Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Менегатту, Ж. К. Феррейра, Гильбертовы пространства, порожденные воспроизводящими ядрами, заданными на топологических пространствах, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 2, 89–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:16:10

УДК 917.98

Гильбертовы пространства, порожденные воспроизводящими ядрами, заданными на топологических пространствах*

© 2012. В. А. МЕНЕГАТТУ, Ж. К. ФЕРРЕЙРА

1. Основные определения. Пусть X — непустое множество и $K: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ — положительно определенное ядро на X ; это означает, что матрица $(K(x_i, x_j))_{n \times n}$ является неотрицательно определенной для всех $n \geq 1$ и всех наборов $x_1, \dots, x_n \in X$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}_K$, порожденное таким ядром K , — это (по определению) наименьшее гильбертово пространство, содержащее множество $\{K^x := K(\cdot, x) : x \in X\}$ со скалярным произведением $\langle K^x, K^y \rangle_K := K(y, x)$. Это пространство характеризуется следующим *воспроизводящим свойством*: $f(x) = \langle f, K^x \rangle_K$, $f \in \mathcal{H}_K$, $x \in X$. Для случая, когда на X задана мера ν и интегральный оператор $\mathcal{K}: L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$, заданный формулой $\mathcal{K}(f)(x) = \langle K(x, \cdot), f \rangle_2$, $x \in X$, корректно определен, имеются классические результаты относительно K , $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_K$; см. [2], [4], [5].

В этой работе предполагается, что X — топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности либо локально компактное. На нем вводится такая (полная) борелевская мера ν , что каждое непустое открытое множество из X имеет положительную меру и каждая точка $x \in X$ принадлежит открытому множеству конечной меры.

Мы будем говорить, что ядро K является $L^2(X, \nu)$ -положительно определенным, если указанный выше оператор $\mathcal{K}$ корректно определен, ограничен и удовлетворяет неравенству $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(X, \nu)$. Заметим, что непрерывное $L^2(X, \nu)$ -положительно определенное ядро есть положительно определенное ядро в обычном смысле [3]. Введем обозначение $\kappa(x) = K(x, x)$, $x \in X$. Справедливо неравенство $|f(x)| = |\langle f, K^x \rangle_K| \leq \kappa(x)^{1/2} \|f\|_K$, $f \in \mathcal{H}_K$, $x \in X$.

Теорема 1.1. *Предположим, что каждая из функций K^y непрерывна.*

(i) *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в пространстве $\mathcal{H}_K$, то она сходится равномерно на компактных множествах.*

(ii) $\mathcal{H}_K \subset C(X)$.

Доказательство. Заметим, что

$$|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, K^x \rangle_K| \leq \|f_n - f\|_K \kappa(x)^{1/2}, \quad x \in X,$$

и если последовательность функций $f_n = \sum_{i=1}^{j_n} c_i K^{x_i}$, $c_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in X$, сходится к f в $\mathcal{H}_K$, то она сходится равномерно на компактных множествах. Теперь требуемый результат вытекает из условий теоремы. $\square$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что K есть непрерывное $L^2(X, \nu)$ -положительно определенное ядро. Если при этом функция κ ограничена, то отображение включения $i: \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ тоже ограничено.

*Исследования первого автора, V. A. Menegatto, были поддержаны FAPESP, грант 2010.19734-6, исследования второго автора, J. C. Ferreira, — FAPEMIG, грант APQ-03911-10.

Теорема 1.2. Если $\kappa \in L^1(X, \nu)$, то

- (i) $\mathcal{H}_K \subset C(X) \cap L^2(X, \nu)$ и $\|f\|_2 \leq \|\kappa\|_1^{1/2} \|f\|_K$, $f \in \mathcal{H}_K$;
- (ii) $\mathcal{K}(f) \in \mathcal{H}_K$ и $\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \langle f, g \rangle_2$, $g \in \mathcal{H}_K$, $f \in L^2(X, \nu)$.

