем все леммы, использованные в доказательстве теоремы 1.3 для случая нулевого числа вращения.

3.3.1. Сведение к случаю включаемого диффеоморфизма. В этом пункте доказаны утверждения, соответствующие шагу 1 в доказательстве теоремы 1.3 для нулевого числа вращения (сведению к включаемому диффеоморфизму).

Лемма 3.6. *Любой аналитический диффеоморфизм окружности f с нулевым числом вращения билипшицево сопряжен диффеоморфизму $g = g_v^1$, включаемому в поток аналитического векторного поля.*

Доказательство. Пусть отображение f имеет некоторое количество гиперболических неподвижных точек $a_1, \dots, a_n$ с мультипликаторами $\nu_1, \dots, \nu_n$ (возможно, не имеет ни одной, $n = 0$) и некоторое ненулевое количество параболических точек $b_1, \dots, b_k$, в которых порядки касания отображения f с тождественным отображением равны $p_1, \dots, p_k$ соответственно.

По отображению f построим аналитическое векторное поле v , имеющее гиперболические неподвижные точки $a_1, \dots, a_n$ с мультипликаторами $\ln \nu_1, \dots, \ln \nu_n$ и параболические неподвижные точки $b_1, \dots, b_k$, в которых поле имеет нули порядков $p_1, \dots, p_k$. Тогда к отображениям f и g_v^1 на дугах, соединяющих соседние неподвижные точки, можно применить лемму 3.5. Действительно, эти отображения сопряжены в окрестностях концов дуг в силу теоремы 3.3 и леммы 3.4, если соответствующая концевая точка параболическая. Для гиперболических концевых точек можно воспользоваться теоремой Шрёдера–Кёнига об аналитическом выпрямлении гиперболического роста.

Значит, отображения f и g_v^1 липшицево сопряжены. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть диффеоморфизмы окружности f и g удовлетворяют условию леммы 3.6. Пусть $\tilde{T}_{i\alpha} = T_{G,i\alpha}$ — эллиптическая кривая, построенная с помощью конструкции Арнольда по отображению g . Тогда существует квазиконформный гомеоморфизм между эллиптическими кривыми $T_{i\alpha}$ и $\tilde{T}_{i\alpha}$, отклонение которого равномерно ограничено по α .*

Доказательство. Это следует из предыдущей леммы и леммы 3.2. $\square$

3.3.2. *Семейство эллиптических кривых $S_{i\alpha}$ и его свойства.* Этот пункт соответствует шагам 2 и 3 в доказательстве теоремы 1.3 для случая нулевого числа вращения.

Конструкция эллиптических кривых $S_{i\alpha}$. Пусть $g = g_v^1$ — поток за единичное время аналитического поля v на окружности. Поднимем поле v до 1-периодического поля на прямой. Пусть поле v аналитически продолжается в полосу $0 \leq \operatorname{Im} z < \beta$. Аналитическое продолжение поля v мы тоже будем обозначать через v . При $\alpha < \beta$ через $S_{i\alpha}$ обозначим эллиптическую кривую, получающуюся при факторизации окрестности криволинейной полосы между кривыми $\mathbb{R}$ и $g_{v+i\alpha}^1(\mathbb{R})$ по отображениям $z \mapsto z + 1$ и $x \mapsto g_{v+i\alpha}^1(x)$.

Лемма 3.8. *При любом достаточно малом α существует квазиконформное отображение h_α из эллиптической кривой $\tilde{T}_{i\alpha} = T_{G,i\alpha}$, построенной в следствии 3.7, в эллиптическую кривую $S_{i\alpha}$, отклонение которого равномерно ограничено по α .*

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3 из статьи [4]. Пусть $G_{i\alpha} = g_{v+i\alpha}^1$ и $F_{i\alpha} = g_v^1 + i\alpha$.

В качестве квазиконформного отображения h_α возьмем

$$h_\alpha(x + iy) = x + iy + \frac{y}{\alpha}(G_{i\alpha}(u) - F_{i\alpha}(u)), \quad u = F^{-1}(x),$$

где $0 < y < \alpha$.

В статье [4] проверено, что это отображение опускается до отображения эллиптических кривых, а также оценено его квазиконформное отклонение:

$$\frac{K-1}{K+1} = \sup \frac{(h_\alpha)_{\bar{z}}}{(h_\alpha)_z} = \sup \frac{1 + i\phi(F^{-1}(x))}{1 - i\phi(F^{-1}(x))} + o(1),$$

где

$$\phi(x) = (G_{i\alpha}(x))'|_{\alpha=0}.$$

Если мы докажем, что функция $-i\phi(x)$ вещественна и положительна на окружности, то получим, что для малых α значение дроби $(K-1)/(K+1)$ отделено от 1. Следовательно, значение K равномерно ограничено при $\alpha \rightarrow 0$.

