Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 37–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3066>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 06:44:01

Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло*

© 2012. И. М. КРИЧЕВЕР

Используя мероморфные дифференциалы с вещественными периодами, мы доказываем гипотезу Арбарелло: любой компактный комплексный цикл в пространстве модулей M_g гладких алгебраических кривых рода g , размерность которого не меньше $g - n$, пересекает множество кривых, на которых существует точка Вейерштрасса порядка, не превосходящего n .

§1. Введение

В работе [1] Арбарелло изучал естественную фильтрацию

$$\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_3 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{g-1} \subset \mathcal{W}_g = M_g \quad (1)$$

пространства M_g модулей гладких римановых поверхностей рода g подмногообразиями $\mathcal{W}_n$ кривых, на которых существует точка Вейерштрасса порядка не выше n (т. е. подмногообразиями кривых, на которых существует мероморфная функция, имеющая полюс в одной точке порядка не выше n). Он высказал гипотезу, что *любой компактный комплексный цикл в M_g размерности не меньше чем $g - n$ должен пересекать $\mathcal{W}_n$* . Поскольку $\mathcal{W}_2$ является подмногообразием гиперэллиптических кривых, которое аффинно, то из гипотезы Арбарелло следует, что *размерность любого компактного комплексного цикла в M_g не превосходит $g - 2$* . Последнее утверждение было позднее доказано Диасом в работе [4] с использованием некоторой модификации фильтрации Арбарелло. Еще одна модификация фильтрации Арбарелло было использована Лойенго [14] для доказательства того, что *тавтологические классы в кольце Чао пространства модулей M_g тривиальны в размерностях выше $g - 2$* . Теорема Диаса является следствием теоремы Лойенго (действительно, класс Ходжа λ_1 обилен в M_g и, следовательно, для любого d -мерного подмногообразия $X \subset M_g$ должно выполняться неравенство $\lambda_1^d \cdot X > 0$, в то время как $\lambda_1^{g-1} = 0$ в силу того, что последний класс тавтологичен).

Основной целью настоящей работы является доказательство гипотезы Арбарелло, которая до сих пор оставалась гипотезой, несмотря на внимание, которое она привлекала на протяжении многих лет. (Нетривиальность этой гипотезы нашла свое объяснение в недавней работе [2], где было показано, что слои фильтрации Арбарелло не являются аффинными.) Доказательство использует конструкции теории Уизема, являющейся основой теории возмущения интегрируемых систем. Эти конструкции были введены автором в работах [10], [11] и получили дальнейшее развитие в работах [12], [13]. Они нашли применение в задачах топологической квантовой теории поля (уравнения WDVV) и в задачах

*Работа поддержана грантом Министерством науки и образования №02.740.11.5194.

теории ($N = 2$)-суперсимметричных калибровочных моделей [5] (см. также [3] и приведенные там ссылки). Применение этих конструкций к изучению геометрии пространств модулей гладких кривых было начато в совместных работах Грушевского и автора [7], [8].

В работе [7] было предложено новое доказательство теоремы Диаса, а в работе [8] была доказана тривиальность некоторых тавтологических классов. Хотя сами по себе эти результаты были известны, но их новые доказательства указывали на то, что дальнейшее развитие конструкций теории Уизема может привести к созданию новых методов, применимых к широкому спектру задач алгебраической геометрии. Именно это развитие и являлось основной целью работ [7], [8].

Вещественно-нормированные мероморфные дифференциалы играют центральную роль в теории Уизема. По определению вещественно-нормированным дифференциалом называется мероморфный дифференциал, все периоды которого являются вещественными. Основой возможности применений таких дифференциалов является то, что на любой алгебраической кривой и для любого фиксированного набора «сингулярных частей» существует единственный вещественно-нормированный дифференциал с предписанными сингулярностями в отмеченных точках.

В работе [7] использовались вещественно-нормированные дифференциалы третьего рода, т. е. дифференциалы с двумя простыми полюсами. В гипотезе Арбарелло фигурируют кривые с одной отмеченной точкой, поэтому автору показалось соблазнительным воспользоваться для ее доказательства вещественно-нормированными дифференциалами второго рода. Однако наивная попытка воспользоваться аргументами, аналогичными тем, которые успешно были применены в [7], наталкивается на серьезные препятствия, связанные с некомпактностью пространства «сингулярных частей», параметризующих вещественно-нормированные дифференциалы второго рода. Эти препятствия аналогичны тем, которые встречали все предшествующие попытки доказать гипотезу Арбарелло (см. детали в книге [6]).

Обобщения и частичная компактификация предшествующих конструкций, необходимые для того, чтобы обойти возникающие трудности, излагаются в следующем параграфе. В первую очередь, мы определяем структуру слоения в пространстве вещественно-нормированных дифференциалов второго рода с полюсами порядка *не выше* $n_\alpha + 1$ в отмеченной точке p_α . В предшествующих работах структура слоения определялась на пространстве вещественно-нормированных дифференциалов, имеющих *фиксированные* порядки полюсов. Как и ранее, листы слоения являются (локально) гладкими комплексными подмногообразиями. В конце второго параграфа доказывается, что структура слоения на пространстве вещественно-нормированных дифференциалов индуцирует структуру слоения на факторпространстве таких дифференциалов, рассматриваемых по модулю умножения на *положительные вещественные числа*.

В третьем параграфе работы мы вводим еще один инструмент, необходимый для доказательства основной теоремы, а именно, понятие циклов, «двойственных» нулям вещественно-нормированных дифференциалов. Мы доказываем, что «двойственные циклы» порождают группу гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Как представляется автору, конструкция таких циклов важна сама по себе и заслуживает дальнейших исследований. Доказательство гипотезы Арбарелло изложено в заключительном параграфе.

Благодарности. Автор признателен С. Грушевскому за многочисленные замечания и предложения.

