Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Формула для спектра дифференциального оператора на графе, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 17–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3070>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:18:37

Формула для спектра дифференциального оператора на графе*

© 2012. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Рассматривается связный граф с конечным числом вершин и спектральная задача, порожденная двукратным дифференцированием в пространстве функций на ребрах (с обычными условиями в вершинах, обеспечивающими самосопряженность задачи). Обычным образом вводится целая функция, корнями которой служат ненулевые собственные числа задачи. Указывается явная формула для этой функции; в записи этой функции участвуют введенные В. И. Арнольдом графы, порожденные отображением в себя конечного множества.

Введение. Рассмотрим связный неориентированный граф $G = (V, E)$ (здесь V — множество вершин, E — множество ребер) без петель и кратных ребер с конечным числом вершин $|V| = n$; имеется в виду, что ребра замкнуты (включают концевые вершины). Для каждого ребра $l = \{a, b\}$ зафиксируем некоторое отождествление его с некоторым отрезком; тогда на ребре возникает метрика; расстояние между точками $x, x' \in l$ обозначим через $d(x, x')$, а длину ребра l — через $|l|$. Если на ребре $l = \{a, b\}$ фиксировать ориентацию (скажем, при помощи упомянутого отождествления с отрезком), то для функции $f(x)$, $x \in l$, определена производная; однако вторая производная не зависит от выбора ориентации. Для концевых вершин a, b определены односторонние производные $f'_l(a) = \lim(f(x) - f(a))/d(x, a)$, где $x \rightarrow a$, $x \in l$, и $f'_l(b) = \lim(f(x) - f(b))/d(x, b)$, где $x \rightarrow b$, $x \in l$; они также не зависят от выбора ориентации. Обозначим через $C^k(G)$ множество функций $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, имеющих непрерывные производные до порядка k на каждом ребре (в концевых точках имеются в виду односторонние производные); заметим, что мы не требуем непрерывности указанных производных в вершинах графа. Зафиксируем числа $p(l) = p(a, b) = p(b, a) > 0$, $l \in E$; для несмежных вершин a, b положим $p(a, b) = 0$. Обозначим через H гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций (более точно, классов эквивалентности функций, совпадающих почти всюду) со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \sum_{l \in E} p(l) \int_l f_1(x) \overline{f_2(x)} dx. \quad (1)$$

Определим правилом $u \mapsto -u''$ оператор на множестве функций $u \in C^2(G)$, подчиненных условию

$$\sum_b p(a, b) u'_l(a) = 0, \quad l = \{a, b\}. \quad (2)$$

Этот оператор симметричен и имеет самосопряженное замыкание A . Оператор A и будет предметом исследования.

*Работа поддержана РФФИ, грант 11-01-00790.

Обычно полагают $p(l) = 1$ для всех l ; но в нашем изложении «веса» $p(l)$ играют существенную роль и упрощают анализ. Исследованию оператора A (при условии, что $p(l) = 1$) посвящено немало работ. Имеется замечательная формула следа [1], выражающая величину $\text{Tr exp}(-tA)$ через числовые характеристики графа; в эту формулу входят слагаемые, порожденные циклами в графе. В дальнейшем были получены другие «формулы следа»; яркие результаты, посвященные спектру, задачам рассеяния, обратным задачам, содержатся в [2], [3]. Общая теория операторов на метрических графах изложена в монографии [4].

В предлагаемой работе описан весьма элементарный способ вычисления произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_k^2)$, где $\{\lambda_k^2\}$ — это все ненулевые собственные значения оператора A . Это произведение выражается в виде многочлена от величин $p(l)$, а коэффициентами многочлена служат тригонометрические многочлены от λ ; дело сводится к вычислению последних. Здесь используются введенные В. И. Арнольдом графы, порожденные отображением в себя конечного множества.

В дальнейшем число элементов произвольного множества X обозначается через $|X|$.

