Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, Униформизация многообразий Якоби тригональных кривых и нелинейные дифференциальные уравнения, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 1–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:12:30

Униформизация многообразий Якоби тригональных кривых и нелинейные дифференциальные уравнения

© 2000. В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский

Введение

Настоящая работа посвящена развитию метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на основе униформизации многообразий Якоби алгебраических кривых $\wp$ -функциями многих переменных, начала теории которых были заложены Клейном. Наши исследования в этом направлении (см. обзор [3]) мотивированы тем, что при такой униформизации естественно и явно возникают важнейшие уравнения математической физики.

Клейн [10] предложил строить теорию аналогов эллиптической σ -функции Вейерштрасса для кривых рода > 1 как теорию функций нескольких переменных, родственных θ -функциям, обладающих дополнительным свойством *модулярной инвариантности*. Дифференциальное поле абелевых функций на многообразии Якоби кривой порождается производными порядка > 1 логарифма σ -функции, т. е. функциями

$$\wp_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\partial^k \log \sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}}, \quad k \geq 2.$$

В работе авторов [3] для гиперэллиптических кривых произвольного рода g предъявлены $3g$ базисных $\wp$ -функций дифференциального поля функций на якобиане, для которых в явном виде выписаны базисные алгебраические соотношения. Для случая $g = 2$ эти результаты можно извлечь из работы Бейкера [1], теория для $g > 2$, построенная авторами, потребовала существенного развития классических методов. Необходимо отметить, что в работах классического периода отсутствует всякое сопоставление полученных дифференциальных соотношений с задачами теории дифференциальных уравнений в частных производных, несмотря на то что полученные для случая $g = 2$ в [1] соотношения приводят к решениям дифференциальных уравнений (например, таких, как sine-Gordon), актуальных уже в то время.

Наш подход к теории в общем случае опирается на модели кривых, которые в работе [4] названы (n, s) -кривыми. Гиперэллиптические кривые рода g в этой терминологии являются $(2, 2g+1)$ -кривыми. Ниже мы излагаем результаты для $(3, g+1)$ -кривых, которые являются так называемыми *тригональными* кривыми рода g . В классе (n, s) -кривых случаи $n = 2$ и $n = 3$ выделены тем, что только для них выполняются неравенства $n \leq g = (n-1)(s-1)/2 < s$ для рода кривой g , играющие важную роль при построении теории.

В §1 содержатся необходимые сведения и вводится важное для дальнейшего понятие универсального пространства g -х симметрических степеней тригональных кривых U_g . Основным результатом §2 является теорема 2.6, дающая

явное описание пространства U_g как алгебраического подмногообразия в комплексном линейном пространстве размерности $4g$ или $4g + 2$, если $g = 3\ell$ или $g = 3\ell + 1$. В §3 получена явная реализация многообразия Куммера тригональной кривой как алгебраического подмногообразия в $\mathbb{C}^{g(g+1)/2}$, заданного системой $(g-1)g/2$ полиномиальных уравнений степени не выше 5. Эффективность нашего подхода демонстрируется на примере негиперэллиптической кривой рода 3. В §4 выделен набор из $4g$ $\wp$ -функций на многообразии Якоби тригональной кривой, которые униформизируют построенные в §2 алгебраические многообразия. В этом же параграфе содержатся все необходимые сведения о σ -функции. В §5 мы анализируем полученные дифференциальные соотношения с точки зрения теории дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, сравнивая с аналогичными результатами для гиперэллиптического случая, мы показываем, что теория $\wp$ -функций является эффективным инструментом характеристики якобианов аналитическими средствами.

Авторы выражают благодарность С. П. Новикову, оказавшему большое влияние на формирование нашей точки зрения на предмет данного исследования.

§1. Универсальное пространство g -х симметрических степеней тригональных кривых

Пусть $\gcd(g+1, 3) = 1$. Для g возможны значения $g = 3\ell$ и $g = 3\ell + 1$, где $\ell = 1, 2, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем называть *тригональным* линейный по параметрам $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_3, \dots\}$ полином $f_g(x, y; \lambda)$ с коэффициентами при старших степенях x и y , равными -1 и 1 соответственно, который в градуировке $\deg x = 3$, $\deg y = g+1$ и $\deg \lambda_i = 3g+3-i > 0$ однороден веса $\deg f_g = 3(g+1)$.

Из определения следует, что тригональный полином имеет вид

$$f_g(x, y; \lambda) = y^3 - y^2 \left(\sum_{j=0}^{[(g+1)/3]} \lambda_{2g+2+3j} x^j \right) - y \left(\sum_{j=0}^{[(2g+2)/3]} \lambda_{g+1+3j} x^j \right) - \left(x^{g+1} + \sum_{j=0}^g \lambda_{3j} x^j \right) \quad (1.1)$$

и зависит от набора из $2g+3$ параметров $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_3, \dots, \lambda_{3g+1}, \lambda_{3g+2}\}$. Множество индексов у элементов набора λ пробегает все числа вида $3a + (g+1)b$ (при целых неотрицательных a и b) в интервале от 0 до $3g+2$; при этом имеется в точности g пропусков, так называемых пробелов, которые образуют *последовательность Вейерштрасса* (более детально см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем называть *пространством модулей тригональных полиномов веса $3(g+1)$* градуированное пространство M_g , точками которого являются указанные выше наборы λ , т.е. $M_g \cong \mathbb{C}^{2g+3}$.

При числовых значениях параметров $\{\lambda_k\}$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f_g(x, y; \lambda) = 0\}$ нулей тригонального полинома представляет собой аффинную модель *плоской тригональной кривой* $V(x, y)$ рода не выше g . При условии невырожденности полинома f_g , т.е. когда значения параметров $\{\lambda_k\}$ таковы, что трой-

ка полиномов $\{f_g(x, y; \lambda), \frac{\partial}{\partial y} f_g(x, y; \lambda), \frac{\partial}{\partial x} f_g(x, y; \lambda)\}$ не имеет общих нулей, кривая $V(x, y)$ неособа, и ее род равен g .

Любая *целая рациональная функция на кривой* $V(x, y)$, т. е. функция, принимающая конечные значения в точках аффинной модели кривой V , может быть записана в так называемом *нормальном виде* $p(x, y) = p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x)$, где $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — некоторые полиномы от x . Наибольший из весов мономов $x^i y^j$, встречающихся в полиноме $p(x, y)$, называется *порядком* этой целой рациональной функции. В дальнейшем нам понадобятся следующие факты (см., например, [2, 12]): *число нулей* целой рациональной функции $p(x, y)$ на кривой $V(x, y)$, т. е. число пар $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid f_g(\xi, \eta; \lambda) = 0, p(\xi, \eta) = 0\}$, равно ее порядку; целая рациональная функция на кривой, имеющая $2g + n$ нулей ($n \geq 0$), определяется набором из $g + n$ параметров.

Как известно [6, 11], *отображение Абеля* переводит k -ю симметрическую степень кривой $V(x, y)$ в ее *многообразие Якоби* $\text{Jac}(V)$. При k , равном (или большем) роду кривой, отображение Абеля является *отображением на*. Ниже нам понадобится следующий вариант *теоремы Абеля*: на множестве нулей целой рациональной функции на кривой отображение Абеля принимает значение нуль.

Далее символом $(X)^k$ будем обозначать k -ю симметрическую степень пространства X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Универсальным пространством g -х симметрических степеней тригональных кривых V* называется пространство $U_g \subset (\mathbb{C}^2)^g \times M_g$ всех наборов $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, g; \lambda}$, таких, что $f_g(x_i, y_i; \lambda) = 0$ для всех $i = 1, \dots, g$.

Универсальным расслоением g -х симметрических степеней тригональных кривых V называется тройка (U_g, M_g, p_U) , где p_U — каноническая проекция.

