Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на компактной римановой поверхности рода $g > 1$, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 66–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:47:48

Явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на компактной римановой поверхности рода $g > 1$

© 2012. Д. А. Попов

Памяти В. И. Арнольда

Предполагается, что на компактной римановой поверхности рода $g > 1$ задана стандартная риманова метрика постоянной кривизны $K = -1$. При этом условии для некоторого класса строго гиперболических фуксовых групп получено явное выражение для функции распределения собственных значений оператора Лапласа в виде ряда по нулям дзета-функции Сельберга.

§1. Введение и формулировка результата

В теории чисел явными называются формулы вида

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{\rho} g(x, \rho) + R(x),$$

где f — некоторая арифметическая функция, а суммирование в правой части этого равенства ведется по нулям ρ некоторой аналитической функции. Относительно функции $R(x)$ предполагается, что она известна или известна ее достаточно точная оценка. При этом $R(x)$ не вносит существенного вклада в асимптотику рассматриваемой суммы при $x \rightarrow \infty$. Первым примером явной формулы была формула Римана для числа $\pi(x)$ простых чисел, меньших x ([1], [2]). Типичным и самым известным примером является формула Мангольдта для функции Чебышёва [3]

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^k, \\ 0, & n \neq p^k. \end{cases} \quad (1.1)$$

Эта формула имеет вид

$$\Psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \ln(1 - x^{-2}), \quad \Psi_0(x) = \frac{1}{2} [\Psi(x + 0) + \Psi(x - 0)],$$

и суммирование в ней ведется по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. С выводом и различными видами явных формул можно ознакомиться по работам [1]–[7].

Формула Сельберга и связанная с ней дзета-функция Сельберга позволили найти явную формулу для функции $\Psi_{\Gamma}(x)$, связанной с функцией распределения длин замкнутых геодезических на компактных римановых поверхностях рода $g > 1$ с метрикой постоянной кривизны $K = -1$. Эта формула будет приведена в §4.

В настоящей работе при тех же предположениях будет получена явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа.

Приведем некоторые сведения об операторе Лапласа и формуле Сельберга. При этом будем следовать работам [8]–[10] и принятым там обозначениям. Пусть $F = \Gamma \backslash H$ — компактная риманова поверхность рода $g > 1$. Здесь H — верхняя полуплоскость и Γ — строго гиперболическая (не содержащая эллиптических и параболических элементов) фуксова группа первого рода. Верхняя полуплоскость H ($y > 0$) рассматривается как плоскость Лобачевского с метрикой $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Определенный на гладких функциях оператор Лапласа $\Delta = y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ опускается на F и отождествляется с оператором на H , действующим в пространстве автоморфных функций f ($f(az) = f(z)$ для любого $a \in \Gamma$). Так определенный оператор отрицательно определен и допускает расширение до самосопряженного оператора L в $L_2(F)$. Оператор L имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}$ ($L\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0$, $\lambda_n \geq 0$).

Нас будет интересовать функция распределения собственных значений

$$\mathcal{N}(x) = \#\{n : n \geq 0, \lambda_n \leq x\} = \sum_{\lambda_n \leq x} 1,$$

которые считаются с учетом их кратности.

В соответствии с формулой Вейля

$$\mathcal{N}(x) = \frac{|F|}{4\pi} x + S(x),$$

где $|F|$ — площадь поверхности F . В настоящее время относительно асимптотики функции $S(x)$ известно, что

$$S(x) = O\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\right).$$

Имеется гипотеза, что $S(x) = O(x^{1/4+\varepsilon})$ и даже (см. [12]) $S(x) = O(\sqrt{\ln x})$ для достаточно общей (не арифметической) группы Γ . С другой стороны, для некоторого класса арифметических групп $\Gamma = \Gamma(n, p)$ (см. [8]–[10]) Сельбергом доказана Ω -теорема: $S(x) = \Omega(x^{1/4}(\ln x)^{-1})$, где Ω — символ Харди и равенство $S(x) = \Omega(f(x))$ означает, что существует последовательность $x_i \rightarrow \infty$, такая, что $|S(x_i)| > Cf(x_i)$ ($C > 0$, $x_i > X$, $f(x_i) > 0$).

Поведение величины $|S(x)|$ в среднем рассматривалось в работе [11], где показано, что

$$T^{-1} \int_0^T |S(x)| dx = O(T^{1/4+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Автор благодарен рецензенту за указание на эту работу.

Рассмотрим формулу Сельберга. Введем нужные обозначения. Через $\{P\}$ обозначается множество классов сопряженных элементов группы Γ . Так как Γ — строго гиперболическая группа, то каждый элемент $a \in \Gamma$ сопряжен в $PSL(2, \mathbb{R})$ умножению $z \rightarrow \lambda z$ ($z \in H$, $\lambda > 1$). Величина $\lambda = N(P)$ называется нормой класса P . Эта величина имеет простой геометрический смысл, и множество $\{\ln N(P)\}$ совпадает со спектром длин замкнутых геодезических на поверхности F .

Рассмотрим спектр $\{\lambda_n\}$ оператора L . У оператора L имеется $M+1$ исключительных собственных значений $\lambda_n \in [0, 1/4)$, $n = 0, 1, \dots, M$. Величины s_n , $\tilde{s}_n$, r_n определяются равенствами

$$\begin{aligned}\lambda_n &= s_n(1 - s_n) = \frac{1}{4} + r_n^2, & \arg r_n &= 0 \text{ или } -\pi/2, \\ s_n &= \frac{1}{2} + ir_n, & \tilde{s}_n &= \frac{1}{2} - ir_n.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Таким образом, если $n = 0, 1, \dots, M$, то

$$\begin{aligned}r_n &= -i\kappa_n, & \kappa_n &= \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_n}, & 0 < \kappa_n &\leq \frac{1}{2}, \\ s_n &= \frac{1}{2} + \kappa_n, & \tilde{s}_n &= \frac{1}{2} - \kappa_n, & \tilde{s}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Через h обозначается любая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $h(r) = h(-r)$,
- 2) h голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} r| \leq 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,
- 3) $h(r) = O(1 + |r|^2)^{-1-\varepsilon}$ в этой полосе.