1. Описание результата. Напомним конструкцию В. И. Арнольда [5], связанную с произвольным отображением $f: X \rightarrow X$, где X — конечное множество. Этому отображению ставится в соответствие ориентированный граф G_f , множеством вершин которого является указанное множество X , а (ориентированные) ребра имеют вид $(x, f(x))$, $x \in X$. Арнольд доказывает, что каждая связная компонента графа G_f состоит из цикла и набора (возможно, пустого) корневых деревьев, корни которых — это вершины цикла, причем деревья ориентированы по направлению к корню. В нашем случае множеством X будет множество V вершин графа $G = (V, E)$, а все возникающие далее отображения $f: V \rightarrow V$ будут переводить каждую вершину v в смежную вершину $f(v)$. Взяв граф Арнольда G_f , введем (неориентированный) подграф G_f° графа G , полученный из G_f «забыванием» ориентации ребер. Пусть E_f — множество ребер графа G_f° и $E'_f = E \setminus E_f$; поясним, что если в G_f содержится (ориентированный) цикл, состоящий из двух противоположно направленных ребер, то при «забывании» ориентации эти два ребра переходят в одно (неориентированное). Введем следующие обозначения:

- 1) C_f — множество циклов из G_f° , полученных («забыванием» ориентации) из циклов графа G_f , имеющих более двух вершин;
- 2) D_f — множество ребер из G_f° , полученных («забыванием» ориентации) из пары противоположно направленных ребер графа G_f ;
- 3) T_f — множество ребер (также с игнорированием ориентации) упомянутых деревьев.

Через $\tau(f)$ обозначим число связных компонент графа G_f . Введем величины

$$P_f = \prod_{a \in V} p(a, f(a)) \quad (3)$$

и

$$R_f(\lambda) = \lambda^{|V|-|E|-2} (-1)^{\tau(f)} \prod_{l \in D_f \cup E'_f} \sin \lambda |l| \prod_{l \in T_f} \cos \lambda |l| \prod_{c \in C_f} \left(1 - \prod_{l \in c} \cos \lambda |l| \right). \quad (4)$$

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) = c_0 \sum_f P_f R_f(\lambda), \quad (5)$$

где c_0 — константа, а суммирование производится по всевозможным отображениям $f: V \rightarrow V$, таким, что вершины $v, f(v)$ смежны.

Константа c_0 будет указана в разд. 2.

Доказательство. В дальнейших вычислениях будут участвовать матрицы, элементы которых занумерованы вершинами графа; каждую такую матрицу S мы записываем в виде $(s_{a,b})$, $a, b \in V$. Символ δ_{ab} задается правилами $\delta_{ab} = 0$ при $a \neq b$, $\delta_{aa} = 1$.

В качестве первого шага к доказательству теоремы выразим резольвенту $R_\lambda = (A - \lambda^2 I)^{-1}$ и ее след $\text{Tr } R_\lambda$. Эти вычисления вполне стандартны (хотя и несколько громоздки), а потому изложим их кратко. Для каждого ребра $l = \{a, b\}$ введем функции от переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ по формулам $s(l, \lambda) = s(a, b; \lambda) = \sin \lambda |l|$, $c(l, \lambda) = c(a, b; \lambda) = \cos \lambda |l|$. Введем также матрицу

$$K(\lambda) = (K(a, b; \lambda)), \quad a, b \in V,$$

с элементами

$$K(a, b; \lambda) = \sum_{r \in V} p(a, r) \frac{c(a, r, \lambda)}{s(a, r, \lambda)} \delta_{ab} - \frac{p(a, b)}{s(a, b; \lambda)}, \quad a, b \in V.$$

Положим $D = K^{-1}$, $D = (d(a, b))$, $a, b \in V$. Тогда для любой функции $f \in H$ функция $y = R_\lambda f$ выражается через величины $y(a)$, $a \in V$, а для этих величин условие (2) дает систему линейных уравнений (ее матрица появится ниже). Решив эту систему, получаем искомое выражение резольвенты. После этого находим величину $\text{Tr } R_\lambda$, интегрируя ядро резольвенты по диагонали. (В этих вычислениях используется равенство $(\ln \det A)' = \text{Tr}(A^{-1} A')$, верное для любой гладкой матричной функции $x \mapsto A(x)$.) Наконец, эта (формальная) часть работы завершается равенством

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) = c_0 \lambda^{|V|-|E|-2} \prod_{l \in E} s(l, \lambda) \det K(\lambda). \quad (6)$$

Следующая, менее тривиальная часть — преобразование функции, стоящей справа в этом равенстве. Для каждого ребра $l = \{a, b\}$ положим $x_l = x_{a,b} = e^{i\lambda |l|}$. Временно отбросив множитель $\lambda^{|V|-|E|-2}$, а также множители, не зависящие от λ , перепишем правую часть равенства (6) в виде

$$\Phi(\{x_l\}) / \prod_{l \in E} x_l, \quad (7)$$

где

$$\Phi(\{x_l\}) = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \det \left(\sum_{r \in V} p(a, r) \frac{x_{ar}^2 + 1}{x_{ar}^2 - 1} \delta_{ab} - \frac{2p(a, b)x_{ab}}{x_{ab}^2 - 1} \right). \quad (8)$$

Лемма. $\Phi(\{x_l\})$ есть многочлен от переменных $\{x_l\}$, и его степень по каждой переменной не превосходит двух.