§ 2. Матричная конструкция

Обозначим через $W_g(x, y)$ вектор $(w_1, w_2, \dots, w_{g+3})^T$, образованный однородными элементами $w_k = x^\alpha y^\beta$, упорядоченными по возрастанию веса $\deg w_k = 3\alpha + \beta(g+1)$ при условии, что $0 \leq \deg w_k \leq 2g+2$. Пусть $H = \{h_{i,j}\}$, $i, j = 1, \dots, g+3$, — симметрическая матрица, матричные элементы которой являются однородными элементами, $\deg h_{i,j} = 4g+2 - \deg w_i - \deg w_j$, подходящего градуированного кольца, и, таким образом, для H выполняется соотношение $\deg(W_g^T H W_g) = 4g+2$. Обозначим пространство симметрических матриц, градуированных таким образом, через $\mathcal{H}$.

Для любой матрицы M положим $r(x, y; M) = \frac{\partial}{\partial y}(0, \dots, 0, 1) M W_g(x, y)$. Заметим, что если $H \in \mathcal{H}$, то $\deg r(x, y; H) = g-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Обозначим через $\mathcal{T}_g \subset \mathcal{H} \times M_g$ подпространство пар $H \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in M_g$, таких, что имеет место соотношение

$$W_g^T H W_g = 2r(x, y; H) f_g(x, y; \lambda). \quad (2.1)$$

Таким образом, определено расслоение $(\mathcal{T}_g, M_g, p_{\mathcal{T}})$, где $p_{\mathcal{T}}$ — каноническая проекция.

Учитывая, что тригональный полином включает параметры $\{\lambda_k\}$ только положительных весов, из определения получаем, что матрицы из $\mathcal{T}_q$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dots & & & \\ \dots & h_{g+1,g+1} & h_{g+1,g+2} & 1 \\ \dots & h_{g+1,g+2} & -2 & 0 \\ \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \dots & & & \\ \dots & -2h_{g,g} & 0 & 1 \\ \dots & 0 & -2 & 0 \\ \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

при $g = 3\ell + 1$ или $g = 3\ell$ соответственно. Обозначим через p_1 и p_2 проекции произведения $\mathcal{H} \times M_q$ на первый и второй сомножители.

ЛЕММА 2.1. Композиция вложения $\mathcal{T}_g \subset \mathcal{H} \times M_g$ с проекцией p_1 является вложением, а его композиция с проекцией p_2 совпадает с $p_{\mathcal{T}}$ и является отображением на.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Нам нужно показать, что если для данной матрицы H существует тригональный полином, удовлетворяющий соотношению (2.1), то этот полином определен однозначно. Действительно, в противном случае мы пришли бы к соотношению $r(x, y; H)(f(x, y; \lambda_1) - f(x, y; \lambda_2)) = 0$ для любых $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, которое не может выполняться, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2. Нужно показать, что при заданном $\lambda \in M_g$ найдется хотя бы одно решение H уравнения (2.1). Пусть q — некоторый однородный полином веса $g-1$ от x и y с коэффициентами неотрицательного веса. Поскольку $\deg y = g+1 > g-1$, такой полином не содержит y . Пусть $M(q, \lambda)$ — решение уравнения $\mathbf{W}_g^T M \mathbf{W}_g - 2q(x)f_g(x, y; \lambda) = 0$ в классе симметрических матриц с матричными элементами неотрицательного веса. Множество решений этого уравнения, очевидно, непусто. Рассмотрев коэффициент при старшей степени y , получаем, что $r(x, y; M(q, \lambda)) = q(x)$. $\square$

Введем подпространство матриц $\mathcal{H}_4 = \{H \in \mathcal{H} \mid \text{rank } H \leq 4\}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть симметрическая $(N+k) \times (N+k)$ -матрица $M = \{m_{i,j}\}$ имеет невырожденную $k \times k$ -подматрицу Δ , которую для определенности мы будем считать находящейся в нижнем правом углу. Тогда для того чтобы матрица M имела ранг не более $k+1$, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $z = (z_1, \dots, z_N)^T$, такой, что

$$m_{i,j} = \frac{1}{\det \Delta} \det \begin{pmatrix} z_i z_j & \mu_i \\ \mu_j^T & \Delta \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{Z}de \, \mu_r = (m_{r,N+1}, m_{r,N+2}, \dots, m_{r,N+k}).$$

Данная лемма является непосредственным следствием тождества Сильвестра для составных детерминантов [8]. Заметим, что вектор $\mathbf{z}$ в лемме 2.2 определен с точностью до знака. Обозначим через $\text{Sym}^*(k, \mathbb{C})$ множество невырожденных симметрических $k \times k$ -матриц и через $\text{Sym}_r(k, \mathbb{C})$ множество симметрических $k \times k$ -матриц ранга не более r , таких, что $(r-1) \times (r-1)$ -подматрица, находящаяся в правом нижнем углу, невырождена. Имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Отображение*

$$\phi: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{Nk} \times \mathrm{Sym}^*(k, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Sym}_{k+1}(N+k, \mathbb{C}),$$

заданное формулой

$$\phi(z, (\nu_j)_{j=1, \dots, k}, \Delta) = \begin{pmatrix} \{m_{i,k}\} & (\nu_j) \\ (\nu_j)^T & \Delta \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где $m_{i,k}$ вычисляются согласно формуле (2.3) при $\mu_r = (\nu_{r,j})_{j=1, \dots, k}$, представляя собой двулистное накрытие, разветвленное вдоль подмногообразия $z = 0$.

Положим $\Delta = \Delta_g$ равным соответствующему блоку из (2.2) и зафиксируем вложение $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{3g} \times \mathbb{C}^\delta \rightarrow \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{3g} \times \text{Sym}^*(3, \mathbb{C})$, где $\delta = 2$ при $g = 3l + 1$ и $\delta = 0$ при $g = 3l$. Получаем параметризацию $\varphi: \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{3g} \times \mathbb{C}^\delta \rightarrow \mathcal{H}_4$. Матрица $H = \varphi(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ вычисляется по формуле (2.4) при $k = 3$ и $N = g$. Отметим, что отображение φ согласуется с введенной выше градуировкой матричных элементов $h_{i,j}$, если принять следующее соглашение: $\deg z_i = 2g + 1 - \deg w_i$ и $\deg \gamma_{i,r} = 2g + 3 - r - \deg w_i$.

Для заданного набора $(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ определим четыре полинома $\chi(x, y)$, $\rho^\pm(x, y)$ и $\tau(x, y)$ формулой

$$(\chi(x, y), \rho^\pm(x, y), \tau(x, y))^T = ((\gamma_1, \gamma_2 \pm z, \gamma_3)^T, \Delta_g) \mathbf{W}_g(x, y). \quad (2.5)$$

По построению старшие мономы полиномов $\chi(x, y)$, $\rho^\pm(x, y)$ и $\tau(x, y)$ имеют соответственно веса $2g + 2$, $2g + 1$ и $2g$. При этом переменная y входит в полиномы $\tau(x, y)$ и $\rho^\pm(x, y)$ линейно. Из определения отображения φ и формулы (2.5) вытекает

ЛЕММА 2.4. Для $H = \varphi(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ имеет место соотношение

$$\mathbf{W}_g^T H \mathbf{W}_g = -\frac{1}{2} \rho^+ \rho^- + \tau(2\chi + \frac{1}{2} h_{g+1, g+2}(\rho^+ + \rho^-) - (h_{g+1, g+1} + \frac{1}{2} h_{g+1, g+2}^2) \tau), \quad (2.6)$$

причем $r(x, y; H) = \frac{\partial}{\partial y} \tau(x, y)$ и $r(x, y; H)$ не зависит от y .

Пусть $\mathbf{Z} = (z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ — некоторая точка из $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{3g} \times \mathbb{C}^\delta$. Запишем правую часть равенства (2.6) в виде

$$\mathbf{W}_g^T \varphi(\mathbf{Z}) \mathbf{W}_g = Q(x, y; \mathbf{Z}) \frac{\partial}{\partial y} \tau(x, y) + R(x, y; \mathbf{Z}),$$

так что степень полинома R по переменной x не превосходит $[(g-1)/3] - 1$, а по переменной y не превосходит 2. Введем подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{3g} \times \mathbb{C}^\delta$, выделяемое $3[(g-1)/3]$ условиями $R(x, y; \mathbf{Z}) \equiv 0$. Тогда из сравнения с (2.1) получаем соотношение

$$Q(x, y; \mathbf{Z}) - 2f_g(x, y, \lambda) = 0, \quad (2.7)$$

которое позволяет определить расслоение $(\mathcal{L}, \mathbf{M}_g, p_{\mathcal{L}})$. Проекция $p_{\mathcal{L}}$ отображает точку $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}$ в упорядоченный по убыванию весов набор коэффициентов положительного веса полинома $-\frac{1}{2}Q(x, y; \mathbf{Z})$. Отметим, что проекция $p_{\mathcal{L}}$ является рациональным отображением.