Доказательство. Если $\psi_f(g) = \langle g, f \rangle_2$, $g \in \mathcal{H}_K$, $f \in L^2(X, \nu)$, то $|\psi_f(g)| \leq \|f\|_2 \|\kappa\|_1^{1/2} \|g\|_K$. Так как существует такой вектор $h \in \mathcal{H}_K$, что $\psi_f(g) = \langle g, h \rangle_K$, $g \in \mathcal{H}_K$, то $h(x) = \langle h, K^x \rangle_K = \langle f, K^x \rangle_2 = \mathcal{K}(f)(x)$, $x \in X$. $\square$

2. Теория Мерсера. Если вектор-функция $x \in X \rightarrow K(x, \cdot) \in L^2(X, \nu)$ принадлежит пространству $C(X, L^2(X, \nu))$, то из определения оператора $\mathcal{K}$ следует, что его область значений содержится в пространстве $C(X)$. Если $\mathcal{K}$ компактен, то он самосопряжен и имеет спектральное разложение $\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n$, $f \in L^2(X, \nu)$, где набор $\{\phi_n\}$ ортонормирован в $L^2(X, \nu)$, последовательность $\{\lambda_n\}$, убывая, стремится к нулю, $\{\lambda_n \phi_n\} \in C(X)$ и при этом справедливо равенство

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X.$$

Такого типа ядро K назовем *ядром Мерсера*. Проверка того, что непрерывное ядро является ядром Мерсера, оказывается непростой задачей — как в ситуации, рассматриваемой в настоящей работе, так и в случае, рассмотренном в [4].

Теорема 2.1 (теорема Мерсера I). Если $\kappa \in L^1(X, \nu)$, то K есть ядро Мерсера.

Доказательство. Если ядро K квадратично интегрируемо, то оператор $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$ компактен. В этом случае, согласно теореме 1.2, область значений оператора $\mathcal{K}$ лежит в $C(X)$. Остается применить аргументы из доказательства теоремы 2.4 из [3], приспособив их к тем условиям, которые мы наложили на пространство X . $\square$

В следующих двух теоремах мы предполагаем, что функция κ принадлежит пространству $L^1(X, \nu)$.

Теорема 2.2. Множество $\{\lambda_n^{1/2} \phi_n : \lambda_n \neq 0\}$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}_K$.

Доказательство. Согласно теореме 1.2, $\langle \lambda_n \phi_n, \phi_m \rangle_K = \langle \mathcal{K}(\phi_n), \phi_m \rangle_K = \langle \phi_n, \phi_m \rangle_2 = \delta_{m,n}$ при $\lambda_n \neq 0$. Следовательно, набор $\{\lambda_n^{1/2} \phi_n : \lambda_n \neq 0\}$ ортонормирован в $\mathcal{H}_K$. Если вектор $f \in \mathcal{H}_K$ удовлетворяет условию $\langle f, \phi_n \rangle_K = 0$, $n = 1, 2, \dots$, то из соотношения

$$K^x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\phi_n(x)} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \phi_n \rangle_K \lambda_n \phi_n, \quad x \in X,$$

вытекает, что

$$f(x) = \langle f, K^x \rangle_K = \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \phi_n \rangle_K \lambda_n \phi_n \right\rangle_K = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_K \lambda_n \phi_n(x) = 0, \quad x \in X.$$

Таким образом, множество $\{\lambda_n^{1/2} \phi_n : \lambda_n \neq 0\}$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}_K$. $\square$

Для дальнейшего введем оператор $\mathcal{K}^{1/2}: L^2(X, \nu) \rightarrow C(X) \subset L^2(X, \nu)$ формулой $\mathcal{K}^{1/2}(\phi_n) = \lambda_n^{1/2} \phi_n$, $n = 1, 2, \dots$ (см. [3]). Для любого множества $B \subset L^2(X, \nu)$ обозначим через $\overline{B}$ его замыкание и через $B^\perp$ ортогональное дополнение.