§2. Слоения, определяемые вещественно-нормированными дифференциалами

Рассмотрим пространство $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, $n = (n_1, \dots, n_k)$, модулей гладких алгебраических кривых Γ рода g с фиксированными *сингулярными частями полюсов порядка $n_\alpha + 1$ без вычетов* в отмеченных точках $p_\alpha \in \Gamma$, $\alpha = 1, \dots, k$. Выбор сингулярной части полюса порядка $n_\alpha + 1$ в точке p_α означает выбор класса эквивалентности пар (z_α, R_α) , где (i) z_α — это локальная координата в окрестности точки p_α , такая, что $z_\alpha(p_\alpha) = 0$; (ii) R_α — полином, $R_\alpha = \sum_{i=0}^{n_\alpha} r_{\alpha,i} z_\alpha^{-i-1}$. Пары (z_α, R_α) и (w_α, R'_α) принадлежат одному классу эквивалентности, если выполняется соотношение $R'_\alpha dw_\alpha = R_\alpha dz_\alpha + O(1) dz_\alpha$, $w_\alpha = w_\alpha(z_\alpha)$. Коэффициент $r_{\alpha,0}$ полинома является вычетом главной части, т. е. для сингулярных частей без вычетов $r_{\alpha,0} = 0$.

Простым следствием невырожденности матрицы Римана b -периодов нормированных голоморфных дифференциалов на гладкой алгебраической кривой Γ рода g является такое утверждение:

Лемма 2.1. *Для любого фиксированного набора сингулярных частей с чисто мнимыми вычетами существует и единствен мероморфный дифференциал Ψ , имеющий заданные сингулярные части в отмеченных точках p_α и такой, что его периоды по любому циклу на Γ являются вещественными, т. е.*

$$\operatorname{Im} \left(\oint_c \Psi \right) = 0 \quad \forall c \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}). \quad (2)$$

(Подробное доказательство приведено в работе [7].)

Замечание 2.2. Хотя на протяжении настоящей работы основное внимание уделяется вещественно-нормированным дифференциалам второго рода (т. е. без вычетов), большая часть конструкций легко переносится на общий случай дифференциалов с чисто мнимыми вычетами. Впервые вещественная нормировка как определяющее свойство дифференциалов квазимоментов в спектральной теории линейных операторов с квазипериодическими коэффициентами была введена в работах [9] и [10] (в которых она называлась абсолютной нормировкой).

Обозначим через $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ пространство модулей гладких алгебраических кривых Γ рода g с фиксированным *нетривиальным* вещественно-нормированным мероморфным дифференциалом Ψ второго рода, имеющим полюсы порядка не выше $n_\alpha + 1$ в отмеченных точках $p_\alpha \in \Gamma$. Лемма 2.1 позволяет отождествить $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ с пространством модулей кривых с фиксированным нетривиальным набором сингулярных частей полюсов без вычетов порядка не выше $n_\alpha + 1$. Последнее является пространством комплексного векторного расслоения ранга $|n| := \sum_\alpha n_\alpha$ над $\mathcal{M}_{g,k}$ с удаленным нулевым сечением. Это отождествление определяет на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ комплексную структуру.

Определим теперь на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ структуру слоения. Периоды дифференциала Ψ определяют класс когомологий $\Pi \in H^1(\Gamma, \mathbb{R})$. Обозначим через ∇ связность

Гаусса–Манина на расслоении Ходжа над $\mathcal{M}_{g,k}$, слоем которого над (Γ, p_α) является $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Уравнение

$$\nabla_X \Pi = 0, \quad (3)$$

рассматриваемое как уравнение на касательный вектор $X \in T(\mathcal{M}_{g,k}^{(n)})$, определяет в каждой точке из $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ подпространство касательного пространства. Распределение этих подпространств интегрируемо и определяет слоение на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$. Другими словами:

Определение 2.3. Лист $\mathcal{L}$ слоения на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ определяется как подмножество, вдоль которого периоды соответствующего дифференциала остаются (ковариантно) постоянными.

Замечание 2.4. В предшествующих работах [11]–[13] (см. также [7], [8]) структура слоения определялась на пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ вещественно-нормированных дифференциалов, имеющих в отмеченных точках полюсы порядков $n_\alpha + 1$. Определение, приведенное выше, распространяет структуру слоения на случай пространств модулей $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ дифференциалов, имеющих полюсы порядков не выше $n_\alpha + 1$.

Определенная выше структура слоения является вещественно-аналитической, однако листы слоения являются комплексными (таким образом, слоение является вещественно-аналитическим лишь в «трансверсальном направлении»). Действительно, локально в окрестности U любой кривой Γ_0 всегда можно выбрать на каждой из кривых $\Gamma \in U$ базис циклов, который непрерывно варьируется вместе с вариацией кривой Γ . Следовательно, локально лист $\mathcal{L}$ определяется уравнениями, означающими, что на Γ существует дифференциал Ψ , периоды которого по заданным циклам $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ равны заданным величинам $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$. Это голоморфные уравнения, и, следовательно, каждый лист является локально комплексным подмногообразием $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$. Если выбрать другой базис циклов в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, то периоды дифференциала Ψ в новом базисе также будут постоянны вдоль листа (хотя будут принимать другие численные значения).

Замечание 2.5. В работе [7] листы слоения на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ назывались большими листами в отличие от малых листов, задаваемых периодами двух вещественно-нормированных дифференциалов. Большие листы являются обобщением пространств Гурвица накрытий пространства $\mathbb{P}^1$. Точнее, если $k > 1$ или $k = 1$, но $n_1 > 1$, то соответствующее слоение содержит специальный лист $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, на котором все периоды дифференциала Ψ тривиальны, т. е. Ψ точен, $\Psi = dF$. На кривых, отвечающих открытой части листа $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, мероморфная функция F имеет в p_α полюсы порядков n_α , т. е. F задает накрытие пространства $\mathbb{P}^1$ с предписанными типами ветвлений над одной из точек (бесконечностью). Следовательно, $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ является C^* -расслоением над пространством Гурвица $\mathcal{H}^{(n_1, \dots, n_k)}$.

Теорема 2.6. Лист $\mathcal{L}$ является гладким (локальным) комплексным подмногообразием вещественной коразмерности $2g$ (т. е. имеет комплексную размерность $d_g^{(n)} = 2g - 3 + |n| + k$).