ЛЕММА 2.5. Пусть полиномы $\rho^\pm(x, y)$ и $\tau(x, y)$ взаимно просты в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. Тогда они имеют g совместных нулей $\{(\xi_i^\pm, \eta_i^\pm)\}_{i=1, \dots, g}$.

Более того, $f_g(\xi_i^\pm, \eta_i^\pm; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z})) = 0$ для всех $i = 1, \dots, g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полиномы $\rho^\pm(x, y)$ и $\tau(x, y)$ линейны по переменной y . Их коэффициенты при y^1 являются полиномами по x степеней $[g/3]$ и $[(g-1)/3]$ соответственно, а коэффициенты при y^0 имеют степени $[(2g+1)/3]$ и $[2g/3]$. Исключая y , получаем полином по x степени $\max([(2g+1)/3] + [(g-1)/3], [2g/3] + [g/3])$, а это выражение при условии, что $\gcd(g+1, 3) = 1$, равно g . По предположению этот полином не равен нулю тождественно.

Далее, из (2.6) следует, что $\mathbf{W}_g^T(\xi_i^\pm, \eta_i^\pm)\varphi(\mathbf{Z})\mathbf{W}_g(\xi_i^\pm, \eta_i^\pm) = 0$ для всех $i = 1, \dots, g$. Предположим, что $f_g(\xi, \eta; p\mathcal{Z}(\mathbf{Z})) \neq 0$ для какой-нибудь точки (ξ, η) из набора общих нулей. Тогда, поскольку $\frac{\partial}{\partial y}\tau(x, y)$ не зависит от y , заключаем, что $\mathbf{W}_g^T(\xi, y)\varphi(\mathbf{Z})\mathbf{W}_g(\xi, y) = 0$ для произвольного y . Последнее равенство возможно, только если полиномы $\rho^\pm(x, y)$ и $\tau(x, y)$ имеют общий множитель $x - \xi$. $\square$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.6. *Отображение α из пространства $\mathcal{L}$ в пространство g -х симметрических степеней тригональных кривых $\mathbf{U}_g$, сопоставляющее набору $\mathbf{Z} = (z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g) \in \mathcal{L}$ вектор $\boldsymbol{\lambda} = p\mathcal{Z}(\mathbf{Z})$ и набор совместных нулей взаимно простых полиномов $\tau(x, y)$ и $\rho^+(x, y)$, задает послонную бирациональную эквивалентность расслоений $\alpha: (\mathcal{L}, \mathbf{M}_g, p\mathcal{Z}) \rightarrow (\mathbf{U}_g, \mathbf{M}_g, p\mathbf{U})$, тождественную на общей базе $\mathbf{M}_g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение α^{-1} .

Пусть дана точка $(\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1, \dots, g}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{U}_g$. В силу формулы (2.5) для решения нашей задачи достаточно найти полиномы $\tau(x, y)$, $\chi(x, y)$, $\rho^+(x, y)$ и $\rho^-(x, y)$.

Пусть $g = 3\ell + 1$. Обозначим через $\mathbf{U}(x, y)$ вектор, составленный из первых g компонент вектора $\mathbf{W}_g(x, y)$, и положим

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x, y) &= (\mathbf{U}(x, y)^T, yx^\ell)^T, & \mathbf{r}(x, y) &= (\mathbf{U}(x, y)^T, -\lambda_{3g+2}yx^\ell - 2x^{2\ell+1})^T, \\ \mathbf{p}(x, y) &= (\mathbf{U}(x, y)^T, yx^\ell, 2y^2)^T. \end{aligned}$$

Предположим, что $\det(\mathbf{U}(\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{U}(\xi_g, \eta_g)) \neq 0$. Рассмотрим целую рациональную функцию

$$T(x, y) = \frac{\det(\mathbf{t}(x, y), \mathbf{t}(\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{t}(\xi_g, \eta_g))}{\det(\mathbf{U}(\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{U}(\xi_g, \eta_g))} = yx^\ell + \dots$$

на кривой V , заданной числовыми параметрами $\boldsymbol{\lambda}$. Порядок функции $T(x, y)$ равен $\deg(yx^\ell) = g+1+3\ell = 2g$; следовательно, помимо нулей $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1, \dots, g}$ она имеет на кривой V еще g нулей $\{(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i)\}_{i=1, \dots, g}$. С помощью этих двух наборов нулей зададим на кривой V пару целых рациональных функций порядка $2g+1$:

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \frac{\det(\mathbf{r}(x, y), \mathbf{r}(\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{r}(\xi_g, \eta_g))}{\det(\mathbf{U}(\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{U}(\xi_g, \eta_g))} = -2x^{2\ell+1} - \lambda_{3g+2}yx^\ell + \dots, \\ R_2(x, y) &= \frac{\det(\mathbf{r}(x, y), \mathbf{r}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1), \dots, \mathbf{r}(\tilde{\xi}_g, \tilde{\eta}_g))}{\det(\mathbf{U}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1), \dots, \mathbf{U}(\tilde{\xi}_g, \tilde{\eta}_g))} = -2x^{2\ell+1} - \lambda_{3g+2}yx^\ell + \dots \end{aligned}$$

Функция $R_1(x, y)$ имеет на кривой $g+1$ дополнительных нулей $\{(\varrho_i, \varsigma_i)\}_{i=1, \dots, g+1}$, а функция $R_2(x, y)$ — дополнительные нули $\{(\tilde{\varrho}_i, \tilde{\varsigma}_i)\}_{i=1, \dots, g+1}$.

Дробь $R_1(x, y)R_2(x, y)/(2T(x, y))$ представляет целую (все нули знаменателя сокращаются) рациональную функцию $P(x, y)$ на кривой V порядка $2g+2$, все

нули которой нам известны. Изучим поведение функции $P(x, y)$ в окрестности точки (∞, ∞) . Пусть t — локальный параметр, $x = t^{-3}$ и $y = t^{-(g+1)}(1 + \frac{1}{3}\lambda_{3g+2}t + O(t^2))$. Получаем $P(x, y) = t^{-(2g+2)}(2 + \frac{4}{3}\lambda_{3g+2}t + O(t^2))$. Из приведенных выражений следует, что функция $P(x, y)$ допускает полиномиальное представление вида $2y^2 + P_{2g+1}x^{2\ell+1} + \dots$ с коэффициентом $P_{2g+1} = 0$, и, таким образом, для получения явного выражения достаточно задать какие-либо $g+1$ из ее нулей. Используя набор $\{(\varrho_i, \varsigma_i)\}_{i=1, \dots, g+1}$, получаем

$$P(x, y) = \frac{\det(\mathbf{p}(x, y), \mathbf{p}(\varrho_1, \varsigma_1), \dots, \mathbf{p}(\varrho_{g+1}, \varsigma_{g+1}))}{\det(\mathbf{t}(\varrho_1, \varsigma_1), \dots, \mathbf{t}(\varrho_{g+1}, \varsigma_{g+1}))}.$$

Рассмотрим полином

$$C(x, y) = P(x, y)T(x, y) - \frac{1}{2}R_1(x, y)R_2(x, y) = 2x^\ell y^3 - 2x^\ell x^{g+1} + \dots$$

как функцию на кривой V . Эта функция имеет $4g+2$ нулей. Приведем функцию $C(x, y)$ к нормальному виду, т. е., прибавляя кратные тригонального полинома $f_g(x, y; \lambda)$, избавимся от слагаемых, содержащих y в степени выше 2. Коэффициент при y^3 равен $2\frac{\partial}{\partial y}T(x, y)$, более высокие степени y отсутствуют, и потому разность $C(x, y) - 2f_g(x, y; \lambda)\frac{\partial}{\partial y}T(x, y)$ уже имеет нормальный вид. Заметим, однако, что порядок этой разности $< 4g+2$ ввиду сокращения старших степеней x . Таким образом, число нулей функции $C(x, y) - 2f_g(x, y; \lambda)\frac{\partial}{\partial y}T(x, y)$ больше ее порядка, и, следовательно, она равна нулю тождественно.

