Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 52–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:04:36

Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона

© 2012. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Рассматривается пространство $A(\mathbb{T})$ непрерывных функций f на окружности $\mathbb{T}$, таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит $l^1(\mathbb{Z})$. Норма в $A(\mathbb{T})$ определяется соотношением $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z})}$. Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона, если $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение, такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то φ линейно. Кахану принадлежит гипотеза о том, что то же заключение относительно φ верно в предположении, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log |n|)$. В работе показано, что если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o((\log \log |n| / \log \log \log |n|)^{1/12})$, то φ линейно.

Мы рассматриваем класс $A(\mathbb{T})$ непрерывных функций f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ряды Фурье которых

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

абсолютно сходятся. Здесь $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел и $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции f ,

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Класс $A(\mathbb{T})$ является банаховым пространством относительно естественной нормы

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|.$$

Хорошо известно, что $A(\mathbb{T})$ — банахова алгебра (с обычным умножением функций).

Мы отождествляем непрерывные отображения φ окружности $\mathbb{T}$ в себя и непрерывные функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

Напомним известную теорему Берлинга–Хелсона [1] (см. также [2], [3]). Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение, такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

тогда φ линейно (с целым угловым коэффициентом), т.е. $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, где $\nu \in \mathbb{Z}$. Из этой теоремы немедленно вытекает решение проблемы Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$: все эти эндоморфизмы тривиальны, т.е. имеют вид $f(t) \rightarrow f(\nu t + t_0)$. Другими словами, лишь тривиальные замены переменной допустимы в $A(\mathbb{T})$. Отметим также еще одну версию теоремы

Берлинга–Хелсона: если U — ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в $l^1(\mathbb{Z})$, такой, что $\|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $U = \xi S$, где ξ — комплексное число, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига.

Характер роста норм $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ во многом неясен. Отметим некоторые известные результаты. Легко показать (см. [2, гл. VI, §3]), что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\sqrt{|n|})$ для всякого C^1 -гладкого отображения φ . Вместе с тем, если отображение φ является C^2 -гладким и нелинейно, то

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq c\sqrt{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $c = c(\varphi)$ не зависит от n . Эта оценка снизу неявно содержится в работе Лейбензона [4] и в явном виде получена Каханом в [5] с использованием метода Лейбензона (см. простое доказательство в [2, гл. VI, §3]). Таким образом, для любого нелинейного C^2 -гладкого отображения φ

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \sqrt{|n|}, \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Рост норм $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ в C^1 -гладком случае рассматривался автором настоящей статьи в [6], [7] (см. также [8], где мы рассматривали функции многих переменных). Отметим, что C^1 -гладкий случай существенно отличается от C^2 -гладкого.

Вообще говоря, нормы $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ могут расти довольно медленно. Кахан [2, гл. VI, §2] показал, что если $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — кусочно линейное, но не линейное непрерывное отображение, то $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log |n|$.

Неизвестно, могут ли нормы $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ расти медленнее, чем $\log |n|$ (для нелинейных непрерывных отображений φ). Кахану принадлежит гипотеза о том, что теорема Берлинга–Хелсона может быть значительно усилена, в частности, он предположил, что условие

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log |n|), \quad |n| \rightarrow \infty,$$

влечет за собой линейность отображения φ . Насколько известно автору, впервые эта гипотеза была сформулирована Каханом в докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 г. [9]. Позднее эта гипотеза отмечалась Каханом в [2] и [3]¹⁾.

Здесь мы получим следующую теорему.

Теорема. Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Предположим, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\left(\frac{\log \log |n|}{\log \log \log |n|}\right)^{1/12}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Тогда φ линейно, т. е. $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Идеологически доказательство нашей теоремы до некоторой степени близко к доказательству теоремы Берлинга–Хелсона, изложенному Каханом в [3] (доказательство в [3] основано на совершенно другой идее, нежели оригинальное доказательство Берлинга и Хелсона в [1], [2]). Мы модифицируем рассуждения Кахана и применяем их не к группе $\mathbb{T}$, а к циклической группе $\mathbb{T}_N$ при больших N , и не к самому отображению φ , а к отображению φ_N , которое на $\mathbb{T}_N$

¹⁾ Отметим, что априори существование последовательности $\omega_n \rightarrow \infty$, такой, что условие $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\omega_n)$ влечет за собой линейность отображения φ , не очевидно.

хорошо приближает отображение φ и значения которого — рациональные числа «с малым общим знаменателем». Такое отображение строится при помощи теоремы Дирихле о совместных диофантовых приближениях. Ключевую роль в доказательстве играет результат, полученный недавно Грином и Конягиным [10, теорема 1.3].

Прежде чем доказывать теорему, введем нужные обозначения, напомним некоторые (вполне стандартные, см., например, [11]) факты гармонического анализа на $\mathbb{T}_N$ и приведем теорему Грина–Конягина.