В этих обозначениях формула Сельберга для строго гиперболических групп Γ имеет следующий вид:

$$\sum_{r_n} h(r_n) = \frac{|F|}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{th} \pi r h(r) dr + 2 \sum_{\{P\}} \frac{\ln N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} g(\ln N(P)). \quad (1.4)$$

В этой формуле

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru} h(r) dr$$

и P_0 — отвечающий P примитивный класс сопряженных элементов. Множество таких классов обозначается через $\{P_0\}$. Дзета-функция Сельберга $Z(s)$ ($s = \sigma + it$) при $\sigma > 1$ определяется равенством

$$Z(s) = \prod_{\{P_0\}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - N(P_0)^{-s-k}). \quad (1.5)$$

Эта функция допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость как целая функция порядка 2. Она имеет «тривиальные» нули в точках $s = -k$, $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ и «нетривиальные» нули в точках $s = \frac{1}{2} + ir_n$ с кратностью, равной кратности соответствующего собственного значения. Нетривиальные нули функции $Z(s)$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$, т. е. для $Z(s)$ имеет место гипотеза Римана.

Аналогом функции Чебышёва $\Psi(x)$ (см. (1.1)) является функция

$$\Psi^\Gamma(x) = \sum_{N(P) \leq x} \Lambda^\Gamma(P), \quad (1.6)$$

где Λ^Γ — аналог функции Мангольдта:

$$\Lambda^\Gamma(P) = \frac{\ln N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}}. \quad (1.7)$$

Аналогом равенства

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

является равенство

$$\frac{Z'(s)}{Z(s)} = \sum_{\{P\}} \frac{\Lambda^\Gamma(P)}{N(P)^s} \quad (\sigma > 1), \quad (1.8)$$

по существу определяющее функцию $Z(s)$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы вывести явную формулу для величины

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) = \sum_{\lambda_n \leq t^2 + 1/4} 1$$

в виде некоторого ряда по нулям функции $Z(s)$. Так как нетривиальные нули функции $Z(s)$ прямо связаны с собственными значениями, то такая формула имеет вид тождества, имеющего место на спектре $\{\lambda_n\}$.

Везде ниже через C обозначаются абсолютные константы, а через C_Γ — константы, зависящие только от группы Γ , и запись $f(t) = O_\Gamma(g(t))$ означает, что константа в $O_\Gamma(\cdot)$ зависит только от группы Γ .

Сформулируем основной результат. Введем ограничение на класс рассматриваемых групп. Будем говорить, что группа Γ *удовлетворяет условию* (η, q) , если существуют константы $\eta > 0$, q , такие, что при $N(P) \neq N(P')$ выполняется неравенство

$$|N(P) - N(P')| \geq \eta N(P)^{-q}. \quad (1.9)$$

Из результатов работы [13] (см. также [14]) следует, что условие (1.9) с $q = 0$ выполняется для группы Γ , происходящей из кватернионной алгебры.

Введем обозначения

$$B_0 = \min_{\{P\}} N(P), \quad b_0 = \ln B_0, \quad B_0 > 1, \quad b_0 > 0. \quad (1.10)$$

Теорема. Пусть Γ — строго гиперболическая группа, для которой выполняется условие (η, q) . Тогда для любого $t \geq 3$, $t \notin \{r_n\}$,

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) = \frac{|F|}{4\pi} t^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{r_n \geq 0} [\operatorname{sgn}(r_n - t) \operatorname{si}(|r_n - t|b_0) - \operatorname{si}((r_n + t)b_0) - \beta_n] + F^\Gamma(t). \quad (1.11)$$

В этой формуле

$$\beta_n = -\frac{r_n \cos(r_n - t)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(r_n - t)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)} + \frac{r_n \cos(r_n + t)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)} - \frac{1}{2} \frac{\sin(r_n + t)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)}$$

и F^Γ — ограниченная непрерывная функция, допускающая при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение вида

$$F^\Gamma(t) = C_0^\Gamma + \frac{C_1^\Gamma}{t} + \frac{C_2^\Gamma}{t^2} + \dots$$

Явный вид функции F^Γ будет указан в §4.

В формуле (1.11) и ниже используются стандартные обозначения ([15], [16])

$$\operatorname{si} x = \int_{\infty}^x \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Si} x - \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{si} x + \operatorname{si}(-x) = -\pi.$$

В ходе доказательства теоремы в §5 будет доказано

Предложение. Если группа Γ удовлетворяет условиям теоремы, то сходится ряд

$$\sum_{r_n \geq 0} \frac{\cos r_n b_0}{r_n^2 + 1/4} = A^{\Gamma}(b_0) < \infty. \quad (1.12)$$

Теорема утверждает, что на множестве $\{\lambda_n\}$ для любого $t \geq 3$ имеет место равенство

$$\sum_{\lambda_n \leq t^2 + 1/4} 1 = f(t|\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad (1.13)$$

где $f(t|\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — правая часть равенства (1.11), и эта формула является аналогом формулы Харди–Вороного для проблемы круга (см. [8], [10]). Заметим, что, выбирая различные функции h в формуле (1.4), можно получить и другие равенства вида (1.13).

§2. Двусторонняя оценка функции распределения

Рассмотрим двухпараметрическое семейство $\{h_{\alpha,T}\}$, $\alpha > 0$, $T > 0$, функций

$$h_{\alpha,T}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_T(s) \delta_{\alpha}(r-s) ds. \quad (2.1)$$

В этой формуле

$$\chi_T(r) = \begin{cases} 1, & |r| < T, \\ 0, & |r| > T, \end{cases} \quad \delta_{\alpha}(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha r^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\alpha}(r) dr = 1.$$

Такое семейство функций в связи с формулой Сельберга рассматривалось в работе [17]. Ниже будут использоваться стандартные обозначения ([15], [16])

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z.$$

Согласно [13], при $x \geq 0$ имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \leq \operatorname{erfc} x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + 4/\pi}}.$$

Функция $\operatorname{erf} z$ целая и нечетная, и при $|\arg z| \leq \pi/4$ асимптотическое разложение

$$\operatorname{erfc} z = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{(2z^2)^m} \right) \quad (2.2)$$

является обертывающим.