Сравнивая тождество

$$P(x, y)T(x, y) - \frac{1}{2}R_1(x, y)R_2(x, y) \equiv 2f_g(x, y; \lambda)\frac{\partial}{\partial y}T(x, y)$$

с соотношением (2.6), получаем следующие выражения для искомым полиномов (с точностью до перемены мест в паре ρ^+ и ρ^-):

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= T(x, y), & \rho^+(x, y) &= R_1(x, y), & \rho^-(x, y) &= R_2(x, y), \\ \chi(x, y) &= \frac{1}{2} \left(P(x, y) - \frac{h_{g+1, g+2}}{2}(R_1(x, y) + R_2(x, y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2h_{g+1, g+1} + h_{g+1, g+2}^2}{2}T(x, y) \right). \end{aligned}$$

Остается выразить матричные элементы $h_{g+1, g+1}$ и $h_{g+1, g+2}$ через λ и коэффициенты полинома $P(x, y)$. Из формулы (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} \rho^+(x, y) &= -2x^{2\ell+1} + h_{g+1, g+2}yx^\ell + \dots, \\ \chi(x, y) &= y^2 + h_{g+1, g+2}x^{2\ell+1} + h_{g+1, g+1}yx^\ell + \dots, \end{aligned}$$

откуда получаем $h_{g+1, g+2} = -\lambda_{3g+2}$ и $h_{g+1, g+1} = \frac{1}{6}(2P_{2g} - \lambda_{3g+2}^2)$, где P_{2g} — коэффициент при yx^ℓ из полинома $P(x, y)$.

Случай $g = 3\ell$ рассматривается аналогично. □

Далее, как и в предыдущей теореме, мы будем иметь дело с различными расслоениями над одной и той же базой M_g . Формулируя утверждения о *послойных отображениях* таких расслоений, мы будем иметь в виду только отображения, *тождественные на базе*, не оговаривая этого впредь явно.

§3. Универсальные пространства многообразий Якоби и Куммера

Каждому набору λ , определяющему тригональную кривую как множество нулей полинома (1.1), можно однозначно сопоставить решетку $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ в $\mathbb{C}^g$, порожденную периодами g базисных дифференциалов

$$du_i(x, y; \lambda) = \frac{w_i(x, y)}{\frac{\partial}{\partial y} f_g(x, y; \lambda)} dx, \quad i = 1, \dots, g, \quad (3.1)$$

где $w_i(x, y)$, как и выше, обозначает i -ю координату вектора $W(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Универсальным пространством многообразий Якоби тригональных кривых* будем называть факторпространство $J_g = \mathbb{C}^g \times M_g / \sim$, где отношение эквивалентности задано формулой $(u, \lambda) \sim (u', \lambda') \iff (\lambda = \lambda', u - u' \in \Lambda(\lambda))$.

Универсальным пространством многообразий Куммера тригональных кривых будем называть факторпространство пространства J_g по канонической инволюции $(u, \lambda) \rightarrow (-u, \lambda)$; мы будем обозначать его через K_g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Универсальным расслоением многообразий Якоби тригональных кривых* будем называть тройку (J_g, M_g, p_J) , где $p_J(u, \lambda) = \lambda$.

Универсальным расслоением многообразий Куммера тригональных кривых будем называть тройку (K_g, M_g, p_K) , где $p_K(u, \lambda) = \lambda$.

Слои этих расслоений над точкой $\lambda \in M_g$ называются *многообразием Якоби* $\text{Jac}(V)$ и *многообразием Куммера* $\text{Kum}(V)$ тригональной кривой $V(x, y)$ в модели, заданной нулями полинома $f_g(x, y; \lambda)$.

С помощью дифференциалов (3.1) задается отображение Абеля $A: U_g \rightarrow \mathbb{C}^g \times M_g$, $A(\{(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)\}; \lambda) = (u, \lambda)$, где $u = (u_1, \dots, u_g)$ и $u_i = \sum_{k=1}^g \int_{(\infty, \infty)}^{(x_k, y_k)} du_i(x, y; \lambda)$. Это отображение многозначно, так как, в зависимости от выбора путей интегрирования, одному набору $(\{(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)\} \in (V)^g)$ соответствует счетное число значений $u_1, u_2, \dots$ в $\mathbb{C}^g$. Известно, однако, что попарные разности $u_i - u_j$ этих значений лежат в $\Lambda(\lambda)$. Таким образом, это отображение задает послойную бирациональную эквивалентность расслоений $A: (U_g, M_g, p_U) \rightarrow (J_g, M_g, p_J)$.

Непосредственно из конструкции расслоения $(\mathcal{L}, M_g, p_{\mathcal{L}})$ следует, что отображение $(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g) \mapsto (-z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ индуцирует на нем послойную инволюцию. Фактор по этой инволюции, которую мы будем называть канонической, задает расслоение $(\mathcal{K}, M_g, p_{\mathcal{K}})$, где $\mathcal{K} = \mathcal{I}_g \cap (\mathcal{H}_4 \times M_g)$. Проекция p_1 позволяет, согласно лемме 2.1 и следствию 2.3, отождествить пространство $\mathcal{K}$ с матричным подпространством $p_1(\mathcal{I}_g) \cap \mathcal{H}_4$.

ТЕОРЕМА 3.1 (о параметризации). *Имеет место послойная бирациональная эквивалентность расслоений $\mathcal{A}: (\mathcal{L}, M_g, p_{\mathcal{L}}) \rightarrow (J_g, M_g, p_J)$, коммутирующая с каноническими инволюциями и индуцирующая послойную бирациональную эквивалентность расслоений $\mathcal{B}: (\mathcal{K}, M_g, p_{\mathcal{K}}) \rightarrow (K_g, M_g, p_K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию $\mathcal{A} = A \circ \alpha: \mathcal{L} \rightarrow J_g$. Во-первых, заметим, что по построению

$$p_{\mathcal{L}}(-z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g) = p_{\mathcal{L}}(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g).$$

Для того чтобы показать, что отображение $\mathcal{A}$ коммутирует с инволюциями, достаточно проверить, что

$$\mathcal{A}(-z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g) + \mathcal{A}(z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g) \sim (0, \lambda).$$

Действительно, в обозначениях леммы 2.5 включение

$$\sum_{k=1}^g \int_{(\infty, \infty)}^{(\xi_k^+, \eta_k^+)} du(x, y; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z})) + \sum_{k=1}^g \int_{(\infty, \infty)}^{(\xi_k^-, \eta_k^-)} du(x, y; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z})) \in \Lambda(p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z})) \quad (3.2)$$

следует из классической теоремы Абеля ввиду того, что множество совместных нулей пары полиномов $\{\tau(x, y), f_g(x, y; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z}))\}$ и множество совместных нулей пары $\{\tau(x, y), \rho^+(x, y)\rho^-(x, y)\}$ совпадают.

Во-вторых, заметим, что отображение $\mathcal{A}$ переводит множество ветвления накрытия $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$, на котором все нули пары $\{\tau(x, y), f_g(x, y; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z}))\}$ двойные, в множество ветвления накрытия $J_g \rightarrow K$, т. е. в подпространство полупериодов $\{(\Omega, p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z})) \mid 2\Omega \in \Lambda(p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z}))\}$, и, следовательно, индуцированное отображение $\mathcal{B}$ корректно определено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Соотношение (3.2) выполняется при подходящей интерпретации периодов абелевых интегралов, т. е. решетки $\Lambda(p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z}))$, и в случае, когда полином $f_g(x, y; p_{\mathcal{L}}(\mathbf{Z}))$ вырожден (см. обсуждение теоремы Абеля в [2]). Отображение A , голоморфное в невырожденном случае, становится мероморфным, а его обращение сводится к классу так называемых обобщенных задач обращения Якоби. Решение методами теории θ -функций для некоторой частной постановки приведено в [7].