В статье [4] получена формула для функции ϕ :

$$\phi(x) = iX(1, x) \int_0^1 \frac{d\tau}{X(\tau, x)},$$

где функция $X(t, x)$ — решение уравнения $\dot{y} = v'(g_v^t(x))y$. В неособых точках поля v получаем $X(t, x) = v(g_v^t(x))/v(x) > 0$, в гиперболической точке с мультипликатором a имеем $X(t, x) = e^{at} > 0$, в параболической имеем $X(t, x) = 1 > 0$. Значит, функция $-i\phi(x) = X(1, x) \int_0^1 \frac{d\tau}{X(\tau, x)}$ вещественна и положительна на окружности, что и требовалось. $\square$

В следующей лемме мы вычислим модули эллиптических кривых $S_{i\alpha}$ и докажем равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(S_{i\alpha}) = \rho(f) = 0$. Лемма используется в шаге 3 доказательства теоремы 1.3 в случае нулевого числа вращения.

Лемма 3.9. *Пусть диффеоморфизм $g = g_v^1$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3, а поле v аналитическое. Тогда модуль эллиптической кривой $S_{i\alpha}$ равен $1/I_\alpha$, где $I_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{v(x) + i\alpha}$. При $\alpha \rightarrow 0$ этот модуль стремится к 0.*

Доказательство. Выпрямим поле $v + i\alpha$ с помощью замены координат $z \rightarrow t$, $dt = \frac{dz}{v(z)+i\alpha}$. Эта замена переводит эллиптическую кривую $S_{i\alpha}$ в стандартную кривую $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — решетка, порожденная числами 1 и I_α (так как $1 = \int_0^{g^1} dt$, $I_\alpha = \int_0^1 dt$). Значит, модуль исходной эллиптической кривой равен $1/I_\alpha$. Первое утверждение леммы доказано.

Найдем предел $I_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha$. Для этого выберем число $\beta > 0$ так, чтобы поле v голоморфно продолжалось в полосу $0 < \operatorname{Im} z < \beta$ и в ее замыкании не имело других нулей, кроме нулей на вещественной прямой. Рассмотрим контур γ , обходящий границу прямоугольника $D_\beta = \{0 < \operatorname{Im} z < \beta, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ против часовой стрелки. Для $0 < \alpha < \beta$ положим $L_\alpha := \int_\gamma \frac{dz}{v(z)+i\alpha}$.

С одной стороны, в силу 1-периодичности v интеграл L_α представляется в виде разности интегралов вдоль верхней и нижней сторон прямоугольника: $L_\alpha = I_\alpha - J_\alpha$, где $J_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{v(x+i\beta)+i\alpha}$. С другой стороны, его можно подсчитать как сумму вычетов функции $\frac{1}{v(z)+i\alpha}$ в прямоугольнике D_β .

Предел $J_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha$ равен интегралу $\int_0^1 \frac{dx}{v(x+i\beta)}$, т. е. некоторому конечно-му комплексному числу.

Оценим интеграл L_α .

Вблизи каждой гиперболической особой точки поля v есть одна особая точка поля $v(z) + i\alpha$. При $\alpha \rightarrow 0$ вычеты функции $1/(v(z) + i\alpha)$ в этих ее полюсах стремятся к вычетам функции $1/v(z)$ в соответствующих особых точках поля v , т. е. к конечным комплексным числам.

При малых α вблизи параболической точки b_j поля v , $v(z) = A_j(z-b_j)^{p_j} + \dots$, находятся p_j нулей поля $v(z) + i\alpha$. В прямоугольник D_β попадают те из них, которые лежат в верхней полуплоскости. Такой нуль имеет вид $w = b_j + \varepsilon \alpha^{1/p_j}(1 + o(1))$, где ε — один из корней p_j -й степени из $-i/A_j$. Вычет функции $1/(v(z) + i\alpha)$ в точке w равен

$$\operatorname{Res}_w \frac{1}{v(z) + i\alpha} = \frac{1}{v'(w)} = \frac{\varepsilon}{-i\alpha^{(p_j-1)/p_j} p_j} (1 + o(1)).$$

Если точка w лежит в верхней полуплоскости, то при достаточно малом α соответствующий корень ε тоже лежит в верхней полуплоскости. Значит, вещественная часть вычета отрицательна при малых α и стремится к бесконечности, когда α стремится к 0.

Следовательно, сумма этих вычетов стремится к бесконечности и L_α тоже стремится к бесконечности. Предел $J_0 \in \mathbb{C}$ конечен, значит, $I_\alpha = J_\alpha + L_\alpha$ стремится к бесконечности.