Доказательство. Зафиксируем переменную $x_l = x_{ab}$ и выпишем все ее вхождения в формулу для $\Phi(\{x_l\})$; будем считать для удобства, что строки матрицы из (8), соответствующие элементам $a, b \in V$, — это первые две строки. Вот все эти вхождения (мы опускаем символ $\det$):

$$(x_l^2 - 1) \begin{pmatrix} p(a, b) \frac{x_{ab}^2 + 1}{x_{ab}^2 - 1} & -\frac{2p(a, b)x_{ab}}{x_{ab}^2 - 1} \\ -\frac{2p(a, b)x_{ab}}{x_{ab}^2 - 1} & p(a, b) \frac{x_{ab}^2 + 1}{x_{ab}^2 - 1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Раскроем детерминант в (8) по указанным двум строкам, т. е. запишем сумму произведений детерминантов матриц второго порядка, находящихся в этих строках, на их алгебраические дополнения. При этом детерминант матрицы из (9) равен константе $p^2(a, b)$, а остальные слагаемые либо содержат $x_l^2 - 1$ (в первой степени) в знаменателе, либо не содержат вовсе это выражение. Итак, детерминант в (8) имеет вид $S(\{x_l\})/(x_l^2 - 1)$, где S — многочлен относительно x_l с коэффициентами, зависящими от остальных переменных. Следовательно, $\Phi(\{x_l\})$ — многочлен от переменных $\{x_l\}$. Чтобы оценить его степень по фиксированной переменной x_l , устремим x_l к бесконечности (остальные переменные сохраняем постоянными). Тогда детерминант в (8) имеет конечный предел, а стоящий перед ним множитель $x_l^2 - 1$ показывает, что степень многочлена $\Phi(\{x_l\})$ относительно x_l не превосходит двух. Лемма доказана.

Поясним, каким образом эта лемма позволяет преобразовать $\Phi(\{x_l\})$ к удобному виду.

Рассмотрим детерминант матрицы, входящий в запись функции $\Phi(\{x_l\})$. Каждый элемент матрицы есть рациональная функция от переменных $\{x_l\}$, регулярная при $x_l = 0$. Разложим каждую из этих функций в степенной ряд по степеням указанных переменных (ряд сходится в некоторой окрестности точки $x_l = 0$). Вычислим детерминант (по обычным правилам), производя нужные вычисления с указанными рядами. В итоге детерминант, а тем самым, и функция $\Phi(\{x_l\})$ также представятся в виде суммы степенного ряда. Но из леммы видно, что ряд для $\Phi(\{x_l\})$ содержит только такие одночлены от переменных $\{x_l\}$, в которые каждая переменная входит в степени, не превосходящей двух. Поэтому мы можем несколько модифицировать описанное вычисление следующим образом: для каждого элемента нашей матрицы условимся записывать соответствующий степенной ряд кратко, сохранив в нем только члены, в которые каждая переменная входит в степени, не превосходящей двух; прочие члены будем записывать в виде многоточия. Такой же способ записи будем применять для всех степенных рядов, возникающих в ходе вычислений. Наконец, получив ряд для $\Phi(\{x_l\})$, мы можем отбросить упомянутое многоточие, и функция $\Phi(\{x_l\})$ будет получена.

Опишем намеченную процедуру подробно.

Во-первых, для функций, входящих в запись детерминанта из формулы (8), имеем

$$\frac{x_{ar}^2 + 1}{x_{ar}^2 - 1} = -1 - 2x_{ar}^2 + \dots, \quad \frac{2x_{ab}}{x_{ab}^2 - 1} = -2x_{ab} + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(\{x_l\}) = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \det \left(\sum_{r \in V} p(a, r) (-2x_{ar}^2 - 1) \delta_{ab} + 2p(a, b)x_{ab} \right) + \dots \quad (10)$$