Слои универсальных расслоений многообразий Якоби и Куммера бирационально эквивалентны алгебраическим подмногообразиям. Используя обозначения, введенные в §2, сформулируем наш результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\lambda \in M_g$ — фиксированная точка.

(1) Имеет место реализация многообразия $Jac(V)$ как алгебраического подмногообразия в $\mathbb{C}^{4g+\delta}$, где $\delta = 2(g - 3\lfloor g/3 \rfloor)$. Это подмногообразие задается как множество совместных нулей системы из $2g + 3 + 3\lfloor (g - 1)/3 \rfloor = 3g + \delta$ полиномов, порожденных производящими функциями

$$G_1(t) = \gamma_{g,3}^{(2-\delta)/2} (Q(t^3, t^{g+1}; \mathbf{Z}) - 2f_g(t^3, t^{g+1}; \lambda)), \quad G_2(t) = R(t^3, t^{g+1}; \mathbf{Z}).$$

(2) Имеет место реализация многообразия $Kum(V)$ как алгебраического подмногообразия в $\mathbb{C}^{g(g+1)/2}$. Это подмногообразие задается как множество совместных нулей системы из $(g - 1)g/2$ полиномов степени не выше 5. Эти полиномы представляют собой 5×5 -миноры $(g+3) \times (g+3)$ -матрицы K , которая задана как анзац общего решения уравнения $W_g^T K W_g = 2r(x, y; K) f_g(x, y; \lambda)$ в пространстве матриц $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Согласно определению пространства $\mathcal{L}$, образ отображения $\mathcal{A}^{-1}$ в $\mathbb{C}^{4g+\delta}$ задан условием $R(x, y; \mathbf{Z}) = 0$ для всех $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, откуда получаем производящую функцию $G_2(t, \mathbf{Z})$. При заданном значении λ соотношение (2.7) порождает уравнения ограничения на слои в расслоении $(\mathcal{L}, M_g, p_{\mathcal{L}})$.

(2) Произвольная матрица $K \in \mathcal{T}_g$ по определению имеет $g(g+1)/2 + 3g + \delta$ параметров. При заданном значении $\lambda \in \mathbb{C}^{2g+3}$ соотношение (2.1) налагает на

эти параметры $2g + 3 + 3[(g - 1)/3]$ линейных условий (действительно, формально это соотношение задает некоторую целую рациональную нормально-го вида функцию порядка $3g + 3 + 3[(g - 1)/3]$, тождественно равную нулю на кривой), которые выделяют слой $p_{\mathcal{T}}^{-1}(\lambda) \subset \mathcal{T}_g$. Таким образом, общее решение уравнения $W_g^T K W_g = 2r(x, y; K) f_g(x, y; \lambda)$ в пространстве матриц $\mathcal{H}$, т.е. точка $K \in p_{\mathcal{T}}^{-1}(\lambda)$, имеет $g(g + 1)/2$ параметров. Из указанного выше отождествления $\mathcal{H}$ с пересечением $p_1(\mathcal{T}_g) \cap \mathcal{H}$ и леммы 2.1 следует, что отображение $\mathcal{B}^{-1}$ переводит слой расслоения (K_g, M_g, p_K) в пространство матриц $\{K \in p_{\mathcal{T}}^{-1}(\lambda) \mid \text{rank } K \leq 4\}$. $\square$

ПРИМЕР 3.4. Пусть $g = 3$. Тогда

$$W_3(x, y) = (1, x, y, x^2, yx, y^2)^T \quad \text{и} \quad R(x, y; Z) = 0.$$

Тригональная кривая $V(x, y)$ определяется полиномом

$$f_3(x, y; \lambda) = y^3 - (\lambda_{11}x + \lambda_8)y^2 - (\lambda_{10}x^2 + \lambda_7x + \lambda_4)y - (x^4 + \lambda_9x^3 + \lambda_6x^2 + \lambda_3x + \lambda_0).$$

Многообразие Якоби $\text{Jac}(V)$ выделяется в пространстве $\mathbb{C}^{12}$ с координатами $(z_i, (\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \gamma_{i,3}))$, $i = 1, 2, 3$, системой из 9 уравнений

$$\begin{aligned} 4\gamma_{3,3}\lambda_0 + z_1^2 + 4\gamma_{1,3}^2\gamma_{3,3} + 4\gamma_{1,3}\gamma_{1,1} - \gamma_{1,2}^2 &= 0, \\ 2\gamma_{3,3}\lambda_3 + z_1z_2 + 4\gamma_{1,3}\gamma_{2,3}\gamma_{3,3} + 2\gamma_{2,3}\gamma_{1,1} + 2\gamma_{1,3}\gamma_{2,1} - \gamma_{1,2}\gamma_{2,2} &= 0, \\ 2\gamma_{3,3}\lambda_4 + z_1z_3 + 4\gamma_{1,3}\gamma_{3,3}^2 + 2\gamma_{3,3}\gamma_{1,3} + 2\gamma_{1,3}\gamma_{3,1} - \gamma_{1,2}\gamma_{3,2} &= 0, \\ 4\gamma_{3,3}\lambda_6 + z_2^2 + 4\gamma_{2,3}^2\gamma_{3,3} + 4\gamma_{1,1} + 4\gamma_{2,3}\gamma_{2,1} - \gamma_{2,2}^2 &= 0, \\ 2\gamma_{3,3}\lambda_7 + z_2z_3 + 4\gamma_{2,3}\gamma_{3,3}^2 + 2\gamma_{3,3}\gamma_{2,1} + 2\gamma_{2,3}\gamma_{3,1} + 2\gamma_{1,2} - \gamma_{2,2}\gamma_{3,2} &= 0, \\ 4\gamma_{3,3}\lambda_8 + z_3^2 + 4\gamma_{1,3} + 4\gamma_{3,3}^3 + 4\gamma_{3,3}\gamma_{3,1} - \gamma_{3,2}^2 &= 0, \\ \gamma_{3,3}\lambda_9 + \gamma_{2,1} = 0, \quad \gamma_{3,3}\lambda_{10} + \gamma_{2,2} + \gamma_{3,1} = 0, \quad \gamma_{3,3}\lambda_{11} + \gamma_{2,3} + \gamma_{3,2} &= 0. \end{aligned}$$

Для описания многообразия Куммера $\text{Kum}(V)$ в пространстве $\mathbb{C}^6$ с координатами (v_i) , $i = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ (индекс у координаты равен ее весу в принятой градуировке), используется следующий анзац общего решения K уравнения $W_3^T K W_3 = 2r(x, y; K) f_3(x, y; \lambda)$ в классе симметрических матриц $\mathcal{H}$ при заданном значении вектора λ :

$$K = \begin{pmatrix} -2\lambda_0v_2 & -\lambda_3v_2 & -\lambda_4v_2 & v_8 & v_7 & v_6 \\ -\lambda_3v_2 & -2v_8 - 2\lambda_6v_2 & -v_7 - \lambda_7v_2 & -\lambda_9v_2 & v_4 & v_3 \\ -\lambda_4v_2 & -v_7 - \lambda_7v_2 & -2v_6 - 2\lambda_8v_2 & -v_4 - \lambda_{10}v_2 & -v_3 - \lambda_{11}v_2 & v_2 \\ v_8 & -\lambda_9v_2 & -v_4 - \lambda_{10}v_2 & -2v_2 & 0 & 1 \\ v_7 & v_4 & -v_3 - \lambda_{11}v_2 & 0 & -2 & 0 \\ v_6 & v_3 & v_2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения, выделяющие $\text{Kum}(V)$, находятся из условия $\text{rank } K \leq 4$, что сводится к трем уравнениям, которые получаются приравниванием нулю алгебраических дополнений элементов $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ и $K_{2,2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Можно показать, что система из $g + \delta - 3$ полиномиальных уравнений, порожденных производящей функцией $G_2(t)$, имеет рациональное

решение¹. Используя это решение, можно на основании следствия 3.3 прийти к реализации многообразия Якоби в пространстве $\mathbb{C}^{3g+3}$ как алгебраического подмногообразия. Однако ввиду того, что степени полиномов, порожденных функцией $G_1(t)$, не превосходят 4, а степени полиномов, порожденных функцией $G_2(t)$, растут линейно по g , степени уравнений в такой реализации растут полиномиально по g .