Пусть G — конечная абелева группа. Введем на ней нормированную считающую меру μ_G , поместив в каждую точку $x \in G$ массу $1/(\text{card } G)$ (через $\text{card } X$ обозначается число элементов произвольного конечного множества X). Таким образом, если $E \subseteq G$, то

$$\mu_G(E) = \frac{\text{card } E}{\text{card } G},$$

и если f — (комплексная) функция на G , то

$$\int_G f(x) d\mu_G(x) = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{x \in G} f(x).$$

Мы часто будем писать $\int_G f(x) dx$ или $\int_G f d\mu_G$ вместо $\int_G f(x) d\mu_G(x)$.

Положим

$$\|f\|_{L^2(G)} = \left(\int_G |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{L^\infty(G)} = \max_{x \in G} |f(x)|.$$

Вообще, для произвольного множества $E \subseteq G$ и функции f на E положим

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \max_{x \in E} |f(x)|.$$

Всякая конечная абелева группа G с мерой μ_G является вероятностным пространством. Удобно рассмотреть общий случай. Пусть $(\mathbb{X}, \mu)$ — вероятностное пространство. Для произвольного множества $E \subseteq \mathbb{X}$ через 1_E будем обозначать его характеристическую функцию: $1_E(x) = 1$ при $x \in E$ и $1_E(x) = 0$ при $x \notin E$. Для произвольного μ -измеримого множества $E \subseteq \mathbb{X}$ положим

$$\delta_{\mathbb{X}, \mu}(E) = \min(\mu(E), 1 - \mu(E)).$$

Ясно, что всегда $0 \leq \delta_{\mathbb{X}, \mu}(E) \leq 1/2$. Если величина $\delta_{\mathbb{X}, \mu}(E)$ очень мала, то множество E или «очень мало», или «очень велико» (т. е. его дополнение мало).

Через $\mathbb{T}_N$ обозначим циклическую группу:

$$\mathbb{T}_N = \left\{ \frac{2\pi j}{N}, j = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

рассматриваемую как подгруппа в $\mathbb{T}$ (сложение осуществляется по $\text{mod } 2\pi$). Характерами на $\mathbb{T}_N$ являются функции e_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, заданные следующим образом:

$$e_k\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = e^{ik2\pi j/N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Мы реализуем группу, двойственную к $\mathbb{T}_N$, в виде группы

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\},$$

рассматриваемой со сложением по $\text{mod } N$. Если f — произвольная функция на $\mathbb{T}_N$, то ее преобразование Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}_N\}$ на группе $\mathbb{T}_N$ определяется следующим образом:

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}_N} f \overline{e_k} d\mu_{\mathbb{T}_N}, \quad k \in \mathbb{Z}_N$$

(черта означает комплексное сопряжение). Мы используем одинаковое обозначение $\hat{f}$ для преобразования Фурье на $\mathbb{T}$ и на $\mathbb{T}_N$, но это не приводит к недоразумению — всюду далее вплоть до окончания доказательства теоремы через $\hat{f}$ обозначено преобразование Фурье на $\mathbb{T}_N$.

Пусть f — произвольная (комплексная) функция на $\mathbb{T}_N$. Имеем

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \hat{f}(k) e_k(t), \quad t \in \mathbb{T}_N.$$

Положим

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} = \|\hat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}_N)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(k)|.$$

Легко убедиться, что для любых функций f_1, f_2 на $\mathbb{T}_N$

$$\|f_1 f_2\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|f_1\|_{A(\mathbb{T}_N)} \|f_2\|_{A(\mathbb{T}_N)}.$$

Вообще, при $p \geq 1$ положим

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}_N)} = \|\hat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}_N)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(k)|^p \right)^{1/p}$$

(мы пишем $A(\mathbb{T}_N)$ вместо $A_1(\mathbb{T}_N)$).

Равенство Парсеваля имеет вид $\|f\|_{L^2(\mathbb{T}_N)} = \|f\|_{A_2(\mathbb{T}_N)}$.

Для любых двух функций f_1, f_2 на $\mathbb{T}_N$ определим их свертку $f_1 * f_2$, полагая

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{\mathbb{T}_N} f_1(x) f_2(t - x) dx, \quad t \in \mathbb{T}_N.$$

Имеем $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$.

Приведем теорему Грина–Конягина. Отметим сначала тривиальный факт: если E — множество на окружности $\mathbb{T}$, такое, что преобразование Фурье его характеристической функции 1_E принадлежит $l^1(\mathbb{Z})$, то оно либо имеет (лебегову) меру нуль, либо является почти всей окружностью $\mathbb{T}$. Более детально этот эффект проявляется на циклической группе $\mathbb{T}_N$. А именно, согласно теореме Грина–Конягина, если N — достаточно большое простое число, то для любой вещественной функции f на $\mathbb{T}_N$, такой, что $\int_{\mathbb{T}_N} f d\mu_{\mathbb{T}_N} = 0$, имеем

$$\min_{t \in \mathbb{T}_N} |f(t)| \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} \|f\|_{A(\mathbb{T}_N)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от N и f . Беря произвольное множество $E \subseteq \mathbb{T}_N$ и полагая в этой оценке $f(t) = 1_E(t) - \mu_{\mathbb{T}_N}(E)$, видим, что

$$\delta_{\mathbb{T}_N, \mu_{\mathbb{T}_N}}(E) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} \|1_E\|_{A(\mathbb{T}_N)}, \quad (2)$$

где $c > 0$ не зависит от N и E . (Мы учли, что $\mu_{\mathbb{T}_N}(E) = \widehat{1_E}(0)$, откуда ясно, что $\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|1_E\|_{A(\mathbb{T}_N)}$.)