Прямо из определения (2.1) следует, что

$$h_{\alpha,T}(r) = \frac{1}{2} [\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha}(r+T)) + \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha}(T-r))].$$

Учитывая указанные свойства функций erf , erfc , получаем, что

$$h_{\alpha,T}(r) = h_{\alpha,T}(-r), \quad \frac{dh_{\alpha,T}(r)}{dr} \leq 0 \quad (r \geq 0), \quad 0 < h_{\alpha,T}(r) < 1 \quad (2.3)$$

и имеют место оценки

$$\begin{aligned} h_{\alpha,T}(r) &\leq C \frac{e^{-\alpha(r-T)^2}}{\sqrt{\alpha}|r-T|} & (C < 1, r > T), \\ 1 - h_{\alpha,T}(r) &\leq C \frac{e^{-\alpha(r-T)^2}}{\sqrt{\alpha}|T-r|} & (C < 1, T > r). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из приведенных результатов следует, что любая функция $h \in \{h_{\alpha,T}\}$ удовлетворяет условиям (1.3). При $h = h_{\alpha,T}$ формула Сельберга (1.4) имеет вид

$$\sum_{n \geq 0} h_{\alpha,T}(r_n) = \frac{|F|}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha,T}(r) dr + S_{\alpha,T}^{\Gamma}. \quad (2.5)$$

Здесь и ниже

$$S_{\alpha,T}^{\Gamma} = \sum_{\{P\}} \frac{\ln N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} g_{\alpha,T}(\ln N(P)), \quad (2.6)$$

и в этой формуле

$$g_{\alpha,T}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru} h_{\alpha,T}(r) dr = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Tu}{u} e^{-u^2/(4\alpha)}. \quad (2.7)$$

В этом параграфе рассматривается левая часть равенства (2.5) и основным результатом является

Лемма 1. Пусть

$$\gamma > 0, \quad \sigma \geq \gamma + 3, \quad t \geq 3. \quad (2.8)$$

Тогда для любых таких γ, σ, t при

$$\alpha = t^{2\gamma}(\ln t^{\sigma}), \quad T_{\pm} = t \pm \delta, \quad \delta = t^{-\gamma}$$

имеют место неравенства

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) \geq \frac{|F|}{4\pi} t^2 + F_0^{\Gamma}(t) + S_{\alpha,T_-}^{\Gamma} + \Delta_{\mathcal{N}}^{-}(t), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) \leq \frac{|F|}{4\pi} t^2 + F_0^{\Gamma}(t) + S_{\alpha,T_+}^{\Gamma} + \Delta_{\mathcal{N}}^{+}(t). \quad (2.10)$$

В этих формулах

$$F_0^{\Gamma}(t) = -\frac{|F|}{2\pi} \int_0^t r(1 - \operatorname{th} \pi r) dr \quad (2.11)$$

и для функций $\Delta_{\mathcal{N}}^{\pm}(t)$ выполняется оценка

$$|\Delta_{\mathcal{N}}^{\pm}(t)| \leq C_{\Gamma} t^{1-\gamma}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$H_{\alpha,T} = \sum_{r_n \geq 0} h_{\alpha,T}(r_n), \quad \Sigma_M(\alpha, T) = \sum_{0 < r_n \leq 1/4} h_{\alpha,T}(-i r_n), \quad (2.12)$$

$$F_{\alpha,T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha,T}(r) dr \quad (T = t \pm t^{-\gamma})$$

и запишем формулу Сельберга в виде

$$H_{\alpha,T} + \Sigma_M(\alpha, T) = \frac{|F|}{4\pi} F_{\alpha,T}(t) + S_{\alpha,T}^{\Gamma}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим левую часть этого равенства.

Интересующую нас величину $\mathcal{N}(t^2 + 1/4)$ запишем в виде

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) = \mathcal{N}_+(t) + M + 1.$$

В этой формуле и ниже

$$\mathcal{N}_+(t) = \#\{n : 0 \leq r_n \leq t\}. \quad (2.14)$$

Используя свойства функции $h_{\alpha,T}$ (см. (2.3)), получим, что

$$\mathcal{N}_+(t) \geq H_{\alpha,T_-} + \Delta^-, \quad \Delta^- = \sum_{r_n > t} h_{\alpha,T_-}.$$

Оценим величину Δ^- . Используя оценки (2.4), имеем

$$\Delta^- \leq C \sum_{k=0}^{\infty} f(t + k\Delta) \sum_{t+k\Delta \leq r_n \leq t+(k+1)\Delta} 1, \quad f(x) = \frac{e^{-\alpha(x-T_-)^2}}{\sqrt{\alpha}(x-T_-)}. \quad (2.15)$$

Будем предполагать, что

$$1 < \Delta < t, \quad 2\alpha\Delta\delta > 1 \quad (\delta = t^{-\gamma}). \quad (2.16)$$

Можно считать, например, что $\Delta = 2$. В силу формулы Вейля

$$\sum_{t+k\Delta \leq r_n \leq t+(k+1)\Delta} 1 = O_{\Gamma}(t\Delta + (k+1)\Delta^2).$$

Учитывая это, с помощью неравенства (2.15) получим оценку

$$\Delta^- \leq C_{\Gamma} \frac{e^{-\alpha\delta^2}}{\sqrt{\alpha}\delta} t\Delta. \quad (2.17)$$

Теперь запишем величину (2.14) в виде

$$\mathcal{N}_+(t) = \sum_{0 \leq r_n \leq t} h_{\alpha,T}(r_n) + \Delta^+, \quad \Delta^+ = \sum_{0 \leq r_n \leq t} (1 - h_{\alpha,T}(r_n)).$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}_+(t) \leq H_{\alpha,T_+} + \Delta^+.$$

Используя оценки (2.4) и то, что в силу формулы Вейля $\sum_{r_n \leq t} 1 \leq C_{\Gamma} t^2$, получаем оценку

$$\Delta^+ \leq C_{\Gamma} \frac{e^{-\alpha\delta^2}}{\sqrt{\alpha}\delta} t^2. \quad (2.18)$$

Таким образом, при выполнении условий (2.16) справедлива двусторонняя оценка

$$M + 1 + H_{\alpha, T_-} - \Delta^- \leq \mathcal{N}(t^2 + 1/4) \leq M + 1 + H_{\alpha, T_+} + \Delta^+ \quad (2.19)$$

вместе с оценками (2.17), (2.18).