Заметим, что детерминант произвольной матрицы есть сумма слагаемых, каждое из которых есть произведение некоторого (возможно, пустого) множества диагональных элементов на детерминант подматрицы, полученной удалением строк и столбцов, в которых лежат указанные диагональные элементы. Применяя это к детерминанту из (10), получаем (в следующей ниже формуле M пробегает все подмножества из V , а $M' = V \setminus M$):

$$\Phi(\{x_l\}) = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \sum_{M \subset V} \left(\prod_{a \in M'} \left(\sum_r p(a, r) (-2x_{ar}^2 - 1) \right) \det(2p(b, c)x_{b,c}) \right) + \dots$$

(В последнем детерминанте имеется в виду, что $b, c \in M$.) В каждом слагаемом последней суммы выделяем произведение множителей вида $p(\cdot, \cdot)$. Используя обозначение (3), получаем

$$\Phi(\{x_l\}) = \sum_f P_f Q_f, \quad (11)$$

где

$$Q_f = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \sum_{M \subset V} \left(\prod_{a \in M'} (-2x_{a,f(a)}^2 - 1) \det(2x_{b,f(b)}) \right) + \dots; \quad (12)$$

здесь f пробегает все отображения $f: V \rightarrow V$, такие, что $f: M \rightarrow M$ — биекция (и, напомним, $(a, f(a))$ есть ориентированное ребро графа G_f для любой вершины $a \in V$); в последнем детерминанте через $(2x_{b,f(b)})$ обозначена матрица, у которой элемент, стоящий на позиции $(b, f(b))$, равен $2x_{b,f(b)}$, а остальные элементы равны нулю, причем имеется в виду, что $b \in M$.

Так как $f: M \rightarrow M$ есть биекция, то M распадается на циклы графа G_f . Таким образом, если взять любой цикл из G_f , то либо все его вершины лежат в M , либо все вершины лежат в M' . Введем следующие обозначения: 1) $D_f(M)$ — множество всех неориентированных ребер, получающихся (при забывании ориентации) из пары противоположно направленных ребер графа G_f , у которых обе вершины лежат в M ; аналогично определяется множество $D_f(M')$; 2) $C_f(M)$ — множество неориентированных циклов, получающихся (путем забывания ориентации) из циклов графа G_f , у которых все вершины лежат в M ; аналогично определяется $C_f(M')$; напомним также, что через T_f мы обозначили множество (неориентированных) ребер деревьев, входящих в граф G_f° . Выразим в этих обозначениях фрагменты формулы (12).

Начнем с произведения $\prod_{a \in M'} (-1 - 2x_{a,f(a)}^2)$. Во-первых, сомножители, полученные из пары противоположно ориентированных ребер, можно переписать в виде

$$\prod_{l \in D_f(M')} (-2x_l^2 - 1)^2 = \prod_{l \in D_f(M')} (4x_l^2 + 1) + \dots$$

Далее, для любого цикла $c \in C_f(M')$ положим $L_c = \prod_{l \in c} (-1 - 2x_l^2)$.

Обратимся теперь к детерминанту, входящему в формулу (12). Он выражается через величины x_l , соответствующие ребрам $l = (b, f(b))$. Указанные ребра распадаются на циклы, и этот детерминант распадается в произведение величин x_l , где l — ребра, входящие в эти циклы (произведение снабжается соответствующим знаком); в частности, цикл из пары противоположно ориентированных ребер дает сомножитель $-4x_l^2$. Далее, для любого цикла $c \in C_f(M)$ положим

$K(c) = -\prod_{l \in c} (-2x_l)$; это детерминант подматрицы, которая расположена на позиции, заданной этим циклом. Используя перечисленные обозначения, приходим в итоге к следующему соотношению (в нем M пробегает все подмножества из V):

$$Q_f = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \prod_{l \in T_f} (-2x_l^2 - 1) \times \sum_{M \subset V} \left(\prod_{l \in D_f(M')} (4x_l^2 + 1) \prod_{c \in C_f(M')} L_c \prod_{l \in D_f(M)} (-4x_l^2) \prod_{l \in C_f(M)} K(c) \right) + \dots \quad (13)$$

Рассмотрим сумму из последнего выражения (временно отбросив стоящие перед ней произведения). Ее можно истолковать так. Каждое из множеств D_f , C_f независимо от другого разбито на две части: $D_f(M)$, $D_f(M')$ и $C_f(M)$, $C_f(M')$ (соответственно); мы производим суммирование по всем таким разбиениям. Но тогда эта сумма сводится к произведению двух сомножителей: $\prod_{l \in D_f} ((1 + 4x_l^2) + (-4x_l^2)) = 1$ и $\prod_{c \in C_f} (L_c + K_c)$. Подставляя найденное в (13), получаем

$$Q_f = \prod_{l \in E} (x_l^2 - 1) \prod_{l \in T_f} (-2x_l^2 - 1) \prod_{c \in C_f} (L_c + K_c) + \dots \quad (14)$$