Нам потребуется также теорема Дирихле о совместных диофантовых приближениях (см., например, [12, гл. II, §1]). Если $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — вещественные числа и $D \geq 1$ — целое число, то существуют целые числа $Q, P_1, \dots, P_N$, такие, что $1 \leq Q \leq D^N$ и

$$|\alpha_j Q - P_j| \leq \frac{1}{D}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Доказательство теоремы. В силу непрерывности отображения φ имеем $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t . Заменяя функцию φ на $\varphi(t) - kt$, можем считать, что $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$, т.е. что φ — вещественная непрерывная функция на окружности $\mathbb{T}$.

Заметим также, что по самому условию теоремы $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ при всех достаточно больших положительных $n \in \mathbb{Z}$. Беря достаточно большое n , имеем $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ и $e^{i(n+1)\varphi} \in A(\mathbb{T})$. Тогда $e^{-in\varphi} = \overline{e^{in\varphi}} \in A(\mathbb{T})$, и мы видим, что $e^{i\varphi} = e^{i(n+1)\varphi} e^{-in\varphi} \in A(\mathbb{T})$. Следовательно, $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$\Theta(n) = \max_{\lambda=0,1,\dots,n} \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Последовательность $\Theta(n)$, $n = 0, 1, \dots$, неубывающая, $\Theta(n) \geq \Theta(0) = 1$ при всех n и в силу предположения теоремы

$$\Theta(n) = o\left(\left(\frac{\log \log n}{\log \log \log n}\right)^{1/12}\right). \quad (3)$$

Мы имеем

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \Theta(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Всюду далее в доказательстве вплоть до леммы 4 будем считать, что N — произвольное положительное целое число.

Фиксируя N и применяя теорему Дирихле к числам

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi} \varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

и $D = N$, находим целые числа Q_N и $P_{N,j}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, такие, что

$$1 \leq Q_N \leq N^N \quad (5)$$

и

$$\left| \frac{1}{2\pi} \varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right) Q_N - P_{N,j} \right| \leq \frac{1}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Определим функцию φ_N на $\mathbb{T}_N$, полагая

$$\varphi_N\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \frac{2\pi P_{N,j}}{Q_N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Мы видим, что

$$\left| \varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right) - \varphi_N\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \right| \leq \frac{2\pi}{NQ_N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

То есть

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \leq \frac{2\pi}{NQ_N}. \quad (7)$$

Лемма 1. При всех $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$ имеем $\|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq 8\Theta(N^N)$.

Доказательство. Пусть f — произвольная функция, принадлежащая $A(\mathbb{T})$. Тогда

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| = \|f\|_{A(\mathbb{T})} < \infty.$$

Рассматривая f как функцию на $\mathbb{T}_N$ и вычисляя ее преобразование Фурье $\hat{f}$ на $\mathbb{T}_N$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{T}_N} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu t} \right) e^{-ikt} d\mu_{\mathbb{T}_N}(t) \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu \int_{\mathbb{T}_N} e^{i\nu t} e^{-ikt} d\mu_{\mathbb{T}_N}(t) = \sum_{\nu \equiv k \pmod{N}} c_\nu, \quad k \in \mathbb{Z}_N. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})}$. Пользуясь этим неравенством, видим, что (см. (4))

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \Theta(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Заметим, что оценка (7) дает (при $n \geq 0$)

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \leq n\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \leq n \frac{2\pi}{NQ_N},$$

откуда при $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$ получаем

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \leq \frac{2\pi}{N}. \quad (9)$$

Ясно, что для любой функции f на $\mathbb{T}_N$ выполняется неравенство

$$|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N$$

($\hat{f}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{T}_N$), откуда, учитывая, что $\text{card } \mathbb{Z}_N = N$, получаем, что

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(k)| \leq N\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)}.$$

Следовательно (см. (9)),

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq 2\pi, \quad n = 0, 1, \dots, Q_N - 1. \quad (10)$$

Таким образом, при $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$ получаем (см. (8), (10) и (5))

$$\begin{aligned} \|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} &\leq \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}_N)} + \|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \\ &\leq \Theta(n) + 2\pi \leq 8\Theta(n) \leq 8\Theta(Q_N) \leq 8\Theta(N^N). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определим функцию Φ на $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, полагая

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(x) + \varphi(z - x) - \varphi(y) - \varphi(z - y), \quad x, y, z \in \mathbb{T}.$$

Определим также функцию Φ_N на группе $\mathbb{T}_N^3 = \mathbb{T}_N \times \mathbb{T}_N \times \mathbb{T}_N$, полагая

$$\Phi_N(x, y, z) = \varphi_N(x) + \varphi_N(z - x) - \varphi_N(y) - \varphi_N(z - y), \quad x, y, z \in \mathbb{T}_N.$$

Рассмотрим множество

$$E_N = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_N^3 : e^{i\Phi_N(x, y, z)} = 1\}.$$

Заметим, что всякое значение функции φ_N , а следовательно, и всякое значение функции Φ_N имеет вид $2\pi P/Q_N$ при некотором $P \in \mathbb{Z}$ (см. (6)); поэтому справедливо тождество

$$\frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N-1} e^{in\Phi_N} = 1_{E_N}. \quad (11)$$

Следующая лемма устанавливает оценку снизу для меры множества E_N .