Замечание 2.7. Теорема 2.6 обобщает на случай пространства $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ доказанное ранее в [12] утверждение: *открытая часть листа $\mathcal{L}$, а именно, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, является гладкой.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, локально после выбора базиса циклов на кривых в окрестности кривой $\Gamma_0 \in \mathcal{M}_g$ лист $\mathcal{L}$ слоения, проходящий через точку $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, задается уравнениями

$$\oint_{A_j} \Psi = a_j, \quad \oint_{B_j} \Psi = b_j, \quad (4)$$

означающими, что на кривой Γ в окрестности кривой Γ_0 существует дифференциал с теми же периодами, что и у дифференциала на Γ_0 (автоматически вещественными). Для доказательства теоремы необходимо доказать, что эти уравнения независимы. Оказывается, что это так, и, более того, оказывается, что набор периодов, рассматриваемых как локальный набор функций на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, может быть явно дополнен до локальной системы координат в окрестности точки $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$.

Конструкция таких координат на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ приведена в работе [12]. Набор голоморфных координат на $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ аналогичен координатам, хорошо известным в теории пространств Гурвица. Координатами на $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ являются «критические значения» соответствующего абелева интеграла

$$F(p) = c + \int^p \Psi, \quad p \in \Gamma, \quad (5)$$

который является многозначной мероморфной функцией на Γ . На $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ дифференциал Ψ имеет полюсы порядка $n_\alpha + 1$ в точках p_α . Следовательно, его дивизор нулей имеет степень $d_g^{(n)} + 1$. В общей точке многообразия $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, где нули q_s дифференциала Ψ просты, координатами на $\mathcal{L}$ являются значения функции F в этих критических точках:

$$\varphi_s = F(q_s), \quad \Psi(q_s) = 0, \quad s = 0, \dots, d_g^{(n)}, \quad (6)$$

нормированные условием $\sum_s \varphi_s = 0$. Эти координаты зависят от выбора путей интегрирования, необходимых для определения функции F в окрестности точки q_s . Условие нормировки необходимо для определения дополнительной константы c в (5). В окрестности точек из $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, где соответствующий дифференциал имеет кратный нуль $q_{s_1} = \dots = q_{s_r}$, локальными координатами являются симметрические полиномы $\sigma_i(\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_r})$, $i = 1, \dots, r$ (предполагается, что пути интегрирования, определяющие φ_{s_k} , выбраны согласованно; подробнее см. в [12]).

Замечание 2.8. Прямым следствием вещественной нормализации является утверждение, что мнимые части $f_s = \text{Im } \varphi_s$ критических значений не зависят от путей интегрирования, а зависят только от нумерации критических точек. Они могут быть упорядочены по убыванию:

$$f_0 \geq f_1 \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d, \quad d = d_g^{(n)}. \quad (7)$$

После этого каждая из функций f_j является корректно определенной непрерывной функцией на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, которая при ограничении на $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ становится кусочно-гармонической функцией. Более того, как показано в [7], первая из этих функций, f_0 , ограниченная на $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, является *субгармонической функцией*, т. е. функцией, к которой применим принцип максимума: если f_0 имеет локальный максимум на комплексном подмногообразии $\mathcal{L}$, то она постоянна на этом подмногообразии.

Нашей следующей целью является построение локальных координат в окрестности произвольной точки (Γ_0, Ψ_0) страта $\mathcal{M}_{g,k}^{(m)} \subset \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$. Обозначим через $\mathcal{C}$ универсальную кривую над $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, т. е. расслоение, слоем которого над $(\Gamma, \Psi) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ является сама кривая Γ . Отмеченные точки определяют сечения s_α универсальной кривой $\mathcal{C}$. Выбор локальных координат z_α в окрестностях точек p_α на каждой из кривых Γ в окрестности кривой Γ_0 эквивалентен выбору локальной тривиализации окрестности сечения s_α в $\mathcal{C}$. После фиксации такой тривиализации коэффициенты $r_{\alpha,i}$ лорановского разложения сингулярной части дифференциала Ψ в окрестности точки p_α ,

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,i} z_\alpha^{-i-1} dz_\alpha + O(1) dz_\alpha, \quad (8)$$

можно рассматривать как локальные функции на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$.

Если $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(m)}$, то можно выбрать окрестность U_ε точки (Γ_0, Ψ_0) в $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ так, что в этой окрестности будут справедливы следующие неравенства:

$$0 < r < |r_{\alpha,m_\alpha}|, \quad |r_{\alpha,i}| < \varepsilon, \quad i = m_\alpha + 1, \dots, n_\alpha, \quad (9)$$

где r является константой.

Для достаточно малых значений ε дифференциал Ψ имеет $d_g^{(m)} + 1$ нулей q_s вне окрестностей отмеченных точек p_α , которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулям дифференциала Ψ_0 на Γ_0 . Оставшиеся $\sum_\alpha (n_\alpha - m_\alpha)$ нулей дифференциала Ψ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к отмеченным точкам p_α . Напомним, что критические значения интеграла F зависят от выбора константы c в (5). При выбранной ранее нормировке $\sum_s \varphi_s = 0$, фиксирующей эту константу, все критические значения могут не иметь конечного предела на $\mathcal{M}_{g,1}^{(m)}$. Определим «конечные критические значения» φ_s , $s = 0, \dots, d_g^{(m)}$, интеграла F в окрестности U_ε нормировкой $\sum_{s=0}^{d_g^{(m)}} \varphi_s = 0$.

Определим теперь в $U_\varepsilon \subset \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ следующий набор функций $\{x_A\}$:

- (i) коэффициенты $r_{\alpha,i}$, $i = m_\alpha + 1, \dots, n_\alpha$, в разложении (8);
- (ii) конечные критические значения φ_s , $s = 1, \dots, d_g^{(m)}$, если нули дифференциала Ψ_0 простые; если Ψ_0 имеет кратный нуль $q_{s_1} = \dots = q_{s_r}$, то соответствующий поднабор конечных критических значений интеграла F должен быть заменен симметрическими полиномами.