Рассмотрим сумму

$$\Sigma_M(\alpha, T) = \sum_{0 < \varkappa_n \leq 1/4} h_{\alpha, T}(-i\varkappa_n). \quad (2.20)$$

Так как

$$\begin{aligned} h_{\alpha, T}(-i\varkappa_n) &= 1 - \Delta h_{\alpha, T}(\varkappa_n), \\ \Delta h_{\alpha, T}(\varkappa_n) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(T + i\varkappa_n) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(T - i\varkappa_n), \end{aligned}$$

то из равенства (2.20) следует, что

$$\Sigma_M(\alpha, T) = M + 1 + \Delta_M(\alpha, T), \quad \Delta_M(\alpha, T) = \sum_{0 < \varkappa_n \leq 1/4} \Delta h_{\alpha, T}(\varkappa_n). \quad (2.21)$$

При $\sqrt{\alpha}t > 1$, используя (2.2), получим оценку

$$\Delta_M(\alpha, T_{\pm}) \leq C(M + 1) \frac{e^{-\alpha(T_{\pm} - 1/16)}}{\sqrt{\alpha} T_{\pm}}.$$

Подставляя выражение для $M + 1$, полученное из (2.21), в (2.19), запишем эту двустороннюю оценку в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_M(\alpha, T_-) + H_{\alpha, T_-} + \Delta_M(\alpha, T_-) - \Delta_- \\ \leq \mathcal{N}(t^2 + 1/4) \leq \Sigma_M(\alpha, T_+) + H_{\alpha, T_+} + \Delta_M(\alpha, T_+) + \Delta_+. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Теперь рассмотрим величину $F_{\alpha, T}(t)$ из (2.12):

$$\begin{aligned} F_{\alpha, T}(t) &= 2J_{\alpha, T} + 2I_{\alpha, T}, \\ J_{\alpha, T} &= \int_0^t r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha, T}(r) dr, \quad I_{\alpha, T} = \int_t^\infty r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha, T}(r) dr. \end{aligned}$$

Пусть $T = T_- = t - \delta$. Так как тогда при $r > T_-$

$$h_{\alpha, T}(r) \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(r - T)) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\alpha(r - T)^2}}{\sqrt{\alpha}(r - T)},$$

то

$$I_{\alpha, T} \leq C \frac{te^{-\alpha\delta^2}}{\alpha^{3/2}\delta}.$$

Интеграл $J_{\alpha, T}$ запишем в виде

$$J_{\alpha, T} = J_{\alpha, T}^1 + J_{\alpha, T}^2,$$

и в этой формуле при $t = T + \delta$

$$J_{\alpha, T}^1 = \int_0^{T-\delta} r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha, T}(r) dr, \quad J_{\alpha, T}^2 = \int_{T-\delta}^{T+\delta} r \operatorname{th} \pi r h_{\alpha, T}(r) dr.$$

Так как $h_{\alpha, T}(r) < 1$, $\operatorname{th} \pi r < 1$, то

$$J_{\alpha, T}^2 \leq CT\delta.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_{\alpha,T}^1 = \int_0^{T-\delta} r \operatorname{th} \pi r \, dr - \int_0^{T-\delta} (1 - h_{\alpha,T}(r)) r \operatorname{th} \pi r \, dr. \quad (2.23)$$

Так как при $r < T$

$$1 - h_{\alpha,T}(r) \leq \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(T-r)) \leq C \frac{e^{-\alpha(T-r)^2}}{\sqrt{\alpha}(T-r)},$$

то получаем, что

$$\int_0^{T-\delta} (1 - h_{\alpha,T}(r)) r \operatorname{th} \pi r \, dr \leq C \frac{e^{-\alpha\delta^2 t}}{\alpha^{3/2}\delta^2}. \quad (2.24)$$

Остается рассмотреть первый интеграл в правой части равенства (2.23). С учетом оценки (2.24) получаем, что

$$J_{\alpha,T}^1 = \frac{1}{2} t^2 - \int_0^t r(1 - \operatorname{th} \pi r) \, dr + \Delta J_{\alpha,T}^1, \quad |\Delta J_{\alpha,T}^1| \leq C \left(t\delta + \frac{e^{-\alpha\delta^2 t}}{\alpha^{3/2}\delta^2} \right).$$

Собирая результаты, имеем

$$F_{\alpha,T_-} = t^2 - 2 \int_0^t (1 - \operatorname{th} \pi r) r \, dr + \Delta F_{\alpha,T_-}, \quad |\Delta F_{\alpha,T_-}| \leq C \left(t\delta + \frac{e^{-\alpha\delta^2 t}}{\alpha^{3/2}\delta^2} \right). \quad (2.25)$$

Так как $F_{\alpha,T_+}(t) = F_{\alpha,T_-}(t')$, $t' = t + 2\delta$, то и

$$F_{\alpha,T_+} = t^2 - 2 \int_0^t (1 - \operatorname{th} \pi r) r \, dr + \Delta F_{\alpha,T_+}, \quad |\Delta F_{\alpha,T_+}| \leq C \left(t\delta + \frac{e^{-\alpha\delta^2 t}}{\alpha^{3/2}t^2} \right). \quad (2.26)$$

Для получения нужных оценок (2.9), (2.10) теперь достаточно в (2.22) воспользоваться формулой Сельберга (2.13), равенствами (2.25), (2.26) и условиями (2.8). Лемма 1 доказана.

§3. Явная формула для функции Ψ^Γ и ее применение

Функция Ψ^Γ была определена в (1.6). Покажем, что сумму (2.6) можно выразить через эту функцию. Для этого выпишем в удобном для нас виде формулу частичного суммирования Абеля [4].