Лемма 2. *Имеем*

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \leq \mu_{\mathbb{T}_N^3}(E_N).$$

Доказательство. Убедимся сначала, что если f — произвольная вещественная функция на $\mathbb{T}_N$, то

$$\frac{1}{\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T}_N)}^2} \leq \int_{\mathbb{T}_N^3} e^{inF} d\mu_{\mathbb{T}_N^3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

где $F(x, y, z) = f(x) + f(z - x) - f(y) - f(z - y)$, $x, y, z \in \mathbb{T}_N$. Чтобы увидеть это, мы дословно повторяем рассуждения Кахана [3], заменяя в них $\mathbb{T}$ на $\mathbb{T}_N$. А именно, интерполируя l^2 между l^1 и l^4 , получаем $\|\cdot\|_{l^2} \leq \|\cdot\|_{l^1}^{1/3} \|\cdot\|_{l^4}^{2/3}$. Следовательно,

$$1 = \|e^{inf}\|_{L^2(\mathbb{T}_N)} = \|e^{inf}\|_{A_2(\mathbb{T}_N)} \leq \|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T}_N)}^{1/3} \|e^{inf}\|_{A_4(\mathbb{T}_N)}^{2/3}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T}_N)}^2} &\leq \|e^{inf}\|_{A_4(\mathbb{T}_N)}^4 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\widehat{e^{inf} * e^{inf}}(k)|^2 \\ &= \|e^{inf} * e^{inf}\|_{L^2(\mathbb{T}_N)}^2 = \int_{\mathbb{T}_N} \left| \int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(x)} e^{inf(z-x)} dx \right|^2 dz \\ &= \int_{\mathbb{T}_N} \left(\int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(x)} e^{inf(z-x)} dx \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(y)} e^{inf(z-y)} dy \right)} dz \\ &= \iiint_{\mathbb{T}_N^3} e^{inF(x, y, z)} dx dy dz. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано (12).

Воспользуемся теперь неравенством (12), полагая $f = \varphi_N$. Применяя лемму 1, видим, что при всех $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \leq \int_{\mathbb{T}_N^3} e^{in\Phi_N} d\mu_{\mathbb{T}_N^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \leq \int_{\mathbb{T}_N^3} \left(\frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N-1} e^{in\Phi_N} \right) d\mu_{\mathbb{T}_N^3}.$$

Остается воспользоваться тождеством (11). Лемма доказана.

Наша следующая цель — оценка сверху для $\delta_{\mathbb{T}_N^3, \mu_{\mathbb{T}_N^3}}(E_N)$. Она будет получена в лемме 4. Сначала докажем лемму 3, носящую технический характер.

Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, m$, — вероятностные пространства и $(\mathbb{X}, \mu)$ — их произведение:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_m, \quad \mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m.$$

Рассмотрим произвольное множество $E \subseteq \mathbb{X}$. При любом фиксированном $j = 1, \dots, m$ всякая точка $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$ в $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_{j-1} \times \mathbb{X}_{j+1} \times \dots \times \mathbb{X}_m$ определяет j -сечение множества E , а именно множество

$$E^{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m} = \{x_j \in \mathbb{X}_j : (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m) \in E\}.$$

Лемма 3. Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, m$, — вероятностные пространства, $(\mathbb{X}, \mu)$ — их произведение и E есть μ -измеримое множество в $\mathbb{X}$. Пусть $\delta \geq 0$. Предположим, что для всякого $j = 1, \dots, m$ любое j -сечение $E^{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m}$ множества E удовлетворяет условию $\delta_{\mathbb{X}_j, \mu_j}(E^{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m}) \leq \delta$. Тогда $\delta_{\mathbb{X}, \mu}(E) \leq 3^{m-1}\delta$.

Доказательство¹⁾. Покажем сначала, что утверждение леммы верно при $m = 2$. Пусть $(\mathbb{X}_1, \mu_1)$ и $(\mathbb{X}_2, \mu_2)$ — вероятностные пространства. Положим $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ и $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Рассмотрим произвольное μ -измеримое множество $E \subseteq \mathbb{X}$, такое, что для любого его 1-сечения

$$E^{x_2} = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

и для любого его 2-сечения

$$E^{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

мы имеем

$$\delta_{\mathbb{X}_1, \mu_1}(E^{x_2}) \leq \delta \quad \text{и} \quad \delta_{\mathbb{X}_2, \mu_2}(E^{x_1}) \leq \delta$$

соответственно. Убедимся, что тогда $\delta_{\mathbb{X}, \mu}(E) \leq 3\delta$.

