Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Об отображении совместного спектра набора генераторов полугрупп, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 62–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:23:40

Об отображении совместного спектра набора генераторов полугрупп*

© 2012. А. Р. МИРОТИН

В рамках многомерного функционального исчисления генераторов полугрупп, основанного на классе функций Бернштейна нескольких переменных («многомерного функционального исчисления Бохнера–Филлипса»), устанавливается теорема об отображении спектра Тейлора набора коммутирующих генераторов.

§1. Введение и предварительные сведения

Одномерное функциональное исчисление Бохнера–Филлипса является существенной частью теории полугрупп операторов (см., например, [1]–[5]) и находит важные применения в теории случайных процессов (см. [6, гл. XIII, §7], [7, гл. XXIII, §5], [8]). Основы многомерного исчисления были заложены автором в [9]–[11]. В данной статье мы определяем совместный спектр Тейлора набора коммутирующих генераторов полугрупп операторов класса C_0 в банаховом пространстве и устанавливаем теорему об отображении этого спектра для многомерного исчисления Бохнера–Филлипса. Эта теорема выводится из теоремы об отображении коммутантного спектра. Для формулировки результатов напомним необходимые понятия и факты из [9] и [11].

Определение 1 [9]. Будем говорить, что неположительная функция $\psi \in C^\infty((-\infty; 0)^n)$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n$ (или является функцией Бернштейна n переменных), если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (функция из $C^\infty((-\infty; 0)^n)$ называется *абсолютно монотонной*, если она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков).

Очевидно, что $\mathcal{T}_n$ есть конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр.

Известно [11], что каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ допускает интегральное представление (здесь и ниже точкой мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}_+^n$; запись $s \rightarrow -0$ означает, что $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$):

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \quad (s \in (-\infty; 0)^n), \quad (1)$$

где $c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \rightarrow -0} \psi(s)$, а c_1 из $\mathbb{R}_+^n$ и положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ определяются по ψ однозначно.

Всюду далее через $T_1, \dots, T_n$ будут обозначаться попарно коммутирующие однопараметрические C_0 -полугруппы (т.е. сильно непрерывные на $\mathbb{R}_+$ полугруппы) в комплексном банаховом пространстве X , удовлетворяющие условию $\|T_j(t)\| \leq M$ ($t \geq 0$, $M = \text{const}$). Через A_j обозначим генератор полугруппы

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь, договор №20061473.

T_j с областью определения $D(A_j)$ и положим $A = (A_1, \dots, A_n)$. Далее коммутирование операторов $A_1, \dots, A_n$ означает коммутирование соответствующих полугрупп. Через $\text{Gen}(X)$ мы будем обозначать множество всех генераторов равномерно ограниченных C_0 -полугрупп в X , а через I — единичный оператор в X .

Операторнозначная функция $T(u) := T_1(u_1) \cdots T_n(u_n)$ ($u \in \mathbb{R}_+^n$) является n -параметрической полугруппой класса C_0 , а потому линейное многообразие $D(A) := \bigcap_{j=1}^n D(A_j)$ плотно в X [7, §10.10].

Определение 2 [11]. Определим значение функции ψ из $\mathcal{T}_n$ вида (1) на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ при $x \in D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0x + c_1 \cdot Ax + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (T(u) - I)x d\mu(u), \quad (2)$$

где $c_1 \cdot Ax := \sum_{j=1}^n c_1^j A_j x$.

Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$, $t \geq 0$. Тогда функция $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$ будет абсолютно монотонной на $(-\infty; 0)^n$. Очевидно также, что $g_t(s) \leq 1$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна–Уиддера (см., например, [12]) существует такая единственная ограниченная положительная (вероятностная, если $\psi(0) = 0$) мера ν_t на $\mathbb{R}_+^n$, что при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\nu_t(u). \quad (3)$$

Определение 3. Используя обозначения, введенные выше, положим

$$g_t(A)x = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x d\nu_t(u) \quad (x \in X) \quad (4)$$

(интеграл понимается в смысле Бохнера).

Очевидно, что $\|g_t(A)\| \leq M^n$. Поскольку $g_{t+r}(s) = g_t(s)g_r(s)$, то ν_t образуют сверточную полугруппу ограниченных мер на $\mathbb{R}_+^n$. Поэтому $g(A): t \mapsto g_t(A)$ есть равномерно ограниченная полугруппа операторов на X . В частности, $g(A)$ есть C_0 -полугруппа. В одномерном случае она называется *полугруппой, подчиненной полугруппе T* (терминология восходит к теории вероятностей, см. [6, §X.7], [8]).

В [13] было замечено, что основная теорема из [11] может быть уточнена следующим образом.