Лемма 2.9. В окрестности точки $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)} \subset \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ следующие функции: периоды $a_j, b_j, j = 1, \dots, g$, дифференциала Ψ , а также вещественные и мнимые части функций x_A (см. пп. (i), (ii) выше) — имеют линейно независимые дифференциалы и, значит, определяют вещественно-аналитическую систему координат на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$.

Доказательство леммы 2.9 аналогично доказательству теоремы 1 в [12]. Представим его ключевые моменты. Предположим, что дифференциалы рассматриваемых функций линейно зависимы в точке (Γ_0, Ψ_0) . Тогда существует однопараметрическое семейство точек $(\Gamma_t, \Psi_t) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ (t вещественно), такое, что производные всех функций по этому параметру равны нулю при $t = 0$.

Напомним, что локально на каждой из кривых Γ_t уже выбран базис циклов A_j, B_j (необходимых для определения периодов (4)). Рассмотрим базис голоморфных дифференциалов $\omega_j(t)$ на Γ_t , двойственных циклам A_j . Обозначим через $v_j(p, t) := \int_{q_1(t)}^p \omega_i(t)$ соответствующие абелевы интегралы — многозначные функции от $p \in \Gamma_t$, зависящие от выбора пути интегрирования. Через $F_t(p) := \int_{q_1(t)}^p \Psi_t$ обозначим интеграл нашего выбранного мероморфного дифференциала вдоль того же пути.

Рассмотрим теперь, как v_j изменяется при вариации параметра t . Для того чтобы придать смысл частной производной по параметру, необходимо определить, как варьируются точки p при вариации кривой Γ_t . Для этого воспользуемся интегралом F_t для определения локальной координаты на универсальной кривой Γ . После этого вариация точки p при вариации параметра t определяется из неявного уравнения $F = F_t(p)$. Иными словами, фиксация F позволяет ввести связность на пространстве абелевых интегралов.

Нашей целью является доказательство того, что при сделанных предположениях частные производные при фиксированном F

$$\partial_t v_j(F) := \frac{\partial}{\partial t} v_j(F_t^{-1}(F), t) \Big|_{t=0} \quad (10)$$

обращаются в нуль. Рассмотрим поверхность Γ_t , разрезанную вдоль базисных циклов, и предположим, что пути интегрирования $\int_{q_1(t)}^p$ во всех определениях абелевых интегралов выбраны так, что они не пересекают разрезы. Тогда выражение (10) определяет на разрезанной кривой Γ_0 мероморфную функцию с возможными полюсами в нулях дифференциала Ψ (там, где F^{-1} сингулярна) и с возможными скачками на разрезах. Однако, если при вариации параметра t периоды дифференциала Ψ_t не меняются, то скачки выражения (10) на разрезах постоянны. Кроме того, если критические значения φ_s остаются постоянными, то выражение (10) не имеет полюсов в нулях дифференциала Ψ . Частные производные при фиксированном F и при фиксированном z_α (определяющем тривиализацию окрестности $p_{\alpha,t} \in \Gamma_t$) связаны соотношением

$$\partial_t v_j(F) = \partial_t v_j(z_\alpha) - \frac{\omega_j}{\Psi_0} \partial_t F(z_\alpha) \Big|_{t=0}. \quad (11)$$

В силу нашего предположения первые $n_\alpha - m_\alpha$ ведущих коэффициентов разложения (8) не меняются. Тогда из (11) следует, что (10) не имеет полюса в

точке p_α . Таким образом, мы получаем, что дифференциал выражения (10) является голоморфным дифференциалом на Γ_0 с нулевыми A -периодами. Следовательно, этот дифференциал тождественно равен нулю, а значит, равны нулю и его B -периоды. Поскольку B -периоды ω_j составляют матрицу периодов τ на Γ_t , мы получаем, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij}(t) \right|_{t=0} = 0,$$

Инфинитезимальный вариант теоремы Торелли утверждает, что дифференциал отображения периодов $\tau: \mathcal{M}_g \rightarrow A_g$ невырожден вне подмногообразия гиперэллиптических кривых. Следовательно, предшествующее равенство возможно, лишь если Γ_0 является гиперэллиптической кривой. Для гиперэллиптических кривых ядро гомоморфизма $d\tau$ одномерно и трансверсально к касательному пространству подмногообразия гиперэллиптических кривых. Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что если Γ_0 является гиперэллиптической, то касательный вектор к семейству кривых Γ_t при $t = 0$ является касательным к подмногообразию гиперэллиптических кривых. Доказательство последнего утверждения совпадает с доказательством его аналога в [12].

Следствие 2.10. *Набор функций x_A определяет комплексную систему координат вдоль листа $\mathcal{L}$ слоения, проходящего через точку (Γ_0, Ψ_0) .*

В дальнейшем нам потребуется частичная компактификация пространства $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$. Пространство вещественно-нормированных дифференциалов инвариантно относительно умножения на *вещественные числа*. Обозначим через $\mathcal{P}_{g,k}^{(n)} = \mathcal{M}_{g,k}^{(n)} / R_+$ факторпространство пространства вещественно-нормированных дифференциалов по действию мультипликативной группы вещественных положительных чисел. Слоем отображения забывания $\mathcal{P}_{g,k}^{(n)} \rightarrow \mathcal{M}_g$ является пространство нетривиальных «нормированных» сингулярных частей. Последнее может быть отождествлено со сферой $S^{2|n|-1}$.

Структура канонического слоения, определенного выше на $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, индуцирует структуру слоения на $\mathcal{P}_{g,k}^{(n)}$.

Определение 2.11. Лист $[\mathcal{L}]$ слоения на $\mathcal{P}_{g,k}^{(n)}$ определяется как проекция подмножества в $\mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, вдоль которого отношение произвольных двух периодов остается постоянным (если оба периода равны нулю, то они должны оставаться нулевыми).