Положим

$$\mathbb{X}_1^< = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : \mu_2(E^{x_1}) \leq \delta\}, \quad \mathbb{X}_1^> = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : \mu_2(E^{x_1}) \geq 1 - \delta\}$$

и аналогично

$$\mathbb{X}_2^< = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : \mu_1(E^{x_2}) \leq \delta\}, \quad \mathbb{X}_2^> = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : \mu_1(E^{x_2}) \geq 1 - \delta\}.$$

Можем считать, что $0 \leq \delta < 1/2$ (при $\delta \geq 1/2$ утверждение леммы тривиально). Тогда

$$\mathbb{X}_j^< \cap \mathbb{X}_j^> = \emptyset, \quad \mathbb{X}_j^< \cup \mathbb{X}_j^> = \mathbb{X}_j, \quad j = 1, 2.$$

Положим

$$\alpha_1 = \mu_1(\mathbb{X}_1^>), \quad \alpha_2 = \mu_2(\mathbb{X}_2^>).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{X}_1^> \times \mathbb{X}_2^<} 1_E(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) &\leq \iint_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2^<} 1_E(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \\ &= \int_{\mathbb{X}_2^<} \mu_1(E^{x_2}) d\mu_2(x_2) \leq \delta \mu_2(\mathbb{X}_2^<) = \delta(1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (13)$$

¹⁾Возможно, утверждение леммы 3 (в том или ином виде) является известным, однако автор не нашел соответствующей ссылки.

Вместе с тем очевидно, что

$$\iint_{\mathbb{X}_1^> \times \mathbb{X}_2^>} 1_E(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \leq \mu_1(\mathbb{X}_1^>) \mu_2(\mathbb{X}_2^>) = \alpha_1 \alpha_2. \quad (14)$$

Сложив (13) и (14), получаем

$$\iint_{\mathbb{X}_1^> \times \mathbb{X}_2} 1_E(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \leq \delta(1 - \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2. \quad (15)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{X}_1^> \times \mathbb{X}_2} 1_E(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) &= \int_{\mathbb{X}_1^>} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \\ &\geq (1 - \delta) \mu_1(\mathbb{X}_1^>) = (1 - \delta) \alpha_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Вместе неравенства (15), (16) дают

$$(1 - \delta) \alpha_1 \leq \delta(1 - \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2. \quad (17)$$

Аналогичным образом,

$$(1 - \delta) \alpha_2 \leq \delta(1 - \alpha_1) + \alpha_2 \alpha_1. \quad (18)$$

Сложив неравенства (17) и (18), видим, что $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\delta + 2\alpha_1 \alpha_2$, т.е. $\alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_2(1 - \alpha_1) \leq 2\delta$. Отсюда, полагая $a = \min(\alpha_1, 1 - \alpha_1)$, получаем

$$a = a(1 - \alpha_2) + \alpha_2 a \leq \alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_2(1 - \alpha_1) \leq 2\delta.$$

Таким образом, возможны лишь два случая: либо $\alpha_1 \leq 2\delta$, либо $\alpha_1 \geq 1 - 2\delta$.

В первом случае

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_{\mathbb{X}_1} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{\mathbb{X}_1^>} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) + \int_{\mathbb{X}_1^<} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \\ &\leq \mu_1(\mathbb{X}_1^>) + \delta \mu_1(\mathbb{X}_1^<) = \alpha_1 + \delta(1 - \alpha_1) \leq \alpha_1 + \delta \leq 3\delta. \end{aligned}$$

Во втором случае

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_{\mathbb{X}_1} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \geq \int_{\mathbb{X}_1^>} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \\ &\geq (1 - \delta) \mu_1(\mathbb{X}_1^>) = (1 - \delta) \alpha_1 \geq (1 - \delta)(1 - 2\delta) = 1 - 3\delta + 2\delta^2 \geq 1 - 3\delta. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы верно при $m = 2$.

Для произвольного m утверждение леммы легко получается по индукции. Предположим, что оно верно для какого-то $m \geq 2$. Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, m + 1$, — вероятностные пространства. Достаточно рассмотреть два пространства, одно из которых — это $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_m$ с мерой $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m$, а второе — это $\mathbb{X}_{m+1}$ с мерой μ_{m+1} . Лемма доказана.

Лемма 4. Если N — достаточно большое простое число, то

$$\delta_{\mathbb{T}_N^3, \mu_{\mathbb{T}_N^3}}(E_N) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (\Theta(N^N))^2,$$

где $c > 0$ не зависит от N .