Пусть $\{P\}$ — любое бесконечное счетное множество и заданы три функции

$$N: \{P\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L: \{P\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

При этом функция f непрерывно дифференцируема, а функция N ограничена снизу и не ограничена сверху. Рассмотрим сумму

$$S(x) = \sum_{N_0 \leq N(P) \leq x} L(P) f(N(P)).$$

Тогда формула Абеля имеет вид

$$S(x) = B(x)f(x) - \int_{N_0}^x B(\xi)f'(\xi) \, d\xi, \quad B(\xi) = \sum_{N_0 \leq N(P) \leq \xi} L(P). \quad (3.1)$$

При этом если $B(x)f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{N(P) \geq N_0} L(P)f(N(P)) = - \int_{N_0}^{\infty} B(\xi)f'(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

при условии, что конечна правая или левая часть этого равенства. Формула (3.1) только по виду отличается от формулы, приведенной в книге [4], и прямо следует из нее.

Учитывая определение (1.7) функции $\Lambda^\Gamma(P)$, запишем сумму $S_{\alpha,T}^\Gamma$ в виде

$$S_{\alpha,T}^\Gamma = \sum_{\{P\}} \Lambda^\Gamma(P) N(P)^{-1/2} g_{\alpha,T}(\ln N(P)).$$

Так как $\Psi^\Gamma(x) \leq C_\Gamma x$, то, учитывая явный вид (2.7) функции $g_{\alpha,T}$, получаем, что можно воспользоваться формулой (3.2), и тогда

$$S_{\alpha,T}^\Gamma = - \int_{B_0}^{\infty} \Psi^\Gamma(x) G_{\alpha,T}(x) dx. \quad (3.3)$$

В этой формуле

$$G_{\alpha,T}(x) = \frac{d}{dx} (x^{-1/2} g_{\alpha,T}(\ln x)) = \frac{e^{-\ln^2 x / (4\alpha)}}{\pi x^{3/2} \ln x} [T \cos(T \ln x) - a(x) \sin(T \ln x)]. \quad (3.4)$$

Величина B_0 определена равенством (1.10), и

$$a(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{2\alpha}. \quad (3.5)$$

Явная формула для функции Ψ^Γ , доказанная в книге [9], имеет вид

$$\Psi^\Gamma(x) = \Psi_M^\Gamma(x) + \Psi_R^\Gamma(x) + \Delta_R \Psi^\Gamma(x). \quad (3.6)$$

При этом

$$\Psi_M^\Gamma(x) = a_0^\Gamma + a_1^\Gamma \ln x + (2g - 2) \ln(1 - x^{-1}) + \frac{4g - 2}{x - 1} + \sum_{m=0}^M \left(\frac{x^{s_m}}{s_m} + \frac{x^{\tilde{s}_m}}{\tilde{s}_m} \right). \quad (3.7)$$

Штрих в сумме по m в правой части этого равенства означает, что член с $\tilde{s}_m = 0$ опущен, g — род поверхности F и константы a_0^Γ , a_1^Γ зависят только от группы Γ , а величины s_m , $\tilde{s}_m$ определены в (1.2). Функция Ψ_R^Γ задается равенством

$$\Psi_R^\Gamma(x) = \sum_{0 \leq r_n \leq R} \left(\frac{x^{s_n}}{s_n} + \frac{x^{\tilde{s}_n}}{\tilde{s}_n} \right) + \frac{|F|x^{1/2} \cos(R \ln x)}{\pi \ln x}, \quad (3.8)$$

и если $R \geq \max(1000, x^2)$, $R \notin \{r_n\}$, $x \notin \{N(P)\}$, то при $R \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\Delta_R \Psi^\Gamma(x) = O_\Gamma \left(\frac{1}{d(x)} \frac{x^2}{R} \right) + O_\Gamma \left(\frac{x^{1/2}}{\ln R} \right), \quad d(x) = \min_{\{P\}} |x - N(P)|. \quad (3.9)$$

Покажем, что если выполняется условие (η, q) (см. (1.9)), то для любого $b > q + 2$

$$\Delta_R \Psi^\Gamma(x) = O_\Gamma \left(\frac{x^b}{R\eta} \right) + O_\Gamma \left(\frac{x^{1/2}}{\ln R} \right). \quad (3.10)$$

Формула (3.6) с оценкой (3.10) при $x \notin \{N(P)\}$ доказывается так же, как и соответствующая формула с оценкой (3.9). Для этого рассматривается интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{Z'(s)}{Z(s)} x^s \frac{ds}{s},$$

где $Z(s)$ — дзета-функция Сельберга (см. (1.5), (1.8)) и $\mathcal{L}$ — прямоугольник на плоскости $s = \sigma + it$ с вершинами в точках $b \pm iR$, $\pm A + iR$. Используя информацию о нулях функции Z , этот интеграл можно вычислить как сумму вычетов. Отличие от доказательства в книге [9] имеется только при вычислении интеграла

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} \frac{Z'(s)}{Z(s)} x^s \frac{ds}{s} = \sum_{\{P\}} \Lambda^\Gamma(P) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} \left(\frac{x}{N(P)} \right)^s \frac{ds}{s}.$$

Так как функция $\Psi^\Gamma(x)$ постоянна при $N(P) \leq x < N(P')$, где число $N(P')$ следует за $N(P)$ в упорядоченном по величине множестве $\{N(P)\}$, то достаточно рассмотреть случай $x \in \{N(Q) + \frac{1}{2}\eta N(Q)^{-q}\}$ ($\{Q\} = \{P\}$). Используя стандартную схему рассмотрения таких интегралов (см. [3], [4]), получаем, что

$$I(x) = \Psi^\Gamma(x) + \Delta^\Gamma I(x).$$

Так как $|\ln(x/N(P))| > C\eta N(P)^{-q-1}$ при нашем выборе x , то

$$|\Delta^\Gamma I(x)| \leq C \sum_{\{P\}} \frac{1}{R\eta} \frac{1}{N(P)^{b-q-1}}.$$

Отсюда с помощью формулы (3.2) и учитывая, что $\sum_{\{P\}} \Lambda^\Gamma(P) \leq C_\Gamma x$, получаем оценку

$$|\Delta^\Gamma I(x)| \leq C_\Gamma \frac{x^b}{R\eta}.$$

Дальнейшее доказательство повторяет соответствующую часть доказательства, приведенного в книге [9].