Умножение на вещественные числа действует «трансверсально» всем листам $\mathcal{L}$ слоения, за исключением листа Гурвица $\mathcal{L}_0$, соответствующего точным дифференциалам. Следовательно, лист $[\mathcal{L}]$, проходящий через точку $(\Gamma, [\Psi]) \in \mathcal{P}_{g,k}^{(n)}$, которая не принадлежит образу проекции листа $\mathcal{L}_0$, локально изоморфен листу $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$, проходящему через точку $(\Gamma, \Psi) \in \mathcal{M}_{g,k}^{(n)}$ в прообразе точки $(\Gamma, [\Psi])$. Следовательно, на $[\mathcal{L}]$ имеется естественная комплексная структура. (Отметим, что мы уже не можем говорить о $[\mathcal{L}]$ как о локальном комплексном подмногообразии, поскольку $\mathcal{P}_{g,k}^{(n)}$ не является комплексным многообразием.)

Лист $[\mathcal{L}_0]$ является сингулярным листом слоения. Он не является комплексным, а его вещественная размерность на единицу меньше, чем размерность всех остальных листов. Он является S^1 -расслоением над пространством Гурвица.

§3. Двойственные циклы и периоды

В этом параграфе мы введем еще одно понятие, необходимое для доказательства гипотезы Арбарелло: понятие циклов, двойственных критическим точкам вещественно-нормированных дифференциалов.

Для простоты мы рассмотрим только случай $(\Gamma, \Psi) \in \mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$ вещественно-нормированных дифференциалов, имеющих полюс только в одной точке ($k = 1$). Следствием вещественной нормировки является то, что мнимая часть $\Phi = \text{Im } F$ абелева интеграла F является однозначной гармонической функцией на $\Gamma \setminus p_1$. Линии уровня $\Phi_h := \{p \in \Gamma : \Phi(p) = h\}$ этой функции представляют собой набор циклов, гладких всюду, кроме отмеченной точки p_1 и критических точек q_s , если $h = f_s = \Phi(q_s)$. Для достаточно больших $h \gg f_0$ соответствующая линия уровня представляет собой набор из n «петель» в малой окрестности точки p_1 . Вещественная часть интеграла $F(p)$ многозначна. Тем не менее всюду, кроме нулей дифференциала Ψ , корректно определены направления, вдоль которых вещественная часть интеграла F остается (локально) постоянной. Назовем интегральные линии этих направлений *мнимыми* лучами. Будем предполагать, что они ориентированы так, что вдоль ориентации функция Φ возрастает. Зафиксируем в малой окрестности точки p_1 однозначную ветвь интеграла F . Если мнимый луч, выходящий из точки p , не проходит через нули дифференциала Ψ , то значение функции F , взятое в точках луча в окрестности точки p_1 , определит вещественную часть интеграла $F(p)$. Это позволяет определить однозначную голоморфную ветвь интеграла $F(p)$ на $\Gamma \setminus \Sigma$, где Σ — это граф на поверхности, ребрами которого являются мнимые лучи, начинающиеся в p_1 или в нулях дифференциала Ψ и заканчивающиеся в нулях дифференциала Ψ . По непрерывности функция F может быть продолжена на Γ с разрезами вдоль ребер графа Σ . Пределы $F^\pm(p)$, $p \in \Sigma$, на двух сторонах разреза в общем случае различны. Разрывность функции F , т. е. функция скачка $j(p) := F^+(p) - F^-(p)$, постоянна на каждом из ребер графа.

Рассмотрим открытое подмножество $\mathcal{D}$ пространства $\mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$, где соответствующие дифференциалы имеют простые нули с «различными» вещественными частями критических значений. Последнее означает, что мнимые лучи, выходящие из произвольного нуля дифференциала, не содержат других нулей, т. е. они кончаются в отмеченной точке p_1 . В этом случае граф состоит из $2g + n - 1$ связных компонент Σ_s . Каждая компонента является объединением двух лучей, выходящих из p_1 и оканчивающихся в одном из нулей q_s дифференциала Ψ . Вдоль этих лучей мнимая часть Φ возрастает от $-\infty$ до f_s , т. е. каждый из нулей q_s является «вершиной» компоненты Σ_s . В тоже самое время из каждого нуля q_s выходят два мнимых луча, заканчивающиеся в отмеченной точке p_1 . Вдоль этих лучей Φ возрастает от f_s до $+\infty$. Обращая ориентацию одного из этих лучей, мы можем определить на кривой замкнутый ориентированный цикл σ_s .

Хотя дифференциал Ψ сингулярен на σ_s , его период, соответствующий классу гомологий $[\sigma_s] \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, корректно определен (напомним, что Ψ не имеет

вычета в p_1). Этот период равен

$$\pi_s := \oint_{[\sigma_s]} \Psi = r_s^1 - r_s^2, \quad (12)$$

где r_s^1, r_s^2 — это значения вещественной части интеграла $F(q_s)$, асимптотически определенные вдоль каждого из мнимых лучей. Отметим, что на ребрах графа Σ функция скачка равна $j(p) = \pi_s, p \in \Sigma_s$.

Замечание 3.1. В простейшем случае вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом второго порядка ($n = 1$) конструкция двойственных циклов выглядит особенно привлекательной. В этом случае, если Ψ имеет простые нули с различными вещественными частями критических значений, то имеется ровно $2g$ двойственных циклов. Легко убедиться в том, что каждый из этих циклов является представителем нетривиального класса гомологий. Действительно, для $n = 1$ абелев интеграл F имеет простой полюс в p_1 . Следовательно, период дифференциала Ψ вдоль $[\sigma_s]$ никогда не равен нулю, $\pi_s \neq 0$. Значит, и цикл не гомологичен нулю, $[\sigma_s] \neq 0$. Как будет показано ниже, классы $[\sigma_s]$ линейно независимы, а значит, они задают базис в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ (см. лемму 3.2 ниже).

В точках (Γ, Ψ) , где Ψ имеет кратный нуль или где имеются критические значения интеграла F с «совпадающими» вещественными частями, структура графа Σ может быть комбинаторно нетривиальной. Тем не менее для каждого из нулей q_s дифференциала Ψ имеется только *конечное* число (произвольно упорядоченных) полубесконечных путей γ_s^i вдоль мнимых направлений, которые начинаются в q_s и заканчиваются в p_1 . Пара таких путей определяет ориентированный цикл $\sigma_s^{ij} = \gamma_s^i \cup (-\gamma_s^j), i < j$.