Отсюда вытекает, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} 1/I_\alpha = 0$. □

3.4. Случай произвольного рационального числа вращения. В этом разделе мы докажем леммы, которые использованы в доказательстве теоремы 1.3 для общего случая. Доказательства лемм во многом повторяют доказательства лемм из разд. 3.3.

3.4.1. Сведение к случаю псевдовключаемого диффеоморфизма. Утверждения, приведенные в этом пункте, применяются в шаге 1 доказательства теоремы 1.3 для ненулевого числа вращения. Определение псевдовключаемого диффеоморфизма дано в разд. 3.1.

Лемма 3.10. *Любой аналитический диффеоморфизм окружности f с числом вращения p/q липшицево сопряжен псевдовключаемому диффеоморфизму $g = g_v^1 + p/q$.*

Доказательство. Сначала докажем, что если в условиях леммы для некоторого диффеоморфизма g отображения f^q и g^q липшицево сопряжены, то f и g также липшицево сопряжены.

Пусть h — отображение, сопрягающее f^q и g^q . Построим сопряжение $\tilde{h}$ между f и g .

Фиксируем произвольную дугу L между соседними неподвижными точками отображения f^q . На этой дуге положим $\tilde{h} := h$. На образах этой дуги под действием F определим $\tilde{h}$ таким образом:

$$\tilde{h}(f^k(x)) = g^k(\tilde{h}(x)), \quad k < q, \quad x \in L. \quad (3.1)$$

Для $k = q$ это равенство тоже выполнено:

$$\tilde{h}(f^q(x)) = h(f^q(x)) = g^q(h(x)) = g^q(\tilde{h}(x)), \quad x \in L.$$

Если $\tilde{h}$ определено еще не на всех дугах, соединяющих неподвижные точки диффеоморфизма f , берем любую из оставшихся дуг и повторяем ту же операцию.

Построенное таким образом отображение $\tilde{h}$ будет сопрягать отображения f и g — это следует из равенства (3.1). Если отображения h и h^{-1} были липшицевыми, то отображения $\tilde{h}$ и $\tilde{h}^{-1}$ тоже будут липшицевыми.

Теперь докажем, что отображения f^q и g^q липшицево сопряжены для некоторого псевдовключаемого диффеоморфизма $g = g_v^1 + p/q$. Пусть у отображения f есть n периодических орбит длины q . Легко убедиться, что точки этих орбит упорядочены на окружности так же, как корни nq -й степени из 1 под действием поворота на p/q .

Рассмотрим аналитическое поле w на окружности, обладающее следующими свойствами:

- Особыми точками поля w являются корни nq -й степени из 1. Поставим их в биективное соответствие периодическим точкам отображения f , сохранив их порядок на окружности.

- Собственные значения поля w в особых точках равны $\frac{1}{q} \ln \nu_k$, где ν_k — мультипликаторы соответствующих орбит отображения f .

- В точках, соответствующих параболическим орбитам отображения f , поле w имеет тот же порядок касания с 0, что f^q — с тождественным отображением.

Усредним поле w по действию поворота на $1/q$. Получим $1/q$ -периодическое поле v с такими же мультипликаторами в особых гиперболических точках и тем же порядком касания в параболических.

Отображения f^q и $g^q = (g_v^1 + p/q)^q = (g_v^1)^q$ на дугах, соединяющих неподвижные точки, удовлетворяют условиям леммы 3.5. Значит, они липшицево сопряжены. Отсюда следует, что отображения f и g тоже липшицево сопряжены. $\square$

Следствие 3.11. *Пусть диффеоморфизм окружности g удовлетворяет условиям леммы 3.10. Пусть $\tilde{T}_{i\alpha} = T_{G,i\alpha}$ — эллиптическая кривая, построенная с помощью конструкции Арнольда по отображению g . Тогда существует*

квазиконформный гомеоморфизм между эллиптическими кривыми $T_{i\alpha}$ и $\tilde{T}_{i\alpha}$, отклонение которого равномерно ограничено по α .

Доказательство. Это следует из предыдущей леммы и леммы 3.2. $\square$

3.4.2. Семейство эллиптических кривых $S_{i\alpha}$ и его свойства. Леммы этого пункта используются в шагах 2 и 3 доказательства теоремы 1.3 для случая ненулевого числа вращения.

Конструкция эллиптических кривых $S_{i\alpha}$. Пусть $f = g_v^1 + p/q$ — псевдовключаемый диффеоморфизм окружности. Поднимем поле v до 1-периодического поля на всей прямой и аналитически продолжим его в некоторую полосу $0 \leq \operatorname{Im} z < \beta$. Полученное поле мы тоже будем обозначать через v . При $\alpha < \beta$ рассмотрим криволинейную полосу, заключенную между $\mathbb{R}$ и $g_{v+i\alpha}^1(\mathbb{R}) + p/q$; обозначим через $S_{i\alpha}$ эллиптическую кривую, полученную факторизацией окрестности этой полосы по отображениям $z \mapsto z + 1$ и $x \mapsto g_{v+i\alpha}^1(x) + p/q$.