Применим к матрице K из п. (2) следствия 3.3 формулу (2.3). Получаем, что существует вектор $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_g)^T$, такой, что

$$q_i q_j + \frac{1}{2} \det K \begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 & g+3 \\ j & g+1 & g+2 & g+3 \end{bmatrix} = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, g\}, \quad (3.3)$$

где $K \begin{bmatrix} i & \dots & k \\ j & \dots & l \end{bmatrix}$ обозначает подматрицу матрицы K , составленную из элементов, находящихся на пересечении строк $(i, \dots, k)$ и столбцов $(j, \dots, l)$. Очевидно, найдется такой набор $\mathbf{Z} = (z, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \Delta_g)$ из п. (1), что $\mathbf{q} = \mathbf{z}$ удовлетворяет этим уравнениям. С другой стороны, имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Имеет место реализация многообразия Якоби тригональной кривой как множества совместных нулей системы из $g(g+1)/2$ полиномов степени не выше 4 вида (3.3) в пространстве $\mathbb{C}^{g(g+3)/2}$.*

§ 4. Униформизация многообразий Якоби

Построенные выше модели пространств J_g допускают явную униформизацию средствами теории абелевых функций. Для простоты изложения ниже мы ограничимся рассмотрением тригональных полиномов вида (1.1) с нулевым коэффициентом при y^2 . Это не приведет к ограничению общности, поскольку к такой форме можно перейти от общего полинома заменой $(x, y) \mapsto (x, y + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{[(g+1)/3]} \lambda_{2g+2+3j} x^j)$ и последующим переобозначением параметров.

В первой главе работы авторов [3] построена модификация стандартной θ -функции, которая задает отображение $\sigma: \mathbb{C}^g \times M_g \rightarrow \mathbb{C}$, являясь *инвариантной* относительно модулярных преобразований, т. е. ее значения, в отличие от значений θ -функции, не зависят от выбора образующих решетки $\Lambda(\lambda)$. Символ σ для таких функций ввел Клейн [10], подчеркивая аналогию с эллиптической σ -функцией Вейерштрасса. Как показано в [3], производные порядка > 1 от логарифма σ -функции являются *абелевыми* и одновременно *модулярно инвариантными* функциями, т. е. мероморфными функциями, областью определения которых служит пространство J_g . Для этих логарифмических производных σ -функции приняты следующие обозначения:

$$\wp_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\mathbf{u}, \lambda) = -\frac{\partial^k \log \sigma(\mathbf{u}, \lambda)}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}}, \quad k \geq 2.$$

Отметим свойство четности $\wp$ -функций: $\wp_{i_1, \dots, i_k}(-\mathbf{u}, \lambda) = (-1)^k \wp_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{u}, \lambda)$.

Приведенные далее результаты опираются на следующее соотношение, аналог которого имеет место и для θ -функций [7], однако существенная для нас

¹Это непосредственно следует, например, из рациональности универсальных пространств симметрических степеней алгебраических кривых [5].

явная зависимость правой части этого соотношения от параметров модели кривой может быть получена только для модулярно инвариантной левой части:

$$\sum_{i,j=1}^g \wp_{i,j} \left(\mathbf{v} - \int_{(\infty, \infty)}^{(\xi, \eta)} d\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda} \right) du_i(\xi, \eta; \boldsymbol{\lambda}) du_j(x, y; \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathcal{F}((\xi, \eta), (x, y); \boldsymbol{\lambda}) d\xi dx}{(\xi - x)^2 \frac{\partial}{\partial y} f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \eta} f_g(\xi, \eta; \boldsymbol{\lambda})}, \quad (4.1)$$

где (x, y) принадлежит любому из наборов $\{(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)\} \in (V)^g \mid A(\{(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)\}; \boldsymbol{\lambda}) \sim (\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})\}$, а (ξ, η) — произвольная точка кривой V . В рассматриваемом случае тригональных кривых для $\mathcal{F}((\xi, \eta), (x, y); \boldsymbol{\lambda})$ имеет место выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((\xi, \eta), (x, y); \boldsymbol{\lambda}) &= 3y^2\eta^2 - y^2P_1(\xi) - \eta^2P_1(x) + y\eta\Psi_2(P_1; x, \xi) \\ &\quad + \eta\Psi_3(P_0; x, \xi) + y\Psi_3(P_0; \xi, x) + \frac{1}{2}\Psi_2(P_1^2; x, \xi), \end{aligned}$$

где $\Psi_r(q; x, \xi) = \sum_{k \geq 0} q_k x^{k - [k/r] - 1} \xi^{[k/r]} ((r[k/r] + r - k)x + (k - r[k/r])\xi)$ для любого полинома $q(t) = \sum_{k \geq 0} q_k t^k$, а полиномы $P_1(x) = \sum_{j=0}^{[(2g+2)/3]} \lambda_{g+1+3j} x^j$ и $P_0(x) = x^{g+1} + \sum_{j=0}^g \lambda_{3j} x^j$ — коэффициенты при степенях переменной y тригонального полинома. Обратим внимание, что $\Psi_r(q; x, x) = rq(x)$ и, таким образом,

$$\mathcal{F}((x, y), (x, y); \boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda}) \right)^2 - f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda}).$$

Положим $\wp_k^T = (\wp_{i,k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}))$, $i = 1, \dots, g$, и $\frac{\partial}{\partial v_g}(\dots) = (\dots)'$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Зададим отображение $\pi: \mathbb{J}_g \rightarrow \mathbb{C}^{4g+\delta}$ формулами*

$$\mathbf{z} = \wp'_g, \quad \gamma_3 = -\wp_g, \quad \gamma_2 = \wp_{g-1}, \quad (4.2)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{1}{3}(\wp''_g - (6\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) + \lambda_{3g+1})\wp_g + \mathbf{L}_g), & g = 3\ell, \\ \frac{1}{3}(\wp''_g - (6\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2}\lambda_{3g+2}^2)\wp_g + \lambda_{3g+2}\wp_{g-1} + \mathbf{L}_g), & g = 3\ell + 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\mathbf{L}_g^T = (\lambda_{g+1+i}\delta_{i,3[i/3]}), i = 0, \dots, g-1$ (здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера), и

$$h_{g+1,g+1} = 2\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}), \quad h_{g+1,g+2} = \begin{cases} 0, & g = 3\ell, \\ -\lambda_{3g+2}, & g = 3\ell + 1. \end{cases}$$

Мероморфное отображение π униформизирует подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{4g+\delta}$ и определяет послойное отображение расслоений $(\mathbb{J}_g, \mathbb{M}_g, p_{\mathbb{J}}) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathbb{M}_g, p_{\mathcal{L}})$, обратное к отображению $\mathcal{A}$ из теоремы 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \neq 0$ и $\mathbf{v}$ — не полупериод, т. е. $2\mathbf{v} \notin \Lambda(\boldsymbol{\lambda})$. Тогда соотношение (4.1) эквивалентно следующему утверждению: целая рациональная функция порядка $2g+4$

$$\begin{aligned} \Phi^{\pm}(x, y, \mathbf{v}) &= \mathcal{F}((\xi, \eta), (x, y); \boldsymbol{\lambda}) \\ &\quad - (x - \xi)^2 \sum_{i,j=1}^g \wp_{i,j} \left(\mathbf{v} \mp \int_{(\infty, \infty)}^{(\xi, \eta)} d\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda} \right) w_i(\xi, \eta) w_j(x, y) \end{aligned}$$

имеет на кривой $V(x, y)$ в точности g нулей $\{(x_1^\pm, y_1^\pm), \dots, (x_g^\pm, y_g^\pm)\}$, не зависящих от произвольной точки $(\xi, \eta) \in V$.