Напомним обозначение $E'_f = E \setminus E_f$. Так как $E = E'_f \cup D_f \cup C_f \cup T_f$, то произведение $\prod_{l \in E} (x_l^2 - 1)$ разлагается в произведение четырех сомножителей, взятых по множествам E'_f , D_f , C_f , T_f . Комбинируя произведения по D_f , C_f с уже имеющимися в (14) произведениями по этим множествам, получим

$$Q_f = \prod_{l \in E'_f \cup D_f} (x_l^2 - 1) \prod_{c \in C_f} \left((L_c + K_c) \prod_{l \in c} (x_l^2 - 1) \right) \prod_{l \in T_f} \left((-2x_l^2 - 1)(x_l^2 - 1) \right) + \dots$$

Но $(L_c + K_c) \prod_{l \in c} (x_l^2 - 1) = \prod_{l \in c} (-1 - 2x_l^2)(x_l^2 - 1) + \prod_{l \in c} (-2x_l)(x_l^2 - 1) = \prod_{l \in c} (1 + x_l^2) - \prod_{l \in c} (2x_l) + \dots$; далее, $(-1 - 2x_l^2)(x_l^2 - 1) = 1 + x_l^2 + \dots$. Итак,

$$Q_f = \prod_{l \in E'_f \cup D_f} (x_l^2 - 1) \prod_{c \in C_f} \left(\prod_{l \in c} (1 + x_l^2) - \prod_{l \in c} (2x_l) \right) \prod_{l \in T_f} (1 + x_l^2) + \dots \quad (15)$$

Но последний многочлен не содержит величин x_l^3 . Из леммы следует, что здесь имеет место точное равенство написанных многочленов, т. е. многоточие может быть отброшено.

Итак, используя (11) и (15), можем переписать (7) в виде $\sum_f P_f Q_f / \prod_{l \in E} x_l$, где Q_f выражается формулой (15) (записанной в виде точного равенства, без многоточия). Вспоминая, что $x_l = \exp(i\lambda|l|)$ и производя очевидные преобразования, получаем, что выражение $Q_f / \prod_{l \in E} x_l$ превращается в $R_f(\lambda)$ (с точностью до постоянного множителя). В итоге приходим к формуле (5) (появление множителя $(-1)^{\tau(f)}$ в формуле (5) можно проследить без труда; мы не останавливаемся на этой детали). Теорема доказана.

2. Вычисление константы c_0 . Чтобы найти константу c_0 , достаточно найти предел правой части равенства (5) при $\lambda \rightarrow 0$. Для нахождения предела

введем для любого отображения $f: V \rightarrow V$ (удовлетворяющего, разумеется, условию, что v и $f(v)$ смежны) величину

$$q_f = (-1)^{\tau(f)} \prod_{l \in D_f \cup E'_f} |l| \prod_{c \in C_f} \left(\sum_{l \in c} |l|^2 / 2 \right).$$

Из равенства (4) немедленно выводится, что $R_f(\lambda) \simeq q_f \lambda^{2\tau(f)-2}$ при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому при отыскании предела при $\lambda \rightarrow 0$ нужны только те f , для которых $\tau(f) = 1$ (т.е. граф G_f° связан). Итак, константа c_0 определяется равенством $c_0 \sum_f q_f = 1$, где f пробегает все отображения, для которых граф G_f° связан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.-P. Roth, *Le spectre du laplacien sur un graph*, in: Théorie du potentiel (Orsay, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1096, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 521–539.
- [2] P. Kurasov, M. Novaczyk, *Inverse spectral problem for quantum graphs*, J. Phys. A, **38**:22 (2005), 4901–4915.
- [3] B. Gutkin, U. Smilansky, *Can one hear the shape of a graph?*, J. Phys. A, **34**:31 (2001), 6061–6068.
- [4] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2005.
- [5] В. И. Арнольд, *Топология алгебры: комбинаторика операции возведения в квадрат*, Функц. анализ и его прил., **37**:3 (2003), 20–35.

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@mx.bmstu.ru

Поступило в редакцию
3 ноября 2011 г.