Лемма 3.2. *Классы гомологий $[\sigma_s^{ij}]$ двойственных циклов порождают группы гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$.*

Доказательство леммы — это еще одно упражнение на использование аргументов, введенных в [12], которые, в слегка обобщенном виде, уже приводились при доказательстве теоремы 2.6. Действительно, предположим, что классы $[\sigma_s^{ij}]$, определенные дифференциалом Ψ_0 на кривой Γ_0 , не порождают $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$. Тогда в силу теоремы 1 из [12] существует однопараметрическая деформация $(\Gamma_t, \Psi_t) \in \mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$, такая, что производные критических значений φ_s и периодов π_s^{ij} вдоль этого семейства равны нулю при $t = 0$.

Напомним еще раз, что локально мы всегда можем предполагать, что на каждой из кривых Γ_t выбран базис A_j, B_j циклов. Как и ранее, обозначим через $\omega_j(t)$ базис голоморфных дифференциалов на Γ_t , двойственным циклам A_j . Зафиксируем ветвь соответствующего абелева интеграла v_j в секторах окрестности точки p_1 , где $\Phi \rightarrow +\infty$. Аналитически продолжая эту ветвь вдоль мнимых лучей (с обращенной ориентацией), мы можем определить однозначную ветвь интеграла v_j на $\Gamma_t \setminus \Sigma_t$, а затем продолжить ее по непрерывности на две стороны каждого из ребер графа Σ_t . Скачки интеграла v_j на ребрах графа являются линейными комбинациями периодов дифференциала ω_j вдоль двойственных циклов. Как и ранее, рассмотрим частную производную $\partial_t v_j(F, t)$ при фиксированном F в начальный момент $t = 0$. Если производные критических значений φ_s и скачков интеграла F на ребрах графа Σ равны нулю (что предполагается), то производная $\partial_t v_j(F, t)|_{t=0}$ является голоморфной функцией на $\Gamma_0 \setminus \Sigma_0$ и имеет постоянные скачки на ребрах графа Σ_0 . Значит, дифференциал

этого выражения является голоморфным дифференциалом на Γ_0 с нулевыми A -периодами. Следовательно, он тождественно равен нулю. Из этого вытекает, что производная матрицы b -периодов ω_j вдоль семейства равна нулю при $t = 0$. Оставшиеся шаги доказательства тождественны доказательству в [12].

Обозначим через r_s^i «вещественные значения» интеграла $F(q_s)$, асимптотически определяемые путями γ_s^i . Тогда периоды дифференциала Ψ вдоль двойственных циклов равны

$$\pi_s^{ij} := \oint_{[\sigma_s^{ij}]} \Psi = r_s^i - r_s^j. \quad (13)$$

Отметим также, что скачки $j(p)$ на ребрах графа Σ являются линейными комбинациями этих периодов.

§4. Доказательство гипотезы Арбарелло

Для мотивации дальнейших шагов доказательства гипотезы Арбарелло приведем еще одно доказательство теоремы Диаса, использующее вещественно-нормированные дифференциалы с одним полюсом второго порядка.

Еще раз о теореме Диаса. Определим «взвешенные критические значения» ϕ_s интеграла F формулой

$$\phi_s = \frac{\varphi_s}{|\pi_s|}, \quad |\pi_s| := \min_{ij} \{|\pi_s^{ij}| \neq 0\}, \quad (14)$$

где минимум берется по конечному набору ненулевых двойственных периодов. Как уже подчеркивалось в замечании 3.1, по крайней мере один из периодов, двойственных критической точке вещественно-нормированного дифференциала с одним полюсом второго порядка, не равен нулю. Следовательно, ϕ_s является корректно определенной локальной функцией на $\mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$. Мнимые части взвешенных критических значений $g_s = \text{Im } \phi_s$ зависят только от нумерации критических точек. Если их упорядочить по убыванию,

$$g_0 \geq g_1 \geq \dots \geq g_{2g-2} \geq g_{2g-1}, \quad (15)$$

то после этого каждая из функций g_s может восприниматься как корректно определенная функция на $\mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$ (ср. с замечанием 2.8). Она непрерывна на открытой части $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$, где соответствующие дифференциалы Ψ имеют простые нули с «различными» вещественными частями критических значений. (Напомним, что последнее означает, что мнимые лучи, выходящие из одного из нулей дифференциала, не содержат других нулей.) Более того, функция g_s , ограниченная на $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, является кусочно гармонической.

Из определения (14) следует, что значение функции g_s в любой точке из $\mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$ равно максимуму из пределов в этой точке значений функции g_s на $\mathcal{D}$. Следовательно, g_s является *полунепрерывной сверху* функцией на $\mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$.

Лемма 4.1. *Функция g_0 , ограниченная на произвольное комплексное подмногообразие в $\mathcal{L}$, имеет локальный максимум тогда и только тогда, когда она является константой на этом подмногообразии.*

Доказательство. По определению $\mathcal{L}$ периоды π_s постоянны на $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$. Следовательно, на $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ функция g_0 как максимум гармонических функций является субгармонической. Для того чтобы показать, что g_0 является субгармонической в точках разрыва, достаточно заметить, что направления ее разрыва, соответствующие изменению вещественной части $\operatorname{Re} \varphi_0$, всегда трансверсальны направлениям изменения мнимой части $\operatorname{Im} \varphi_0$.

Рассмотрим компактный комплексный цикл X в $\mathcal{M}_g$. Его прообраз Y при отображении $\mathcal{M}_{g,1}^{(1)} \rightarrow \mathcal{M}_g$ не компактен, однако факторпространство $Z = Y/R_+$ является компактным. Функция g_0 однородна относительно умножения вещественно-нормированных дифференциалов на положительные вещественные числа. Следовательно, она определяет полунепрерывную сверху функцию g'_0 на пространстве $\mathcal{P}_{g,1}^{(1)}$. Поскольку Z компактно, то существует точка $(\Gamma_0, [\Psi_0]) \in Z$, в которой g'_0 достигает своего максимума на Z . Выберем прообраз $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$ этой точки. В этом прообразе функция g_0 достигает своего максимума на Y .