Подставляя полученное выражение для $\Psi^\Gamma(x)$ в формулу (3.3), получаем равенство

$$S_{\alpha,T}^\Gamma = S_M^\Gamma(\alpha, T) + S_R^\Gamma(\alpha, T) + \Delta_R S_{\alpha,T}^\Gamma,$$

в котором

$$S_M^\Gamma(\alpha, T) = - \int_{B_0}^\infty \Psi_M^\Gamma(x) G_{\alpha,T}(x) dx, \quad (3.11)$$

$$S_R^\Gamma(\alpha, T) = - \int_{B_0}^\infty \Psi_R^\Gamma(x) G_{\alpha,T}(x) dx, \quad (3.12)$$

$$\Delta_R S_{\alpha,T}^\Gamma = - \int_{B_0}^\infty \Delta_R \Psi^\Gamma(x) G_{\alpha,T}(x) dx. \quad (3.13)$$

Следующая лемма получается при переходе к пределу при $R \rightarrow \infty$ в этих формулах.

Лемма 2. Если выполняются условия теоремы, то имеет место равенство

$$S_{\alpha,T}^\Gamma = S_M^\Gamma(\alpha, T) + S_1^\Gamma(\alpha, T), \quad (3.14)$$

где величина $S_M^\Gamma(\alpha, T)$ определена равенствами (3.11), (3.7), (3.4),

$$S_1^\Gamma(\alpha, T) = - \sum_{r_n \geq 0} \int_{B_0}^\infty \left(\frac{x^{s_n}}{s_n} + \frac{x^{\bar{s}_n}}{\bar{s}_n} \right) G_{\alpha, T}(x) dx \quad (3.15)$$

и этот ряд сходится при $T > 2$, $\alpha > 1$.

Доказательство. Используя оценку (3.10) и делая в интеграле (3.13) замену переменных $y = \ln x$, получаем, что

$$|\Delta_R S_{\alpha, T}^\Gamma| \leq C_\Gamma T \left[\frac{1}{R\eta} \int_0^\infty e^{-y^2/(4\alpha) + y(b-1/2)} dy + \frac{1}{\ln R} \int_0^\infty e^{-y^2/(4\alpha)} dy \right].$$

Откуда следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R S_{\alpha, T}^\Gamma = 0.$$

Необходимо еще оценить вклад второго члена в правой части равенства (3.8), т. е. величину

$$\Delta S_R^\Gamma(\alpha, T) = - \int_{B_0}^\infty \frac{|F|x^{1/2} \cos(R \ln x)}{\pi \ln x} G_{\alpha, T}(x) dx.$$

Снова переходя к переменной $y = \ln x$ и интегрируя по частям, получаем оценку

$$|\Delta S_R^\Gamma(\alpha, T)| \leq C_\Gamma \frac{T^2}{R},$$

и, следовательно, $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta S_R^\Gamma(\alpha, T) = 0$. Сходимость ряда (3.15) вытекает из формулы Сельберга. Лемма 2 доказана.

§ 4. Вклад исключительных собственных значений

Вкладом исключительных собственных значений мы называем величину $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_M^\Gamma(\alpha, T)$. В этом параграфе доказывается

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_M^\Gamma(\alpha, T) = F_1^\Gamma(T) \quad (T > 1), \quad (4.1)$$

в котором F_1^Γ — ограниченная функция, имеющая при $T \rightarrow \infty$ асимптотику вида

$$F_1^\Gamma(T) = C_0^\Gamma + \frac{C_1^\Gamma}{T} + \frac{C_2^\Gamma}{T^2} + \dots \quad (4.2)$$

Доказательство. Переходя к переменному $y = \ln x$, запишем интеграл (3.11) в виде

$$S_M^\Gamma(\alpha, T) = -A_0^\Gamma(\alpha, T) - \sum_{m=0}^M [B_m^\Gamma(\alpha, T) + \tilde{B}_m^\Gamma(\alpha, T)],$$

где величины $A_0^\Gamma(\alpha, T)$, $B_m^\Gamma(\alpha, T)$ и $\tilde{B}_m^\Gamma(\alpha, T)$ определены равенствами

$$A_0^\Gamma(\alpha, T) = \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(4\alpha)-y/2}}{\pi y} [T \cos Ty - \tilde{a}(y) \sin Ty] \times \left[a_0^\Gamma + a_1^\Gamma y + (2g-2) \ln(1-e^{-y}) + \frac{4g-2}{e^y-1} \right] dy, \quad (4.3)$$

$$B_m^\Gamma(\alpha, T) = \frac{1}{s_m \pi} \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(4\alpha)-y/2+s_m y}}{y} [T \cos Ty - \tilde{a}(y) \sin Ty] dy, \quad (4.4)$$

$$\tilde{B}_m^\Gamma(\alpha, T) = \frac{1}{s_m \pi} \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(4\alpha)-y/2+\tilde{s}_m y}}{y} [T \cos Ty - \tilde{a}(y) \sin Ty] dy \quad (4.5)$$

и в этих формулах (см. (3.5))

$$\tilde{a}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{y}{2\alpha}.$$

Напомним, что член с $\tilde{s}_m = 0$ опущен. Так как $0 < \tilde{s}_m < 1/2$, то в интегралах $A_0^\Gamma(\alpha, T)$ и $\tilde{B}_m^\Gamma(\alpha, T)$ можно переходить к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$ под знаком интеграла. Обозначим эти пределы соответственно через $A_0^\Gamma(T)$ и $\tilde{B}_m^\Gamma(T)$. Таким образом,

$$A_0^\Gamma(T) = \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y/2}}{\pi y} [T \cos Ty - \tilde{a}(y) \sin Ty] \times \left[a_0^\Gamma + a_1^\Gamma y + (2g-2) \ln(1-e^{-y}) + \frac{4g-2}{e^y-1} \right] dy, \quad (4.6)$$

$$\tilde{B}_m^\Gamma(T) = \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y/2+\tilde{s}_m y}}{y} \left[T \cos Ty - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{y} \right) \sin Ty \right] dy. \quad (4.7)$$

Функции A_0^Γ , $\tilde{B}_m^\Gamma$ — гладкие ограниченные функции от T . Интегрируя по частям, получаем для них асимптотические разложения вида (4.2). Осталось рассмотреть интеграл (4.4). Докажем, что существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} B_m^\Gamma(\alpha, T) = B_m^\Gamma(T) \quad (4.8)$$