Теорема 2.3. *Оператор $\mathcal{K}^{1/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм замыкания линейной оболочки множества $\{K^x : x \in X\}$ в $L^2(X, \nu)$ на $\mathcal{H}_K$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{D}_K := \text{span}\{K^x : x \in X\}$ и $V_K = \text{span}\{\lambda_n \phi_n\}$. Так как K есть ядро Мерсера, то $\mathcal{D}_K \subset \overline{V_K}$ и $\overline{V_K}^\perp \subset \overline{\mathcal{D}_K}^\perp$. Если $f \in \mathcal{D}_K^\perp$, то $\mathcal{K}(f)(x) = \langle f, K^x \rangle_2 = 0$, $x \in X$, т.е. $\mathcal{K}(f) = 0$. Из теоремы 1.2 вытекает, что $\langle f, \phi_n \rangle_2 = \langle \mathcal{K}(f), \phi_n \rangle_K = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\langle f, g \rangle_2 = 0$, $g \in \overline{V_K}$. Следовательно, $\overline{V_K}^\perp \subset \overline{\mathcal{D}_K}^\perp$. Заметим теперь, что если $g \in \mathcal{H}_K$, то $g = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \lambda_n^{1/2} \phi_n = \mathcal{K}^{1/2}(f)$, где $f = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \phi_n \in \overline{\mathcal{D}_K}$; осталось применить равенство Парсеваля. $\square$

В завершение этой заметки заменим условие интегрируемости функции κ условием плотности множества $L_c^2(X)$ (состоящего из функций с компактным носителем) в $L^2(X, \nu)$. Условие плотности выполняется, если ν — радонова мера, а также если X — специального вида метрическое пространство (см. [4]).

Теорема 2.4. *Если $\{f_n\}$ — последовательность из $L_c^2(X)$, сходящаяся к элементу f в $L^2(X, \nu)$, то $\mathcal{K}(f)$ — непрерывная функция, лежащая в $\mathcal{H}_K$, и $\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle_2$ для $g \in \mathcal{H}_K$.*

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 1.2, получаем, что $\mathcal{K}(f_n) \in \mathcal{H}_K$ и $\langle \mathcal{K}(f_n), g \rangle_K = \langle f_n, g \rangle_2$. Следовательно, $\|\mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m)\|_K^2 \leq \|\mathcal{K}\|_2 \|f_n - f_m\|_2^2$, откуда вытекает, что последовательность $\{\mathcal{K}(f_n)\}$ сходится в $\mathcal{H}_K$. $\square$

Предыдущие результаты и доказательство теоремы 2.1 приводят к следующему результату.

Теорема 2.5. *Если оператор $\mathcal{K}$ компактен, то K есть ядро Мерсера.*

Так как в случае квадратично интегрируемого ядра K оператор $\mathcal{K}$ компактен, то теорема 2.5 показывает, что ограничения, наложенные в [1], [4], являются излишними либо чрезмерно жесткими. В заключение заметим, что в случае, когда K — ядро Мерсера, можно доказать аналоги теорем 1.2. и 2.3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Buescu, J. Math. Anal. Appl., **296**:1 (2004), 244–255. [2] F. Cucker, S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **39**:1 (2002), 1–49. [3] J. C. Ferreira, V. A. Menegatto, Integral Equation Operator Theory, **64**:1 (2009), 61–81. [4] Hongwei Sun, J. Complexity, **21**:3 (2005), 337–349. [5] Hongwei Sun, Qiang Wu, Math. Comput. Modelling, **49**:1–2 (2009), 276–285.

Departamento de Matemática,
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo
e-mail: menegatt@icmc.usp.br

Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas
e-mail: jose.ferreira@unifal-mg.edu.br

Поступило в редакцию
15 октября 2010 г.