Рассмотрим лист $\mathcal{L}$, проходящий через $(\Gamma_0, \Psi_0) \in \mathcal{M}_{g,1}^{(1)}$. В этой точке g_0 , ограниченная на $\mathcal{L} \cap Y$, имеет локальный максимум. В силу леммы 4.1 функция g_0 должна быть постоянной на $\mathcal{L} \cap Y$.

Обозначим через $Y_0 \in Y$ прообраз компактного множества $Z_0 \subset Z$, на котором g'_0 принимает максимальное значение. На этом подмножестве вторая функция g'_1 достигает своего максимального значения. Как было показано выше, Y_0 расслоено листами $\mathcal{L} \cap Y$. На этих листах g_1 является субгармонической, т. е. она должна быть константой. Продолжая по индукции, мы получим, что все функции g_s постоянны на $\mathcal{L} \cap Y$. Если g_s постоянны, то и критические значения φ_s (локально) постоянны на $\mathcal{L} \cap Y$. Функции φ_s являются локальными координатами на $\mathcal{L}$. Следовательно, $\mathcal{L} \cap Y$ не более чем нульмерно. Но если размерность цикла X больше чем $g - 2$, то $\mathcal{L} \cap Y$ по крайней мере одномерно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Диаса. $\square$

Изложенное выше доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы Диаса в работе [7] с единственным (но важным) изменением: заменой критических значений для дифференциалов третьего рода на взвешенные критические значения для дифференциалов второго рода. Доказательство гипотезы Арбарелло требует дополнительных модификаций аргументов, вызванных следующими обстоятельствами: (а) периоды по циклам, двойственным критическим значениям вещественно-нормированного дифференциала с полюсом порядка выше второго, могут обращаться в нуль, (б) только часть критических значений имеет конечный предел на меньших стратах $\mathcal{M}_{g,1}^{(m)}$. Отметим, что эти два обстоятельства связаны между собой, по крайней мере, в окрестности U_ε страта $\mathcal{M}_{g,1}^{(m)}$, $m < n$. Действительно, при достаточно малых ε периоды по циклам, двойственным критическим точкам в малой окрестности точки p_1 , всегда нулевые, поскольку сами циклы гомологически тривиальны.

Введем на $\mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$ соответствующую стратификацию. Во-первых, для $(\Gamma, \Psi) \in \mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$ рассмотрим подмножество S критических точек дифференциала Ψ , для которых по крайней мере один из периодов этого дифференциала по двойственным циклам σ_s^{ij} не равен нулю, т. е. $\{q_s \in S : \text{существует } \pi_s^{ij} \neq 0\}$.

Определение 4.2. Определим подмножество $\mathcal{S}_k$ пространства $\mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$ условием, что дифференциал Ψ имеет в точности k нулей с ненулевыми двойственными периодами, $|S| = k$.

В точках множества $\mathcal{S}_k$ нормируем критические значения условием $\sum_{q_s \in S} \varphi_s = 0$. После этого, как и ранее, мнимые части $\text{Im } \phi_s$, $s \in S$, взвешенных критических значений (14) могут быть упорядочены в порядке убывания:

$$w_0^k \geq \dots \geq w_{k-1}^k, \quad (16)$$

После этого w_j^k могут рассматриваться как корректно определенные полунепрерывные сверху функции на $\mathcal{S}_k$. Функции w_j^k непрерывны на $\mathcal{S}_k \cap \mathcal{D}$, а функция w_0^k является субгармонической на $\mathcal{S}_k \cap \mathcal{L}$.

Вдоль листа $\mathcal{L}$ периоды дифференциала Ψ по любому непрерывно варьируемому циклу остаются постоянными. Поэтому точки разрыва функции $|S|$ вдоль листа, — это точки, в которых один из нулей дифференциала q_s при вариации, при которой вещественная часть его критического значения становится отличной от остальных, «исчезает из множества S ». Отметим, что если q_s исчезает из множества S при вариации, при которой он оказывается по одну сторону ребра графа Σ , то он остается в множестве S при вариациях, при которых он оказывается по другую сторону ребра. Это означает, что пересечение $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{S}_k}$ является комплексной областью с границей. Мнимая часть исчезающего критического значения должна быть меньше, чем мнимая часть одного из критических значений, отвечающих верхней части ребра графа, которое исчезающее критическое значение пересекает при вариации. При этом нетривиальные периоды q_s (до вариации) совпадают с периодами, двойственным вершине ребра. Следовательно, исчезающее взвешенное критическое значение удовлетворяет неравенству $\text{Im } \phi_s \leq w_0^k$. Значит, на пересечении границ областей $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{S}_k}$ и $\mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{S}_{k+1}}$ значения функций w_0^k и w_0^{k+1} совпадают. Тем самым на каждом из листов $\mathcal{L}$ корректно определена субгармоническая функция $W_0^{\mathcal{L}}$. Особо подчеркнем, что проведенный анализ справедлив только при ограничении рассмотрений на листы слоений. При вариациях, меняющих периоды, исчезающее критическое значение может стремиться к бесконечности и никакой глобально определенной функции W_0 не существует.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы.

Теорема 4.3. *Любой компактный комплексный цикл в $\mathcal{M}_g$ размерности не меньше чем $g - n$ пересекает подмногообразие $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{M}_g$ гладких алгебраических кривых рода g , на которых имеется точка Вейерштрасса порядка не выше n .*

Доказательство. Предположим, что компактный комплексный цикл X в $\mathcal{M}_g$ не пересекается с $\mathcal{W}_n$. Тогда его прообраз Y при отображении $\mathcal{M}_{g,1}^{(n)} \rightarrow \mathcal{M}_g$ не пересекает лист $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{M}_{g,1}^{(n)}$ — лист, отвечающий точным дифференциалам. Следовательно, для каждой точки $(\Gamma, \Psi) \in Y$ соответствующее подмножество S критических значений всегда непусто. Обозначим через k_0 минимальное значение функции $|S|$ на Y , т. е. минимальное число k , для которого подмножество $Y^k = \mathcal{S}_k \cap Y$ непусто.