Доказательство. Фиксируем произвольные $y \in \mathbb{T}_N$ и $z \in \mathbb{T}_N$. Рассмотрим соответствующее 1-сечение множества E_N , а именно, множество

$$E_N^{y,z} = \{x \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}.$$

Рассмотрим также соответствующее сечение $\Phi_N^{y,z}$ функции Φ_N , т.е. функцию от $x \in \mathbb{T}_N$, определяемую следующим образом:

$$\Phi_N^{y,z}(x) = \Phi_N(x, y, z).$$

Заметим, что в произведении

$$e^{in\Phi_N^{y,z}(x)} = e^{in\varphi_N(x)} e^{in\varphi_N(z-x)} e^{-in\varphi_N(y)} e^{-in\varphi_N(z-y)}$$

лишь два сомножителя являются функциями от x , причем оба имеют норму в $A(\mathbb{T}_N)$, равную $\|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)}$, в то время как оставшиеся два сомножителя — постоянные, по модулю равные 1. Поэтому

$$\|e^{in\Phi_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)}^2.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1, получаем, что

$$\|e^{in\Phi_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq (8\Theta(N^N))^2, \quad n = 0, 1, \dots, Q_N - 1.$$

Вместе с тем в силу тождества (11) для сечения $E_N^{y,z}$ множества E_N мы имеем

$$1_{E_N^{y,z}} = \frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N-1} e^{in\Phi_N^{y,z}}.$$

Следовательно,

$$\|1_{E_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq (8\Theta(N^N))^2.$$

Отсюда, пользуясь (2), получаем, что для произвольного 1-сечения $E_N^{y,z}$ множества E_N справедлива оценка

$$\delta_{\mathbb{T}_N, \mu_{\mathbb{T}_N}}(E_N^{y,z}) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (8\Theta(N^N))^2,$$

где $c > 0$ не зависит от y, z и N .

Таким же образом получаем аналогичные оценки сверху для произвольного 2-сечения

$$E_N^{x,z} = \{y \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}$$

и произвольного 3-сечения

$$E_N^{x,y} = \{z \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}.$$

Пользуясь леммой 3 при $m = 3$ и $(\mathbb{X}_j, \mu_j) = (\mathbb{T}_N, \mu_{\mathbb{T}_N})$, $j = 1, 2, 3$, видим, что

$$\delta_{\mathbb{T}_N^3, \mu_{\mathbb{T}_N^3}}(E_N) \leq 9c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (8\Theta(N^N))^2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим дополнение $F_N = \mathbb{T}_N^3 \setminus E_N$ множества E_N .

Лемма 5. Если N стремится к бесконечности, пробегая множество простых чисел, то $\mu_{\mathbb{T}_N^3}(F_N) \rightarrow 0$.

Доказательство. Если N — достаточно большое простое число, то по лемме 4 либо

$$\mu_{\mathbb{T}_N^3}(E_N) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (\Theta(N^N))^2,$$

либо

$$\mu_{\mathbb{T}_N^3}(F_N) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (\Theta(N^N))^2. \quad (19)$$

В первом случае в силу леммы 2 получаем

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (\Theta(N^N))^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{64c} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3} \leq (\Theta(N^N))^4,$$

что невозможно, если N очень велико (см. (3)). Таким образом, при всех достаточно больших простых N имеет место оценка (19), откуда, учитывая (3), получаем

$$\mu_{\mathbb{T}_N^3}(F_N) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} o \left(\left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/6} \right) = o(1).$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Заметим, что (поскольку $e^{i\Phi_N} = 1$ на E_N) из соотношения (7) следует, что

$$\begin{aligned} \|e^{i\Phi} - 1\|_{L^\infty(E_N)} &= \|e^{i\Phi} - e^{i\Phi_N}\|_{L^\infty(E_N)} \leq \|\Phi - \Phi_N\|_{L^\infty(E_N)} \leq \|\Phi - \Phi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N^3)} \\ &\leq 4\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \leq \frac{8\pi}{NQ_N} \leq \frac{8\pi}{N} = o(1), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой и леммой 5, видим, что если N стремится к бесконечности, пробегая простые числа, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_N^3} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} &= \int_{E_N} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} + \int_{F_N} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} \\ &\leq \|e^{i\Phi} - 1\|_{L^\infty(E_N)} + 2\mu_{\mathbb{T}_N^3}(F_N) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

С другой стороны (так как функция Φ непрерывна на $\mathbb{T}^3$), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_N^3} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} &= \frac{1}{N^3} \sum_{0 \leq k, l, m \leq N-1} |e^{i\Phi(2\pi k/N, 2\pi l/N, 2\pi m/N)} - 1| \\ &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} |e^{i\Phi(x, y, z)} - 1| dx dy dz, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{T}^3} |e^{i\Phi(x, y, z)} - 1| dx dy dz = 0.$$

Отсюда (поскольку функция Φ непрерывна) получаем $e^{i\Phi(x, y, z)} = 1$ при всех $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$, и мы видим, что $\Phi(x, y, z) = 2\pi k$, $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$, где k — целое, не зависящее от (x, y, z) . Беря $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, получаем $k = 0$, откуда

$\Phi(x, y, z) = 0$ на $\mathbb{T}^3$. То есть $\varphi(x) + \varphi(z - x) - \varphi(y) - \varphi(z - y) = 0$ при всех $x, y, z \in \mathbb{R}$, и мы получаем утверждение теоремы.