Лемма 3.12. При любом достаточно малом α существует квазиконформное отображение h_α из $\tilde{T}_{i\alpha}$ в $S_{i\alpha}$, отклонение которого равномерно ограничено по α .

Доказательство. Пусть $F_{i\alpha} := g_v^1 + i\alpha + p/q$, $F_{i\alpha}^0 := g_v^1 + i\alpha$, $G_{i\alpha} := g_{v+i\alpha}^1 + p/q$, $G_{i\alpha}^0 := g_{v+i\alpha}^1$. Как и в лемме 3.8, положим

$$h_\alpha(x + iy) := x + iy + \frac{y}{\alpha}(G_{i\alpha}^0(u) - F_{i\alpha}^0(u)), \quad u = (F^0)^{-1}(x). \quad (3.2)$$

Тогда отображение h_α опускается до корректно определенного отображения из $\tilde{T}_{i\alpha}$ в $S_{i\alpha}$. Действительно, h_α тождественно на вещественной прямой и точка $F_{i\alpha}^0(x)$ переходит в точку $G_{i\alpha}^0(x)$, как и в лемме 3.8. Но отображение h_α удовлетворяет равенству $h_\alpha(z + p/q) = h_\alpha(z) + p/q$. Значит, под действием h_α точка $F_{i\alpha}(x)$ перейдет в точку $G_{i\alpha}(x)$.

Квазиконформное отклонение отображения h_α оценивается так же, как и в лемме 3.8: роль отображений $F_{i\alpha}$ и $G_{i\alpha}$ из леммы 3.8 играют отображения $F_{i\alpha}^0$ и $G_{i\alpha}^0$. $\square$

В следующей лемме мы вычислим модули эллиптических кривых $S_{i\alpha}$ и докажем равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(S_{i\alpha}) = \rho(f) = p/q$. Эта лемма применяется в шаге 3 доказательства теоремы 1.3 для случая ненулевого числа вращения.

Лемма 3.13. Модуль эллиптической кривой $S_{i\alpha}$ равен $p/q + 1/I_\alpha$, где $I_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{v(x+i\alpha)}$. При $\alpha \rightarrow 0$ этот модуль стремится к p/q .

Доказательство. Выпрямим поле $v + i\alpha$ с помощью замены координат $z \rightarrow t$, $dt := \frac{dz}{v(z+i\alpha)}$. Это отображение переводит эллиптическую кривую $S_{i\alpha}$ в стандартную кривую $\mathbb{C}/\Gamma$, где решетка Γ порождена числами $\int_0^1 dt = I_\alpha$ и $\int_0^{g_{v+i\alpha}^1(0)+p/q} dt = 1 + p/q I_\alpha$.

Значит, модуль эллиптической кривой $S_{i\alpha}$ равен $p/q + 1/I_\alpha$. Первое утверждение доказано.

Теперь заметим, что предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} 1/I_\alpha$ для произвольного 1-периодического аналитического поля v на прямой с параболическими неподвижными точками подсчитан в лемме 3.9 и равен нулю. Значит, предел модулей эллиптических кривых $S_{i\alpha}$ равен p/q . $\square$

Вместе с леммами этого параграфа доказана и теорема 1.3.

§4. Благодарности

Я благодарна К. Бюфффу, который предложил одну из основных идей, использованных в работе. К сожалению, Бюффф не согласился быть одним из авторов этой работы. Также я благодарна своему научному руководителю Ю. С. Ильяшенко, который сообщил мне постановку задачи и рассказал о конструкции Бюфффа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.
- [2] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [3] В. С. Молдавский, *Модули эллиптических кривых и числа вращения диффеоморфизмов окружности*, Функци. анализ и его прил., **35:3** (2001), 88–91.
- [4] Y. Ilyashenko, V. Moldavskii, *Morse–Smale circle diffeomorphisms and moduli of elliptic curves*, Mosc. Math. J., **3:2** (2003), 531–540.
- [5] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [6] E. Risler, *Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications*, Mém. Soc. Math. France 2^e série, t. 77, 1999.
- [7] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vectorfields*, Ann. Inst. Fourier, **23:2** (1973), 163–195.
- [8] J.-C. Yoccoz, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **17:3** (1984), 333–359.
- [9] G. Koenigs, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **1** (1884), 3–41.
- [10] E. Schröder, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann., **2:2** (1870), 317–365.
- [11] E. Schröder, *Über iterierte Funktionen*, Math. Ann., **3** (1871), 296–322.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Независимый московский университет
e-mail: goncharukn@gmail.com

Поступило в редакцию
9 декабря 2010 г.