Для произвольного k множество Y^k незамкнуто, в частности, поскольку существуют предельные точки с исчезающими периодами. Хотя k_0 является минимальным из возможных значений k , подмножество Y^{k_0} , возможно, не замкнуто относительно вариаций вдоль слоев. Его предельные точки в $\mathcal{L}$, не принадлежащие ему, — это точки границ областей $Y^k \cap \mathcal{L}$, $k > k_0$, в которых имеются «исчезающие» критические значения. Как было показано выше, функция $w_0^{k_0}$ непрерывно продолжается на замыкание $\overline{Y^{k_0}}$.

Факторпространство Z^{k_0} замыкания $\overline{Y^{k_0}}$ компактно. Функция $w_0^{k_0}$ индуцирует полунепрерывную сверху функцию w'_0 на Z^{k_0} , которая достигает своего максимума в какой-то точке. Рассмотрим лист $\mathcal{L}$ слоения, проходящий через какой-либо прообраз этой точки в Y^{k_0} . Пересечение $\mathcal{L} \cap \overline{Y^{k_0}}$ является комплексной областью с (возможно) границей. Как уже было показано выше, $w_0^{k_0}$ является субгармонической как во внутренних точках области, так и на ее границе. Следовательно, $w_0^{k_0}$ должна быть постоянной на $\mathcal{L} \cap \overline{Y^{k_0}}$. Если она — константа, то следующая функция $w_1^{k_0}$ является субгармонической и, значит, тоже должна быть константой. Продолжая по индукции, мы получим, что все функции $w_s^{k_0}$ постоянны на $\mathcal{L} \cap Y^{k_0}$. Если $w_s^{k_0}$ постоянны, то и соответствующие критические значения $\varphi_s, q_s \in S$, постоянны на $\mathcal{L} \cap Y^{k_0}$.

Рассмотрим теперь подмножество $Y_0 \subset Y$, такое, что среди нулей соответствующего дифференциала найдется набор k_0 нулей, такой, что: (а) упорядоченный набор $w_0 \geq \dots \geq w_{k_0}$ мнимых частей критических значений постоянен вдоль листов слоения; (b) мнимая часть первого из этих критических значений нормирована условием $f_0 = 1$. Отметим, что последнее условие фиксирует поднятие $Y_0/R_+ \subset Z = Y/R_+$ в Y .

Подмножество Y_0 компактно (и, как показано выше, непусто). На этом подмножестве непрерывная функция $\tilde{f} = \max_{s \in S} \operatorname{Im} \phi_s$ достигает своего максимального значения. (Напомним, что нули q_s , $s \in S$, отделены от p_1 , поэтому функция $\tilde{f}$ ограничена на Y .) Функция $\tilde{f}$, ограниченная на любой лист слоения, является субгармонической. Из этого следует, что вдоль $Y_0 \cap \mathcal{L}$ все критические значения с ненулевыми двойственными периодами остаются постоянными.

Предположим теперь, что по крайней мере одно из остающихся критических значений $\varphi_s, q_s \notin S$, не является константой на $\mathcal{L} \cap Y^{k_0}$; тогда при вариации вдоль $\mathcal{L} \cap Y^{k_0}$ соответствующий нуль q_s пересечет неподвижное ребро графа Σ с нетривиальным скачком. После этого по крайней мере один из периодов, двойственных к q_s , станет ненулевым. Если критическое значение φ_s становится постоянным после пересечения графа, то оно должно быть постоянным и до пересечения. Следовательно, все критические значения постоянны на $\mathcal{L} \cap Y_0$. Из определения Y_0 следует, что $\mathcal{L} \cap Y_0 = \mathcal{L} \cap Y$. Если φ_s постоянны, то $\mathcal{L} \cap Y$ не более чем нульмерно. Это противоречит предположению, что размерность цикла X не меньше чем $g - n$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Arbarello, *Weierstrass points and moduli of curves*, Compositio Math., **29** (1974), 325–342.
- [2] E. Arbarello, G. Mondello, *Two remarks on the Weierstrass flag*, in: Compact Moduli spaces and Vector Bundles, Contemporary Mathematics (Proceedings) series, vol. 564 (to appear).

- [3] *Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations* (eds. H. W. Braden, I. M. Krichever), Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000.
- [4] S. Diaz, *Exceptional Weierstrass points and the divisor on moduli space that they define*, Mem. Amer. Math. Soc., **56**:327 (1985).
- [5] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Integrability and Seiberg–Witten exact solution*, Phys. Lett. B, **355** (1995), 466–474.
- [6] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых*, Мир, М., 2004.
- [7] S. Grushevsky, I. Krichever, *The universal Whitham hierarchy and geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces*, in: Surveys in Differ. Geom., vol. 14, Int. Press, Somerville, MA, 2010, 111–129.
- [8] S. Grushevsky, I. Krichever, *Foliations on the moduli space of curves, vanishing in cohomology, and Calogero–Moser curves*, <http://arxiv.org/abs/1108.4211>.
- [9] И. М. Кривчев, *Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса*, Функц. анализ и его прил., **20**:3 (1986), 42–54.
- [10] И. М. Кривчев, *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений*, Функц. анализ и его прил., **22**:3 (1988), 37–52.
- [11] I. Krichever, *The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models, and topological field theories*, Comm. Pure Appl. Math., **47**:4 (1994), 437–475.
- [12] I. Krichever, D. H. Phong, *On the integrable geometry of $N = 2$ supersymmetric gauge theories and soliton equations*, J. Differential Geom., **45** (1997), 445–485.
- [13] I. Krichever, D. H. Phong, *Symplectic forms in the theory of solitons*, in: Surveys in Differ. Geom., vol. 4, Int. Press, Boston, MA, 1998, 239–313.
- [14] E. Looijenga, *On the tautological ring of $\mathcal{M}_g$* , Invent. Math., **121**:2 (1995), 411–419.

Columbia University, New York, USA
Институт теоретической физики РАН им. Ландау
Институт проблем передачи информации РАН
им. Харкевича, Москва
e-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
16 января 2012 г.