Рассмотрим случай $g = 3\ell$. Используя параметризацию $\xi = t^{-3}$ и $\eta = t^{-(g+1)}(1 + \frac{1}{3}\lambda_{3g+1}t^2 + \dots)$, исследуем поведение функции $\Phi^\pm(x, y)$ в окрестности $(\xi, \eta) = (\infty, \infty)$. Имеем

$$\Phi^\pm(x, y, \mathbf{v}) = t^{-2g-4} \sum_{i \geq 0} \Phi_i^\pm(x, y, \mathbf{v}) t^i,$$

причем

$$\Phi_0^\pm(x, y, \mathbf{v}) = \Phi_0(x, y, \mathbf{v}) = w_{g+1}(x, y) - \wp_g^T \mathbf{U}(x, y),$$

$$\Phi_1^\pm(x, y, \mathbf{v}) = 2w_{g+2}(x, y) - (\wp_{g-1} \pm \wp'_g)^T \mathbf{U}(x, y),$$

$$\Phi_2^\pm(x, y, \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial y} f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{2}(\wp''_g \pm \wp'_{g-1})^T \mathbf{U}(x, y) + \frac{\lambda_{3g+1}}{3} \Phi_0(x, y, \mathbf{v}),$$

где, как и выше, $w_i(x, y)$ обозначает i -ю координату вектора $\mathbf{W}_g(x, y)$ и $\mathbf{U}(x, y) = (w_1(x, y), \dots, w_g(x, y))^T$.

Функции $\{\Phi_0(x, y, \mathbf{v}), \Phi_1^\pm(x, y, \mathbf{v}), \dots\}$ одновременно обращаются в нуль на множествах точек $\{(x_1^\pm, y_1^\pm), \dots, (x_g^\pm, y_g^\pm)\} \in (V)^g$. Согласно теоремам 2.6 и 3.1, наборы $(\pm \mathbf{z}, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = \alpha^{-1}(\{(x_j^\pm, y_j^\pm)\}, \boldsymbol{\lambda})$ принадлежат $\mathcal{L}$. Отметим, что условие $\sigma(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \neq 0$ эквивалентно невырожденности матриц $(\mathbf{U}(x_i^\pm, y_i^\pm))$, $i = 1, \dots, g$.

Отождествляя множества совместных нулей пар полиномов $\Phi_0(x, y, \mathbf{v})$ и $\Phi_1^\pm(x, y, \mathbf{v})$ с множествами нулей $\{(\xi_j^\pm, \eta_j^\pm)\}$ из леммы 2.5, получаем

$$\tau(x, y) = \Phi_0(x, y, \mathbf{v}) \quad \text{и} \quad \rho^\pm(x, y) = -\Phi_1^\pm(x, y, \mathbf{v}),$$

откуда следует (4.2). Остается выразить вектор $\boldsymbol{\gamma}_1$ через $\wp$ -функции и $\boldsymbol{\lambda}$. Используем тождество (см. (2.1) и (2.6))

$$(2y^2 - 4\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})w_{g+1}(x, y) + 2\mathbf{U}(x, y)^T \boldsymbol{\gamma}_1 - 2\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})\Phi_0(x, y, \mathbf{v}))\Phi_0(x, y, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}\Phi_1^-(x, y, \mathbf{v})\Phi_1^+(x, y, \mathbf{v}) - 2f_g(x, y; \boldsymbol{\lambda})\frac{\partial}{\partial y}\Phi_0(x, y, \mathbf{v}) = 0, \quad (4.4)$$

которое выполняется для всех $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Продифференцируем (4.4) по v_g и подставим $(x, y) = (x_k^+, y_k^+)$ для некоторого $k \in \{1, \dots, g\}$. Получаем

$$\Phi_1^-(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v})\{(y_k^+)^2 + \mathbf{U}(x_k^+, y_k^+)^T(\boldsymbol{\gamma}_1 + 2\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})\wp_g)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_g}\Phi_1^+(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}) = 0,$$

где мы использовали тождество

$$\frac{\partial}{\partial v_g}\Phi_0(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\Phi_1^+(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}) - \Phi_1^-(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v})) = -\frac{1}{2}\Phi_1^-(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}).$$

Таким образом, поскольку $\Phi_1^-(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}) \neq 0$, если $\mathbf{v}$ — не полупериод,

$$-(y_k^+)^2 = \mathbf{U}(x_k^+, y_k^+)^T \left\{ \boldsymbol{\gamma}_1 - \frac{1}{2}\wp''_g - \frac{1}{2}\wp'_{g-1} + 2\wp_{g,g}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})\wp_g \right\};$$

с другой стороны, из равенства $\Phi_2^+(x_k^+, y_k^+, \mathbf{v}) = 0$ следует

$$-(y_k^+)^2 = \mathbf{U}(x_k^+, y_k^+)^T \left\{ -\frac{1}{6}\wp''_g - \frac{1}{2}\wp'_{g-1} \right\} + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{[(2g+2)/3]} \lambda_{g+1+3j} x_k^j,$$

и ввиду невырожденности матрицы $(U(x_k^+, y_k^+))_{k=1, \dots, g}$ мы приходим к (4.3).

Случай $g = 3\ell + 1$ рассматривается аналогично. $\square$

5. Семейство нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемых в тригональных $\wp$ -функциях

В свете результатов теоремы 4.1 производящие функции $G_1(t)$ и $G_2(t)$, введенные в п. (1) следствия 3.3, получают новую интерпретацию. Пусть вектор $\mathbf{Z}$ задан формулами (4.2) и (4.3); тогда полиномы, порожденные функциями $G_1(t)$ и $G_2(t)$, представляют собой *дифференциальные соотношения*, которым удовлетворяют тригональные $\wp$ -функции.

С другой стороны, задавая вектор $\mathbf{Z}$ формулами

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{u}'' - (6u_g + \delta_{g,3[g/3]}\lambda_{3g+1} + \delta_{g,1+3[g/3]}\frac{1}{2}\lambda_{3g+2}^2)\mathbf{u} + \delta_{g,1+3[g/3]}\lambda_{3g+2}\mathbf{q} + \mathbf{L}_g),$$

$$\gamma_2 = \mathbf{q}, \quad \gamma_3 = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{u}', \quad h_{g+1,g+1} = 2u_g, \quad h_{g+1,g+2} = -\delta_{g,1+3[g/3]}\lambda_{3g+2},$$

получаем с помощью производящих функций $G_1(t)$ и $G_2(t)$ набор дифференциальных полиномов $S_\lambda^0 = S_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')$. Дополним набор S_λ^0 набором линейных выражений

$$S^1 = \left\{ q'_i - \frac{\partial}{\partial v_{g-1}} u_i; \frac{\partial}{\partial v_i} u_k - \frac{\partial}{\partial v_k} u_i, \frac{\partial}{\partial v_i} q_k - \frac{\partial}{\partial v_k} q_i \right\}, \quad i, k = 1, \dots, g, \quad i > k,$$

до набора

$$\widehat{S}_\lambda = S_\lambda^0 \cup S^1 = \widehat{S}_\lambda \left(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial v_1} \mathbf{q}, \dots, \mathbf{q}' = \frac{\partial}{\partial v_g} \mathbf{q}, \frac{\partial}{\partial v_1} \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}' = \frac{\partial}{\partial v_g} \mathbf{u}, \mathbf{u}'' \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Система $\widehat{S}_\lambda = 0$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $\mathbf{q}$ и $\mathbf{u}$ допускает решение в тригональных $\wp$ -функциях $\mathbf{q} = \wp_{g-1}$ и $\mathbf{u} = \wp_g$.