Замечания. 1. Полученная в настоящей работе теорема имеет следующую (эквивалентную) операторную версию. Пусть U — ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в $l^1(\mathbb{Z})$, такой, что

$$\|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1} = o\left(\left(\frac{\log \log |n|}{\log \log \log |n|}\right)^{1/12}\right), \quad |n| \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (20)$$

тогда $U = \xi S$, где ξ — комплексное число, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига. В самом деле, легко проверить (и хорошо известно, см., например, [13]), что всякий ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в $l^1(\mathbb{Z})$ является оператором свертки с некоторой последовательностью, принадлежащей $l^1(\mathbb{Z})$, причем норма оператора равна l^1 -норме этой последовательности. В частности, U является оператором свертки с некоторой последовательностью $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\} \in l^1$. Определим функцию u на $\mathbb{T}$, полагая

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{ikt}.$$

Тогда $u \in A(\mathbb{T})$ и $\|u^n\|_{A(\mathbb{T})} = \|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1}$. Функция u является непрерывной, и, поскольку $\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|u^n\|_{A(\mathbb{T})}$, ясно, что $|u(t)| = 1$ при всех $t \in \mathbb{T}$. (В противном случае рост норм $\|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1}$ был бы экспоненциальным либо при $n \rightarrow +\infty$, либо при $n \rightarrow -\infty$.) Таким образом, u — непрерывная функция, отображающая $\mathbb{R}$ в окружность $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Всякая такая функция имеет вид $u(t) = e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция¹⁾. Так как функция u является 2π -периодической, то $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}$, т.е. φ — непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Имеем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = \|u^n\|_{A(\mathbb{T})} = \|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1}$. Пользуясь нашей теоремой, из (20) получаем, что $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$ при некотором $\nu \in \mathbb{Z}$. Тогда $u(t) = \xi e^{i\nu t}$, где $\xi = e^{i\varphi(0)}$. Следовательно, оператор U есть оператор свертки с последовательностью $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$, где $u_k = 0$ при всех $k \neq \nu$ и $u_\nu = \xi$. Таким образом, $U = \xi S$, где $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига ($S : \{x_k\} \rightarrow \{x_{k-\nu}\}$).

2. Теорема настоящей работы легко переносится на многомерный случай. Пусть $A(\mathbb{T}^d)$ — пространство непрерывных функций на d -мерном торе $\mathbb{T}^d$, имеющих абсолютно сходящийся ряд Фурье. Положим $\|f\|_{A(\mathbb{T}^d)} = \|\hat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{T}^d$. Если $\varphi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение, такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^d)} = o\left(\left(\frac{\log \log |n|}{\log \log \log |n|}\right)^{1/12}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \rightarrow \infty,$$

то φ линейно, т.е. $\varphi(t) = (\nu, t) + \varphi(0)$, где $\nu \in \mathbb{Z}^d$. (Через (ν, t) обозначено скалярное произведение векторов $\nu \in \mathbb{Z}^d$ и $t \in \mathbb{T}^d$.) Многомерный случай легко сводится к одномерному индукцией по размерности. Достаточно лишь заме-

¹⁾ Функция φ есть поднятие функции u относительно накрытия $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$, где $e(x) = e^{ix}$. Существование φ гарантировано теоремой о монодромии, см., например, [14, лекция 4, следствие из теоремы 1].

тить следующее. Пусть $f \in A(\mathbb{T}^{d+1})$. При фиксированном $x \in \mathbb{T}^d$ рассмотрим функцию f_x на $\mathbb{T}$, полагая $f_x(y) = f(x, y)$. Тогда $\|f_x\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T}^{d+1})}$.

Соответствующая версия для операторов U в $l^1(\mathbb{Z}^d)$ также имеет место.

3. Как указали Грин и Конягин [10, §1], возможно, что оценка в их теореме может быть улучшена. В частности, возможно, что $(\log \log N / \log N)^{1/3}$ в правой части в (2) можно заменить на $1/\log N$ (дальнейшее улучшение невозможно). Улучшение такого вида позволило бы заменить правую часть в условии нашей теоремы на $o((\log \log |n|)^{1/4})$. По-видимому, проще получить улучшение оценки (2) с заменой в ней показателя степени $1/3$ на $1/2$, см. по этому поводу работу Сандерса [15]. Это позволило бы заменить показатель $1/12$ в нашей теореме на $1/8$. По поводу возможности ликвидировать $\log \log N$ в теореме Грина–Конягина см. [10, §6]. Это позволило бы ликвидировать $\log \log \log |n|$ в нашей теореме.

4. Гипотеза Кахана остается не доказанной даже при дополнительном предположении C^1 -гладкости отображения φ . В связи с этим отметим следующий результат автора [6] (см. также [7]): если $\gamma(n) \geq 0$ — произвольная последовательность, $\gamma(n) \rightarrow +\infty$, то существует C^1 -гладкое нелинейное отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\gamma(|n|) \log |n|)$.

