Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:11:33

Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме*

© 2012. М. А. Пахнин, Т. А. Суслина

Задачам усреднения в пределе малого периода (гомогенизации) посвящена обширная литература. Укажем книги [1]–[3].

1. Операторные оценки погрешности. Для нас опорным является теоретико-операторный подход, развитый в работах Бирмана и Суслиной [4], [5]. С помощью этого подхода были получены операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для широкого класса матричных эллиптических дифференциальных операторов (ДО).

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω — элементарная ячейка этой решетки. Для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В [4], [5] рассматривались матричные эллиптические ДО, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ есть $(m \times m)$ -матрица-функция с комплексными элементами, ограниченная, равномерно положительно определенная и Γ -периодическая. Оператор $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — это $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка, b_l — постоянные матрицы с комплексными элементами. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geq n$ и $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Это равносильно выполнению неравенств $\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n$ при $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ с некоторыми положительными постоянными α_0, α_1 . Строгое определение оператора A_ε дается через соответствующую квадратичную форму. Примеры ДО типа A_ε обсуждаются в [4]; в частности, подходят скалярный оператор $A_\varepsilon = -\text{div } g(\mathbf{x}/\varepsilon) \nabla$ и оператор теории упругости.

В работах [4], [5] изучался вопрос о поведении решения уравнения $A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, при малом ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ «усредненного» уравнения $A^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$. Здесь $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной эффективной матрицей g^0 (см. ниже разд. 3). В [4] была установлена оценка $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)}$. В операторных терминах это означает, что

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon. \quad (1)$$

В [5] была найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (что соответствует аппроксимации H^1 -нормы решения $\mathbf{u}_\varepsilon$):

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Оценки вида (1), (2), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку. Метод работ [4],

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-357.2012.1).

[5] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности (метод первого приближения) был предложен В. В. Жиковым. В работах [6], [7] рассматривались скалярный эллиптический оператор $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) и система теории упругости. Были получены оценки вида (1), (2) для соответствующих задач в $\mathbb{R}^d$. Также изучались задачи в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. При этом аппроксимация решений в классе $H^1(\mathcal{O})$ выводилась из соответствующего результата в $\mathbb{R}^d$. За счет влияния границы оценки в ограниченной области ухудшаются и получается погрешность $O(\varepsilon^{1/2})$. Оценка вида $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ получается загрузблением из аппроксимации решения в $H^1(\mathcal{O})$.

Ближкие результаты для оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [8], [9] с помощью «unfolding»-метода.

2. Постановка задачи. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с краевым условием Дирихле. Здесь $g(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{D})$ удовлетворяют условиям разд. 1. Строгое определение: $A_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор, порожденный замкнутой и положительно определенной квадратичной формой $\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Здесь $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ по норме пространства $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε оператора $A_{D,\varepsilon}^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. В терминах решений — нас интересует поведение обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ задачи Дирихле

$$A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F} \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{где } \mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (3)$$

3. Эффективный оператор. Для формулировки результатов нужно описать эффективный оператор A_D^0 . Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ есть $(n \times m)$ -матрица-функция, являющаяся (слабым) Γ -периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (4)$$

Эффективная матрица g^0 размера $m \times m$ строится по следующему правилу: $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) d\mathbf{x}$. Оказывается, что матрица g^0 положительна. Эффективный оператор A_D^0 задается выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Обратный оператор $(A_D^0)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Через $\mathbf{u}_0$ обозначим решение «усредненной» задачи Дирихле

$$A^0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{F} \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \quad (5)$$

Выясняется, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (3) сходится к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

4. Основной результат в случае ограниченной матрицы Λ . Для аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ необходимо учитывать корректор первого порядка. Форма корректора зависит от свойств периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (4). Начнем со случая, когда $\Lambda \in L_\infty$.

Лемма 1. Пусть Λ есть Γ -периодическое решение задачи (4), причем $\Lambda \in L_\infty$. Тогда для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u|^2 d\mathbf{x} \leq \beta_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \beta_2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_1, β_2 зависят лишь от $m, d, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Введем корректор $K_0(\varepsilon) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_D^0)^{-1}$. Используя лемму 1, легко убедиться, что $K_0(\varepsilon)$ является непрерывным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Первым приближением к $\mathbf{u}_\varepsilon$ служит функция

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = (A_D^0)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_0(\varepsilon) \mathbf{F}. \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3), $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (5) и $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ — функция (6). Пусть Λ есть Γ -периодическое решение задачи (4), причем $\Lambda \in L_\infty$. Тогда справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (7)$$

или, в операторных терминах,

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1} - \varepsilon K_0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Постоянная ε_1 зависит от области $\mathcal{O}$, а C_1 зависит от $m, d, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\Lambda\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 3. В некоторых случаях условие $\Lambda \in L_\infty$ выполнено автоматически, в частности, при $d \leq 2$, а также для оператора $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla$ в любой размерности (если $g(\mathbf{x})$ — вещественная матрица).