Введем градуировку для независимых переменных $\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_g)$ по правилу $\deg v_i = \deg w_i - 2g + 1$, так что $\deg v_g = -1$, $\deg v_{g-1} = -2$ и т.д. (заметим, что последовательность $-\deg \mathbf{v}$ образует последовательность Вейерштрасса, порожденную парой взаимно простых чисел $(3, g+1)$; см. [4]). Для функций $\mathbf{q}$ и $\mathbf{u}$ возьмем веса, которые следуют из принятого в §2 соглашения о весах координат векторов γ_2 и γ_3 , и, таким образом, $\deg u_g = 2$, $\deg u_{g-1} = \deg q_g = 3$ и т.д. В этой градуировке элементы набора $\widehat{S}_\lambda$ являются однородными дифференциальными полиномами. Рассмотрим подробнее полиномы младших весов.

Производящие функции $G_1(t)$ и $G_2(t)$ порождают по одному полиному каждого веса. При этом функция $G_2(t)$ порождает полиномы веса не менее $2g - 3[(g-1)/3] = g + 3 - \delta$. Таким образом, элементы наименьших весов 3 и 4 в наборе S_λ^0 порождены функцией $G_1(t)$. А именно, имеется единственный полином $\psi_3 = q_g - u_{g-1}$ веса 3 и единственный полином веса 4

$$\psi_4 = u_g'' - 6u_g^2 + 3q_{g-1} - aq_g - bu_g - c,$$

где

$$\{a, b, c\} = \{2\delta_{g,1+3[g/3]}\lambda_{3g+2}, 4\delta_{g,3[g/3]}\lambda_{3g+1} + \delta_{g,1+3[g/3]}\lambda_{3g+2}^2, 2\delta_{g,1+3[g/3]}\lambda_{3g-1}\}.$$

Положим $v_g = \xi$, $v_{g-1} = \eta$ и $u_g = U/2$, а частные производные U по ξ и η будем обозначать индексами, например $\partial U / \partial \xi = U_\xi$, $\partial^2 U / \partial \xi^2 = U_{\xi\xi}$ и т.п.

Из системы уравнений $(\psi_3, \psi_4, S^1) = 0$ следует дифференциальное уравнение относительно U вида

$$3U_{\eta\eta} + (U_{\xi\xi\xi} - 6U_{\xi}U)_{\xi} - aU_{\xi\eta} - bU_{\xi\xi} = 0, \quad (5.1)$$

т.е. хорошо известное *уравнение Буссинеска*. По предложению 5.1 решением уравнения (5.1) является функция $U = 2\wp_{g,g}(u_1, \dots, \eta, \xi, \lambda)$, построенная по модели тригональной кривой, заданной уравнением

$$y^3 - y \left(\sum_{j=0}^{[(2g+2)/3]} \lambda_{g+1+3j} x^j \right) - \left(x^{g+1} + \sum_{j=0}^g \lambda_{3j} x^j \right) = 0.$$

Сравним полученный результат с аналогичным результатом из гиперэллиптической теории [3]. Гиперэллиптическая функция $2\wp_{g,g}(u_1, \dots, \eta, \xi, \lambda)$, построенная по модели гиперэллиптической кривой

$$y^2 - 4x^{2g+1} - \sum_{j=0}^{2g-1} \lambda_{2j} x^j = 0,$$

является решением *иерархии Кортевега–де Фриза* и, в частности, классического уравнения КдФ

$$2U_{\eta} - U_{\xi\xi\xi} + 6UU_{\xi} = 0. \quad (5.2)$$

При некоторых ограничениях на значения параметров λ гиперэллиптическая функция $2\wp_{1,1}$ веса $4g - 2$ является решением *уравнения Кадомцева–Петвиашвили*

$$4U_{\xi\xi} - 3U_{\eta\eta} - (U_{\xi\xi\xi} - 6U_{\xi}U)_{\xi} = 0, \quad (5.3)$$

а с помощью функции $\wp_{1,g}$ веса $2g - 2$ строится решение уравнения sine-Gordon.

В обоих случаях (5.1) и (5.2) решение $U = 2\wp_{g,g}$ — это функция веса 2, наименьшего веса, возможного для $\wp$ -функции, а веса $\{-\deg \xi, -\deg \eta\}$ представляют собой начальные отрезки соответствующих последовательностей Вейерштрасса: $\{1, 2\}$ для (5.1) и $\{1, 3\}$ для (5.2). При этом правые части (5.1) и (5.2) получены (кратным) дифференцированием по ξ полинома веса 4, которому отвечает соотношение $\wp_{g,g,g,g} - 6\wp_{g,g}^2 + \dots = 0$.

Элементы веса > 4 из семейства $\hat{S}_{\lambda}$ после кратного дифференцирования приводят к системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно функции U — *иерархии Буссинеска*. Системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $\wp$ -функции старших весов, образуют семейства, не сводящиеся к иерархии Буссинеска. Детально этот круг вопросов будет разобран в наших ближайших публикациях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для того чтобы функция $U = 2\wp_{g,g}(u_1, \dots, \zeta, \eta, \xi, \lambda)$ веса 2, построенная по (n, s) -модели кривой $y^n - x^s + \dots = 0$, была решением уравнения (5.3), необходимо, чтобы число листов модели n было не меньше 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, применим масштабное преобразование $(U, \xi, \eta, \zeta) \mapsto (t^2 U, t^{-\alpha_1} \xi, t^{-\alpha_2} \eta, t^{-\alpha_3} \zeta)$ к уравнению (5.3). Из требования однородности получаем $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{1, 2, 3\}$, т.е. начальный отрезок последовательности Вейерштрасса содержит тройку $\{1, 2, 3\}$ и, следовательно, $n > 3$. $\square$

В некоторых случаях условие $n > 3$ является достаточным. По соображениям однородности полиномиальное соотношение веса 4 для $\wp$ -функций, если оно существует, всегда имеет вид

$$\wp_{g,g,g,g} = 6\wp_{g,g}^2 + a_0\wp_{g,g-2} + b_0\wp_{g-1,g-1} + a_1\wp_{g,g-1} + a_2\wp_{g,g} + a_4,$$

где индексы у параметров a и b равны их весам. В «рациональном пределе» $\lambda \rightarrow 0$ параметры a_4 , a_2 и a_1 принимают нулевые значения, а функция $\sigma(v, \lambda)$ переходит в специальный полином Шура $\sigma_{n,s}(v)$ — *полином Шура-Вейерштрасса* (см. [4]). Как известно [9], удвоенная вторая производная логарифма любого полинома Шура по переменной веса 1 и, в частности, рациональный предел функции $2\wp_{g,g}$, является рациональным решением уравнения (5.3), откуда следует $a_0 = -4$ и $b_0 = 3$.

К сожалению, ограниченный объем статьи не позволяет нам расширить список примеров. Мы надеемся, что приведенные выше результаты достаточно ясно демонстрируют естественность нашего подхода, основанного на (n, s) -моделях кривых и теории $\wp$ -функций многих переменных, в контексте приложения теории абелевых функций к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Baker H. F.* Multiply Periodic Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1907.
2. *Baker H. F.* Abelian Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
3. *Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V.* Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications. In: Reviews in Mathematics and Mathematical Physics (Novikov S. P., Krichever I. M., eds.), vol. 10, no. 2, Gordon & Breach, London, 1997, pp. 1–125.
4. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В., Энольский В. З.* Рациональные аналоги абелевых функций. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 1–15 (1999).
5. *Buchstaber V. M., Rees E. G.* Symmetric Powers of Algebraic Varieties. Preprint, Edinburgh University, Dec. 1999.
6. *Дубровин Б. А.* Тета-функции и нелинейные уравнения. УМН, **36**, вып. 2, 11–80 (1981).
7. *Fay J. D.* Theta functions on Riemann surfaces. Lecture Notes in Math., vol. 352, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Наука, М., 1967.
9. *Кац В. Г.* Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.
10. *Klein F.* Über hyperelliptische Sigmafunctionen. Math. Ann., **32**, 351–380 (1888).
11. *Мамфорд Д.* Лекции о тета-функциях. Мир, М., 1988.
12. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. ОГИЗ, М., 1948.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: buchstab@mech.math.msu.su

Институт магнетизма НАНУ, Киев
e-mail: dile@imag.kiev.ua

Институт магнетизма НАНУ, Киев
e-mail: vze@imag.kiev.ua

Поступило в редакцию
22 мая 2000 г.