Теорема 1. *Замыкание оператора $\psi(A)$ существует и является генератором полугруппы $g(A)$ класса C_0 , определенной формулой (4).*

В самом деле, в [11] было доказано, что оператор $\psi(A)$ замыкаем и его расширением является генератор G C_0 -полугруппы $g(A)$. Поэтому $\overline{\psi(A)} \subseteq G$ (черта обозначает замыкание оператора). Покажем, что здесь имеет место равенство. Поскольку операторы $g_t(A)$ коммутируют с $T_k(s)$ при всех k , то, как легко проверить, $g_t(A): D(A_k) \rightarrow D(A_k)$ при всех k , а потому и $g_t(A): D(A) \rightarrow D(A)$. Отсюда следует, что $D(A)$ есть существенная область для генератора G (см. [14, следствие 3.1.7]). С другой стороны, $D(A)$ есть существенная область для оператора $\overline{\psi(A)}$, причем сужения операторов $\overline{\psi(A)}$ и G на $D(A)$ совпадают. Поэтому $\overline{\psi(A)} = G$, что и завершает доказательство.

Предыдущая теорема мотивирует окончательный вариант определения оператора $\psi(A)$.

Определение 4 [11]. Под значением функции ψ из $\mathcal{T}_n$ на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ коммутирующих операторов из $\text{Gen}(X)$ будем понимать генератор полугруппы $g(A)$. Это значение мы далее обозначаем через $\psi(A)$. Возникающее функциональное исчисление будем называть *многомерным исчислением Бохнера–Филлипса* или $\mathcal{T}_n$ -исчислением.

Введенные выше обозначения и ограничения далее будут применяться без дополнительных пояснений.

§2. Определение спектра Тейлора и формулировка основной теоремы

Уже для функции $\psi \in \mathcal{T}_1$ теорема об отображении спектра может не выполняться в том смысле, что равенство $\psi(\sigma(A)) = \sigma(\psi(A))$, где $A \in \text{Gen}(X)$, $\sigma(A)$ — спектр оператора A , может не иметь места, в чем нас убеждает следующий пример.

Пример 1. Пусть $\psi(s) = e^s - 1$. В этом случае представляющая мера μ равна ε_1 , мере Дирака на $\mathbb{R}$, сосредоточенной в единице. В силу определения 4 и теоремы 1 тогда $\psi(A) = T(1) - I$. Но известно, что существует такая равномерно ограниченная полугруппа T_2 класса C_0 , для которой $\sigma(A_2) = \emptyset$ (см., например, [15, пример 9.6]). Тогда $\sigma(T_2(1)) \neq e^{\sigma(A_2)}$, а потому $\sigma(\psi(A_2)) \neq \psi(\sigma(A_2))$.

Определение 5. Обобщенный комплекс Кошуля $\mathcal{K}(X, A)$ набора A определим как последовательность пространств и операторов

$$0 \longleftarrow X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \longleftarrow \dots \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \longleftarrow 0,$$

где $X_m = X \otimes \bigwedge^m \mathbb{C}^n$ ($m = 0, \dots, n$), а каждый оператор $d_m = d_m(A)$ имеет область определения $D(d_m) \subset X_{m+1}$, являющуюся линейной оболочкой векторов вида $x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$, где $(e_k)_{k=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n$, а $x \in D(A_{j_1} \dots A_{j_{m+1}})$ для любой перестановки $(j_1, \dots, j_{m+1})$ мультииндекса $(i_1, \dots, i_{m+1})$. Для каждого $m = 0, \dots, n-1$ оператор d_m однозначно определяется на $D(d_m)$ равенством

$$d_m(x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}) = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k A_{i_k} x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$$

(«крышка», как обычно, означает, что стоящий под ней вектор опущен).

Хотя обобщенный комплекс Кошуля формально выглядит так же, как и комплекс Кошуля для набора ограниченных операторов (см., например, [16]), отличие состоит в том, что дифференциалы d_m не ограничены. При этом их области определения $D(d_m)$ выбраны, как легко проверить, таким образом, что

$$d_m: D(d_m) \rightarrow D(d_{m-1}).$$

Последовательность $\mathcal{K}(X, A)$ является комплексом в том смысле, что $d_{m-1}d_m x = 0$ для всех $x \in D(d_m)$ и всех m . Это проверяется непосредственно с помощью следующего утверждения.

Лемма 1. Если вектор x принадлежит $D(A_i A_j) \cap D(A_i)$, то он принадлежит $D(A_j A_i)$ и $A_i A_j x = A_j A_i x$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Доказательство. Лемма прямо следует из теоремы 10.9.4 в [7]. $\square$

(Последовательность

$$0 \longleftarrow X_0 \xleftarrow{d_0} D(d_0) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} D(d_{n-1}) \longleftarrow 0$$

является комплексом векторных пространств и их морфизмов, но не является комплексом нормированных пространств и их морфизмов в классическом понимании термина «комплекс».)

