Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Сторожук, Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 89–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:11:21

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. D. Choi, E. G. Effros, J. Funct. Anal., **24**:2 (1977), 156–209. [2] A. A. Dosiev, J. Funct. Anal., **255**:7 (2008), 1724–1760. [3] A. A. Dosiev, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **344**:10 (2007), 627–630. [4] A. A. Dosi, Trans. Amer. Math. Soc., **363**:2 (2011), 801–856. [5] A. A. Dosi, J. Math. Phys., **51**:6 (2010), 1–43. [6] A. A. Dosi, Inter. J. Math., **22**:4 (2011), 1–7. [7] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 2000. [8] E. G. Effros, C. Webster, in: *Operator Algebras and Applications* (Samos 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 495, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 163–207. [9] E. G. Effros, S. Winkler, J. Funct. Anal., **144**:1 (1997), 117–152. [10] А. Я. Хелемский, *Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении*, МЦНМО, М., 2009. [11] С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, изд-во Ин-та математики им. С. П. Соболева, Новосибирск, 1995. [12] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990. [13] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies Advanced Math., vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Middle East Technical University
Northern Cyprus Campus, Turkey
e-mail: dosiev@yahoo.com, dosiev@metu.edu.tr

Поступило в редакцию
30 ноября 2010 г.

УДК 517.983.23

Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$

© 2012. К. В. СТОРОЖУК*

Пусть X — банахово пространство, $T: X \rightarrow X$ — линейный оператор, такой, что $\|T^n\| \leq C < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0\}$. Оператор T называется *асимптотически конечномерным*, если $\text{codim } X_0 < \infty$.

Пусть существует компакт $K \subset X$, такой, что орбиты элементов единичного шара B_X в том или ином смысле приближаются к K . Какие условия на «тот или иной смысл» гарантируют асимптотическую конечномерность оператора T ? Такие же вопросы можно поставить и для однопараметрических полугрупп операторов. Перечислим некоторые условия и результаты.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) = 0$ для любого $x \in B_X$. Тогда T асимптотически конечномерен и даже *расщепляем*, т. е. $X = X_0 \oplus L$, где L — конечномерное T -инвариантное подпространство. Для марковских полугрупп в L_1 этот результат доказан в [1], в [2] он установлен для положительных операторов в банаховых решетках, а для произвольного X в [3] и [4].

2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт «притягивает, но, быть может, не сильно»). Тогда T асимптотически конечномерен [5].

3. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) = 0$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт K «притягивает лишь иногда»). T и в этом случае асимптотически конечномерен [6].

4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт K «притягивает лишь иногда и не сильно»). В [7, 1.3.33] поставлен следующий вопрос:

*Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6613.2010.1).

будет ли T в этом случае асимптотически конечномерным? В [8] дан положительный ответ в случае рефлексивного X (заметим, что в этом случае T расщепляем).

В данной заметке мы даем отрицательный ответ на этот вопрос в общем случае: для всякого нульмерного компакта M существуют *изометрии* пространства $C(M)$, удовлетворяющие условию $4_{1/2}$ с притягивающей точкой K .

Заметим, что «силу притягивания» $\eta = 1/2$ уменьшить нельзя: операторы, удовлетворяющие условию 4_η при $\eta < 1/2$, асимптотически конечномерны [9].

Напомним, что $C(M)$ — пространство непрерывных на компакте M функций. Далее все упоминаемые функции предполагаются непрерывными, а M — всегда компакт. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — круг радиуса 1, $\Lambda = \partial D$ — единичная окружность. Единичный шар $B_{C(M)} \subset C(M)$ — это множество функций вида $f: M \rightarrow D$. Тором $O(M) \subset C(M)$ назовем множество функций вида $f: M \rightarrow \Lambda$.

Лемма 1. Пусть $M \subset \Lambda$. Тор радиуса $1/2$ является $(1/2 + \varepsilon)$ -плотным в единичном шаре $B_{C(M)}$, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $f: M \rightarrow D$ существует функция $\tilde{f}: M \rightarrow \Lambda$, такая, что $\|f - \tilde{f}/2\| < 1/2 + \varepsilon$.

Доказательство. Если $f(t) \neq 0$ для любого t , то положим $\tilde{f} = f/|f|$; в общем случае f несложно сначала «сдвинуть» с нуля, а потом нормировать. Лемма доказана.

Топологическое замечание. Если $f, g: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $\|f - g\| < 2$, то f и g гомотопны. Таким образом, если $\deg f \neq \deg g$, то $\|f - g\| = 2$. Поэтому если $M \subset \mathbb{C}$ имеет непустую внутренность, то лемма 1 неверна. Например, если $M = D$, то для любой функции $f: D \rightarrow \Lambda$ выполнено неравенство $\|\text{id}|_D - f/2\| \geq 3/2$.