5. Неясно, существует ли непрерывное нелинейное отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, такое, что

$$\|e^{in_k\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1), \quad (21)$$

где $\{n_k\}$ — какая-то неограниченная последовательность целых чисел. Если φ абсолютно непрерывно (т.е. если функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с условием (1) абсолютно непрерывна на любом интервале длины 2π), то соотношение (21) невозможно. Это было коротко пояснено нами в [6]. Приведем здесь подробное и простое доказательство.

Заметим сначала, что если g — вещественная измеримая функция на $\mathbb{T}$, такая, что $\widehat{e^{i\lambda g}} \in l^1(\mathbb{Z})$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\widehat{e^{i\lambda g}}\|_{l^1(\mathbb{Z})} < \infty,$$

то g постоянна почти всюду. В этом можно убедиться следующим образом. Имеем $\widehat{e^{ig}} \in l^1(\mathbb{Z})$; следовательно, e^{ig} совпадает почти всюду с некоторой непрерывной функцией ξ . Тогда $|\xi| = 1$ почти всюду и, следовательно, всюду. Отсюда вытекает, что $\xi = e^{i\psi}$, где $\psi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение (это уже объяснялось в первом замечании). Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$ имеем $e^{in\psi} = \xi^n = e^{ing}$ почти всюду; следовательно, $\|e^{in\psi}\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{e^{ing}}\|_{l^1(\mathbb{Z})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$. По теореме Берлинга–Хелсона функция ψ линейна с целым угловым коэффициентом. Таким образом, g почти всюду совпадает по $\bmod 2\pi$ с линейной функцией, имеющей целый угловой коэффициент. Возьмем какое-нибудь (вещественное) иррациональное число α . Повторяя рассуждение для функции $g_\alpha = \alpha g$ вместо g , видим, что αg также почти всюду совпадает по $\bmod 2\pi$ с линейной функцией, имеющей целый угловой коэффициент. Это возможно лишь в случае, когда g постоянна почти всюду.

Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — абсолютно непрерывное отображение. Предположим, что выполняется (21). Вычитая подходящую линейную функцию, можем считать, что φ есть вещественная 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$. Можем также счи-

тать, что $n_k \rightarrow \infty$. При произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, и $k = 1, 2, \dots$ определим функцию $g_{\lambda,k}$ на $\mathbb{R}$, полагая

$$g_{\lambda,k}(t) = \frac{\varphi(t + \lambda/n_k) - \varphi(t)}{\lambda/n_k}.$$

При $k \rightarrow \infty$ имеем $g_{\lambda,k} \rightarrow \varphi'$ почти всюду. Заметим далее, что $e^{i\lambda g_{\lambda,k}(t)} = e^{in_k \varphi(t + \lambda/n_k)} e^{-in_k \varphi(t)}$, откуда, считая, что $\|e^{in_k \varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c$, $k = 1, 2, \dots$, получаем $\|e^{i\lambda g_{\lambda,k}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c^2$. Устремляя k к ∞ , видим, что $\|e^{i\lambda \varphi'}\|_{l^1(\mathbb{Z})} \leq c^2$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (случай $\lambda = 0$ очевиден). Таким образом, производная φ' функции φ постоянна почти всюду. Из условия абсолютной непрерывности следует, что функция φ линейна.

Первоначально теорема, полученная в настоящей работе, была несколько слабее. Я благодарен С. В. Конягину за то, что он указал мне на теорему 1.3 работы [10]. Это позволило улучшить результат.

Я также благодарен Ю. Н. Кузнецовой за помощь в доказательстве леммы о сечениях (леммы 3).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Beurling, H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand., **1** (1953), 120–126.
- [2] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
- [3] J.-P. Kahane, *Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier*, in: Topics in Modern Harmonic Analysis, Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.
- [4] З. Л. Лейбензон, *О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье*, УМН, **9:3(61)** (1954), 157–162.
- [5] J.-P. Kahane, *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes*, J. Math. Pures Appl., **35:3** (1956), 249–259.
- [6] В. В. Лебедев, *Диффеоморфизмы окрестности и теорема Берлинга–Хелсона*, Функц. анализ и его прил., **36:1** (2002), 30–35.
- [7] В. В. Лебедев, *Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона*, Матем. сб., **201:12** (2010), 103–130.
- [8] В. В. Лебедев, *Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай*, Матем. заметки, **90:3** (2011), 394–407.
- [9] J.-P. Kahane, *Transformées de Fourier des fonctions sommables*, in: Proc. Internat. Congr. Math. (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 114–131.
- [10] B. Green, S. Konyagin, *On the Littlewood problem modulo a prime*, Canad. J. Math., **61:1** (2009), 141–164.
- [11] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis, v. I, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2003.
- [12] В. Шмидт, *Диофантовы приближения*, Мир, М., 1983.
- [13] R. Larsen, *An Introduction to the Theory of Multipliers*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [14] М. М. Постников, *Дифференциальная геометрия*, Лекции по геометрии. Семестр IV, Наука, М., 1988.
- [15] T. Sanders, *The Littlewood–Gowers problem*, J. Anal. Math., **101:1** (2007), 123–162.

Московский государственный институт
электроники и математики
e-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило в редакцию
9 октября 2011 г.