5. Основные результаты в общем случае. Теперь мы отказываемся от предположения об ограниченности матрицы Λ . Тогда в корректор приходится включать *сглаживающий оператор по Стеклову*, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (8)$$

Отметим следующее свойство оператора (8) (см. [7]).

Лемма 4. Пусть $f(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, такая, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, причем

$$\|[f^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)} \leq |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения $P_\mathcal{O}: H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и положим $\tilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O} \mathbf{u}_0$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Введем корректор $K(\varepsilon) = R_\mathcal{O} \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (A_D^0)^{-1}$. Используя лемму 4 и учитывая, что Λ — периодическая функция класса $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, легко видеть, что $K(\varepsilon)$ — непрерывный оператор из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Сейчас мы используем другое *первое приближение* к $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 = (A_D^0)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K(\varepsilon) \mathbf{F}. \quad (9)$$

Теорема 5. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3), $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (5) и $\mathbf{v}_\varepsilon$ — функция (9). Справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_2 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2, \quad (10)$$

или, в операторных терминах,

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_2 \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2.$$

Постоянная ε_2 зависит от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , а постоянная C_2 зависит от $m, d, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Загрубляя результат теоремы 5, легко получить такое следствие:

Следствие 6. В условиях теоремы 5 справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_3 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2, \quad (11)$$

или, в операторных терминах, $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_3 \varepsilon^{1/2}$. Постоянная C_3 зависит от $m, d, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 7. Оценка (11) допускает уточнение. Для скалярного оператора $-\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla$ точная по порядку оценка погрешности в $L_2(\mathcal{O})$ получена в [9]. Получению подобной оценки для рассматриваемого класса матричных операторов посвящена отдельная работа [10], [11].

6. Метод основан на применении оценок (1), (2) для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$, полученных в [4], [5], и на приемах, предложенных в [6], [7], которые позволяют выводить оценки вида (7) или (10) для случая ограниченной области из оценок (1), (2).

Поясним схему доказательства теоремы 2. Первое приближение $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$, определенное в (6), не удовлетворяет условию Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Рассмотрим «поправку» $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon$, являющуюся решением задачи

$$A_\varepsilon \check{\mathbf{w}}_\varepsilon = 0 \text{ в } \mathcal{O}, \quad \check{\mathbf{w}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}}.$$

Используя результаты для задачи в $\mathbb{R}^d$, можно показать, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1; \quad (12)$$

ср. [6], [7]. Тогда дело сводится к получению оценки для «поправки» $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon$.

Пусть $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$ есть ε -окрестность границы $\partial\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^d$. Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, такую, что $\operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$, причем $0 \leq \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1$, $\theta_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 1$ и $\varepsilon |\nabla \theta_\varepsilon| \leq \operatorname{const}$. Положим $\check{\phi}_\varepsilon = \varepsilon \theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{u}}_0$. Нетрудно показать, что

$$\|\check{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_5 \|\check{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}. \quad (13)$$

Тем самым вопрос сводится к оценке для H^1 -нормы функции $\check{\phi}_\varepsilon$ — члена типа пограничного слоя. Ключевую роль играет

Лемма 8. В условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$\|\check{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_6 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (14)$$

Лемма 8 доказывается с помощью свойств функции $\mathbf{u}_0$, оценки вида

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (15)$$

и леммы 1. В итоге из (12)–(14) вытекает требуемая оценка (7).

Аналогичным способом устанавливается и теорема 5. Тогда дело также сводится к оценке члена типа пограничного слоя — функции $\phi_\varepsilon = \varepsilon \theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0)$. Справедлив аналог леммы 8. Для доказательства следует использовать лемму 4 и учесть, что Λ — периодическая матрица-функция класса $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Вместо (15) применяется оценка

$$\int_{(\partial \sigma)_\varepsilon} |f^\varepsilon(S_\varepsilon \mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \leq C \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)}$$

при $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, где f есть Γ -периодическая функция, причем $f \in L_2(\Omega)$; см. [7].

Подробное изложение описанных результатов можно найти в [12].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Math. and Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978. [2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984. [3] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108. [5] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1–130. [6] В. В. Жиков, *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 597–601. [7] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524. [8] G. Griso, *Asymptot. Anal.*, **40**:3–4 (2004), 269–286. [9] G. Griso, *Anal. Appl.*, **4**:1 (2006), 61–79. [10] Т. А. Suslina, <http://arxiv.org/abs/1201.2286>. [11] Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, в печати. [12] М. А. Pakhnin, Т. А. Suslina, <http://arxiv.org/abs/1201.2140>.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: mpakhnin@yandex.ru

Поступило в редакцию
18 января 2012 г.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
suslina@list.ru

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 23.03.2012. Подписано к печати 27.04.2012. Формат 70 × 100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,6 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 203 экз. Заказ 107.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6