и при этом функция $B_m^\Gamma(T)$ ограничена и имеет асимптотическое разложение вида (4.2). Тогда равенство (4.1) будет доказано и в нем

$$F_1^\Gamma(T) = -A_0^\Gamma(T) - \sum_{m=0}^M [B_m^\Gamma(T) + \tilde{B}_m^\Gamma(T)]. \quad (4.9)$$

Трудность состоит в том, что, в отличие от интеграла (4.5), в интеграле (4.4) величина s_m удовлетворяет условию $1/2 < s_m \leq 1$. Интегралы $B_m^\Gamma(\alpha, T)$ имеют вид

$$I^\pm(\beta, T) = \int_{b_0}^{\infty} \varphi(u) e^{-\beta u + p u \pm i T u} du,$$

где $p = s_m - 1/2$, $T > p$, $\beta = (4\alpha)^{-1}$. Вычислим их предел при $\beta \rightarrow 0$. Рассмотрим интеграл $I^+(\beta, T)$. Выберем на плоскости $w = u + iv$ контур $\mathcal{L}$ в виде криволинейной трапеции со сторонами $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4$).

Здесь $\mathcal{L}_1 = [b_0, R]$, $\mathcal{L}_2$ — дуга окружности $|w| = R$, проведенная от точки $w = R$ до пересечения с прямой $v = u$, $\mathcal{L}_3$ — отрезок этой прямой от точки пересечения с дугой $|w| = R$ до точки $w = b_0 + ib_0$ и $\mathcal{L}_4$ — отрезок вертикальной прямой, соединяющий точки $w = b_0 + ib_0$ и $w = b_0$. Предполагается, что функция φ голоморфна внутри контура $\mathcal{L}$ и в этой области $|\varphi(w)| < C|w|^k$. Тогда если $\Psi_+(w) = \varphi(w)e^{-\beta w^2 + pw + iTw}$, то

$$I^+(\beta, w) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_3} \Psi_+(w) dw - \int_{\mathcal{L}_4} \Psi_+(w) dw,$$

так как $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_2} \Psi_+(w) dw = 0$. Теперь в интегралах, стоящих в правой части этого равенства, можно перейти к пределу при $\beta \rightarrow 0$ под знаком интеграла. Получим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_3} \Psi_+(w) dw &= O(e^{-Tb_0}), \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}_4} \Psi_+(w) dw &= e^{iTb_0 + pb_0} \int_0^{b_0} e^{-Tv + ipv} \varphi|_{u=b_0} i dv = O(1/T). \end{aligned}$$

Нужный результат (4.2) получается интегрированием по частям.

Чтобы рассмотреть интеграл $I^-(\beta, T)$, надо действовать так же, только вместо контура $\mathcal{L}$ взять его отражение $\mathcal{L}^*$ относительно действительной оси. Лемма 3 доказана.

§5. Доказательство теоремы и предложения

Рассмотрим формулы (2.9), (2.10) и устремим в них γ к ∞ при фиксированном $t \geq 3$. Из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t^2 + 1/4) &\geq \frac{|F|}{4\pi} t^2 + F_0^\Gamma(t) + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} S_{\alpha, T^-}^\Gamma, \\ \mathcal{N}(t^2 + 1/4) &\leq \frac{|F|}{4\pi} t^2 + F_0^\Gamma(t) + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} S_{\alpha, T^+}^\Gamma \quad (T^\pm = t \pm t^{-\gamma}). \end{aligned}$$

Так как $\alpha = t^{2\gamma}(\ln t^\sigma)$, то $\alpha \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Предел $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_M^\Gamma(\alpha, T)$ вычислен в лемме 3, и имеет место формула (3.14). Таким образом, остается вычислить предел $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_1^\Gamma(\alpha, T)$, где функция $S_1^\Gamma(\alpha, T)$ определена равенством (3.15).

Учитывая вид (3.4) функции $G_{\alpha, T}(x)$ и переходя к переменной $y = \ln x$ в интегралах формулы (3.15), получаем

$$S_1^\Gamma(\alpha, T) = -\frac{1}{\pi} \sum_{r_n \geq 0} \frac{J_n(\alpha, T)}{r_n^2 + 1/4}, \quad (5.1)$$

и в этой формуле

$$\begin{aligned} J_n(\alpha, T) &= \int_{b_0}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(4\alpha)}}{y} [\cos Ty - \tilde{a}(y) \sin Ty] [\cos r_n y + 2r_n \sin r_n y] dy, \\ \tilde{a}(y) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{y}{2\alpha}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований, включающих интегрирование по частям, имеем

$$S_1^\Gamma(\alpha, T) = -\frac{1}{\pi} \sum_{r_n \geq 0} [A_n^-(\alpha, T) - A_n^+(\alpha, T)], \quad (5.2)$$

$$A_n^\pm(\alpha, T) = \int_{b_0}^\infty \frac{e^{-y^2/(4\alpha)}}{y} \sin(r_n \pm T)y dy - \frac{r_n \cos(r_n \pm T)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(r_n \pm T)b_0}{b_0(r_n^2 + 1/4)}.$$

Формально нужный результат (1.11) получается предельным переходом при $\alpha \rightarrow \infty$ под знаками суммы и интеграла в формуле (5.2). Обоснуем это. Интегрирующие нас интегралы имеют вид

$$J(\alpha, \lambda) = \int_{b_0}^\infty \frac{e^{-y^2/(4\alpha)}}{y} \sin \lambda y dy.$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} J(\alpha, T) &= \frac{\cos \lambda b_0}{\lambda b_0} + \frac{\sin \lambda b_0}{\lambda^2} \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{2\alpha} \right) - \frac{\sin \lambda b_0}{\lambda^3} \left(\frac{2}{b_0^3} + \frac{1}{2\alpha b_0} + \frac{b_0}{\alpha^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^3} \int_{b_0}^\infty e^{-y^2/(4\alpha)} \cos \lambda y \left(\frac{6}{y^4} + \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha y^2} \right) + \frac{1}{8\lambda^3 \alpha^3} J_2(\alpha, \lambda), \end{aligned} \quad (5.3)$$

и в этой формуле

$$J_2(\alpha, \lambda) = \int_{b_0}^\infty y^2 e^{-y^2/(4\alpha)} \cos \lambda y dy.$$

Используя равенство (см. [18])