Определим оператор $T: C(M) \rightarrow C(M)$ формулой $(Tf)(t) = tf(t)$, $t \in M$.

Компакт $M \subset \Lambda$ называется *множеством Кронекера*, если всякую непрерывную функцию $f: M \rightarrow \Lambda$ можно равномерно приблизить характеристиками окружности Λ (функциями вида $t \rightarrow t^n$, $n \in \mathbb{Z}$; достаточно и $n \in \mathbb{N}$). Нам удобно переформулировать понятие кронекеровости следующим образом.

Лемма 2. M является множеством Кронекера тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in O(M)$ орбита $\{f, Tf, T^2f, \dots\}$ плотна в $O(M)$.

Доказательство. Оператор T — изометрия, поэтому достаточно доказать лемму, предполагая, что $f \equiv 1 \in O(M)$. В этом случае $T^n f(t) = t^n$. Остальное очевидно.

Ясно, что в лемме 2 оператор T можно заменить на оператор T^{-1} .

Теорема 1. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и $T: C(M) \rightarrow C(M)$ — оператор умножения на t , $(Tf)(t) = tf(t)$. Если $M \subset \Lambda$ — множество Кронекера, то для каждой функции $f \in B_{C(M)}$ и для каждой функции $\tilde{f} \in O(M)$ найдется последовательность степеней $m_k \rightarrow \infty$, такая, что $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|T^{m_k} f - \tilde{f}/2\| \leq 1/2$

Доказательство легко следует из леммы 1 и леммы 2. Нужно только заметить, что $\|T^{m_k} f - \tilde{f}/2\| = \|f - T^{-m_k} \tilde{f}/2\|$.

Теорема 2. Пусть M — нульмерный компакт. Найдется гомеоморфизм $g: M \rightarrow g(M) \subset \Lambda$, такой, что $g(M)$ — множество Кронекера и оператор умножения $T: C(M) \rightarrow C(M)$, $(Tf)t = g(t)f(t)$, удовлетворяет заключению теоремы 1. При этом $\text{Sp}(T) = g(M)$.

Доказательство. Нульмерный метрический компакт M гомеоморфен подмножеству любого совершенного множества, например, какого-нибудь совершенного множества Кронекера (такие бывают — см., например, [10]). Но кронекеровость наследуется замкнутыми подмножествами. Остальное очевидно.

Пример. Пусть c — банахово пространство сходящихся последовательностей. Пусть $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Пространство c можно отождествить с $C(M)$, $M = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, рассматривая сходящиеся последовательности $(f_n) \in c$ как функции $f \in C(M)$, $f(\lambda_n) = f_n$; $f(\lambda) = \lim f_n$. Определим оператор $T: c \rightarrow c$, $(Tf)_n = \lambda_n f_n$. Если множество $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ кронекерово, то оператор T — изометрия, удовлетворяющая условию $4_{1/2}$ для любого одноточечного множества $K \in \frac{O(M)}{2}$.

Отметим, что операторы из c в c вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$, не обладая полной системой конечномерных подпространств, являются, тем не менее, скалярно почти периодическими [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Lasota, T.-Y. Li, J. A. Yorke, Trans. Amer. Math. Soc., **286**:2 (1984), 751–764.
 [2] W. Bartoszek, Studia Math., **91**:3 (1988), 179–188. [3] Бу Куок Фонг, Укр. матем. ж., **38**:6 (1986), 688–692. [4] R. Sine, Rocky Mountain J. Math., **21**:4 (1991), 1373–1383.
 [5] E. Yu. Emel'yanov, M. Wolff, Studia Math., **144**:2 (2001), 169–179. [6] K. V. Storozhuk, J. Math. Anal. Appl., **332**:2 (2007), 1365–1370. [7] E. Yu. Emel'yanov, *Non-Spectral Asymptotic Analysis of One-Parameter Operator Semigroups*, Operator Theory Advances and Applications, vol. 173, Birkhauser, Basel, 2007. [8] К. В. Сторожук, Сиб. матем. ж., **50**:4 (2009), 928–932. [9] К. В. Сторожук, Сиб. матем. ж., **52**:6 (2011), 1389–1393.
 [10] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980. [11] Ю. Я. Любич, УМН, **18**:1 (1963), 165–171.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
 Новосибирский государственный университет
 e-mail: stork@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
 18 октября 2010 г.

УДК 517.956.2

Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле*

© 2012. Т. А. Суслина

Задачам усреднения в пределе малого периода (гомогенизации) посвящена обширная литература; укажем книги [1]–[3].

1. Операторные оценки погрешности в теории усреднений. В работах Бирмана и Суслиной [4], [5] развит теоретико-операторный подход, с помощью которого получены операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для широкого класса матричных эллиптических дифференциальных операторов (ДО).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-357.2012.1).