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos bx dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{a^{3/2}} e^{-b^2/(4a)} H_2\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right),$$

где H_2 — полином Эрмита, имеем оценку

$$|J_2(\alpha, \lambda)| \leq C(\lambda^2 \alpha^{5/2} e^{-\lambda^2 \alpha} + b_0^3). \quad (5.4)$$

Используя эти результаты и разлагая величины $A_n^-(\alpha, T) - A_n^+(\alpha, T)$ по обратным степеням r_n , получим, что

$$\begin{aligned} &A_n^-(\alpha, T) - A_n^+(\alpha, T) \\ &= 2 \frac{\cos r_n b_0}{r_n^2} \left[\frac{\cos T b_0}{b_0} T - \sin T b_0 \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right] + O_\Gamma\left(\frac{T^2}{r_n^3}\right) + O_\Gamma\left(\frac{1}{r_n^3 \alpha}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Теперь заметим, что при $\beta > 2$ (см. [8])

$$\sum_{r_n > 1} r_n^{-\beta} = C_\Gamma < \infty.$$

Так как в силу формулы Сельберга ряд (5.1) сходится, то из (5.2) и (5.5) следует, что выполняется равенство (1.12). Таким образом, ряд (5.1) сходится равномерно по α при $\alpha > 1$ и можно переходить к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$ под знаком суммы в (5.2). Возможность такого перехода по знаку $\int_{b_0}^\infty dy$ следует из формул (5.3), (5.4).

Теорема и предложение доказаны. При этом функция $F^\Gamma(t)$ в равенстве (1.11) имеет вид

$$F^\Gamma(t) = F_0^\Gamma(t) + F_1^\Gamma(t),$$

где функция $F_0^\Gamma(t)$ определена в (2.11), а функция $F_1^\Gamma(t)$ — равенствами (4.6)–(4.9).

Выше равенство (1.12) и теорема были доказаны одновременно. Покажем, как это равенство выводится из теоремы. Это даст некоторую информацию о характере сходимости ряда в правой части равенства (1.11).

Обозначим этот ряд через $H(t)$:

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{r_n \geq 0} [\operatorname{sgn}(r_n - t) \operatorname{si}(|t - r_n|b_0) - \operatorname{si}((t + r_n)b_0) - \beta_n]. \quad (5.6)$$

В силу теоремы

$$\mathcal{N}(t^2 + 1/4) = \frac{|F|}{4\pi} + H(t) + F^\Gamma(t).$$

Предположим, что $\bar{r}_p \leq t < \bar{r}_{p+1}$, где $\bar{\lambda}_p = \bar{r}_p^2 + 1/4$ — собственные значения, перенумерованные без учета кратности ($\bar{r}_p < \bar{r}_{p+1}$), и p достаточно велико. Пусть $\theta > 0$, и запишем величину $H(t)$ в виде

$$H(t) = H_\theta(t) + \Delta_\theta H(t), \quad \Delta_\theta H(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{r_n > t^{1+\theta}} [\operatorname{si}((r_n - t)b_0) - \operatorname{si}((t + r_n)b_0) - \beta_n].$$

Используя асимптотическое разложение

$$-\operatorname{si} x = \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \frac{6!}{x^6} + \dots \right) + \frac{\sin x}{x^2} \left(1 - \frac{3!}{x^2} + \frac{5!}{x^4} - \frac{7!}{x^6} + \dots \right),$$

которое является обертывающим, получим, что

$$\Delta_\theta H(t) = \sum_{r_n > t^{1+\theta}} \frac{\cos r_n b_0}{\pi r_n^2} \left[-\frac{2t}{b_0} \cos t b_0 + \frac{2}{b_0} \left(\frac{1}{b_0} + \frac{1}{2} \right) \sin t b_0 \right] + O_\Gamma(t^{1-\theta}). \quad (5.7)$$

При выводе этого равенства использовались оценки

$$t^2 \sum_{r_n > t^{1+\theta}} r_n^{-3} \leq C_\Gamma t^{1-\theta}, \quad t^3 \sum_{r_n > t^{1+\theta}} r_n^{-4} \leq C'_\Gamma t^{1-2\theta}.$$

Равенство (1.12) теперь следует из (5.7) и сходимости ряда (5.6). Заметим, что (см. [9])

$$\sum_{r_n \leq T} r_n^{-2} = O(\ln T).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Е. Ингам, *Распределение простых чисел*, Главная редакция общетехнической литературы и номографии, М.-Л., 1936.
- [2] Н. М. Edwards, *Riemann's Zeta-Function*, Academic Press, New York, 1974.
- [3] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [4] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [5] Ю. М. Манин, А. А. Панчишкин, *Введение в современную теорию чисел*, МЦНМО, М., 2009.
- [6] С. Ленг, *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966.

- [7] C. J. Moreno, *Explicit formulas in the theory of automorphic forms*, in: Number Theory Day (Proc. Conf. Rockefeller Univ., New York), Lecture Notes in Math., vol. 626, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 73–216.
- [8] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula and the Riemann zeta-function*, Duke Math. J., **43**:3 (1976), 441–481.
- [9] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$* , V. 1, Lecture Notes in Math., vol. 548, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
- [10] А. Б. Венков, *Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики*, УМН, **34**:3 (1979), 69–135.
- [11] B. Randol, *A Dirichlet series of eigenvalue type with applications to asymptotic estimates*, Bull. London Math. Soc., **13**:4 (1981), 309–315.
- [12] Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, *Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля*, УМН, **48**:4 (1993), 3–130.
- [13] W. Luo, P. Sarnak, *Number variance for arithmetic hyperbolic surface*, Comm. Math. Phys., **161**:2 (1994), 419–432.
- [14] S. Geninska, E. Leuzinger, *A geometric characterization of arithmetic Fuchsian groups*, Duke Math. J., **142**:1 (2008), 112–125.
- [15] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (ред. М. Абрамовиц, И. Стиган), Наука, М., 1979.
- [16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.
- [17] В. В. Головчанский, *Асимптотика спектральной функции оператора Лапласа–Бельтрами для кокомпактных дискретных подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$* , Матем. сб., **189**:7 (1998), 23–36.
- [18] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

Научно-исследовательский институт
физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
24 февраля 2011 г.