Все сказанное выше о $\mathcal{K}(X, A)$ остается верным для любого набора $(A_1, \dots, A_n)$ неограниченных операторов в X , обладающих свойством, сформулированным в лемме 1. В частности, это относится к набору $\lambda - A := (\lambda_1 I - A_1, \dots, \lambda_n I - A_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, где A (как и всюду в данной работе) — набор попарно коммутирующих генераторов полугрупп, описанный выше. При этом $D(d_m(\lambda - A)) = D(d_m(A))$ для любого m .

Определение 6. Спектр Тейлора $\sigma_T(A)$ набора A состоит из тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых комплекс $\mathcal{K}(X, \lambda - A)$ не является точным.

Ясно, что при $n = 1$ спектр $\sigma_T(A_1)$ совпадает с обычным спектром $\sigma(A_1)$ оператора A_1 .

Отметим, что, вообще говоря,

$$\text{pr}_1 \sigma_T(A) \neq \sigma(A_1),$$

т.е. проекционное свойство для нашего спектра Тейлора может нарушаться (в качестве примера можно взять $T(u) = T_2(u_2)$, где T_2 — полугруппа из примера 1; здесь $\sigma_T(A) = \emptyset$, $\sigma(A_1) = \{0\}$).

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2. Для любой функции Бернштейна ψ от n переменных справедливо включение

$$\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_T(A)).$$

При $\psi(s) = e^{t \cdot s} - 1$ ($t \in \mathbb{R}_+^n$) получаем

Следствие. Имеет место включение

$$\sigma(T(t)) \supseteq e^{t \cdot \sigma_T(A)} \quad (t \in \mathbb{R}_+^n).$$

Теорема 2 вытекает из теорем 3 и 4, устанавливаемых ниже.

§3. Отображение коммутантного спектра

Определение 7. Будем говорить, что точка $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ является *регулярной* для набора A (и писать $\lambda \in \rho_{\text{III}}(A)$), если найдутся такие ограниченные операторы B_k в X , $\text{Im}(B_k) \subseteq D(A_k)$, $k = 1, \dots, n$, коммутирующие со всеми A_j (т.е. $B_k A_j \subseteq A_j B_k$), что

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j) B_j = I.$$

Коммутантный спектр набора A определим равенством¹⁾ $\sigma_{\text{III}}(A) = \mathbb{C}^n \setminus \rho_{\text{III}}(A)$.

¹⁾Это понятие для случая ограниченных операторов введено в [17] (на это указал рецензент).

Очевидно, что в случае одного оператора $\sigma_{\text{III}}(A_1)$ совпадает с $\sigma(A_1)$.

Легко проверить также, что $\sigma_{\text{III}}(A) \subseteq \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_n)$ (рассуждая, как в доказательстве предложения 1.9 из [17], можно показать, что $\sigma_{\text{III}}(A)$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{C}^n$, однако этот факт нам далее не понадобится).

Теорема 3. *Для любой функции Бернштейна ψ от n переменных справедливо включение*

$$\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_{\text{III}}(A)).$$

Доказательство. Докажем, что

$$\rho_{\text{III}}(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \lambda < 0, \psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))\}. \quad (5)$$

При $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и $x \in D(A)$ имеем в силу (1) и (3)

$$\psi(\lambda)x - \psi(A)x = c_1 \cdot (\lambda I - A)x + \int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{\lambda \cdot u} I - T(u))x d\mu(u). \quad (6)$$

Для любых ограниченных операторов B_j, C_j , $j = 1, \dots, n$, в X справедливо тождество

$$\prod_{j=1}^n B_j - \prod_{j=1}^n C_j = (B_1 - C_1) \prod_{j=2}^n B_j + C_1(B_2 - C_2) \prod_{j=3}^n B_j + \cdots + \prod_{j=1}^{n-1} C_j(B_n - C_n).$$

С учетом коммутирования полугрупп T_j получаем отсюда, что

$$e^{\lambda \cdot u} I - T(u) = \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_j u_j} I - T_j(u_j)) U_j(u), \quad (7)$$

где

$$U_j(u) = \prod_{1 \leq l < j} T_l(u_l) \prod_{j < k \leq n} e^{\lambda_k u_k}$$

— ограниченные операторы в X , коммутирующие с T_i , $i = 1, \dots, n$, $\|U_j(u)\| \leq M^{n-1}$. Известно (см., например, [18, формулы (8.1a), (8.1b)]), что равенства

$$V_j(u_j)x = \int_0^{u_j} e^{(u_j-s)\lambda_j} T_j(s)x ds$$

определяют ограниченные операторы в X , $\operatorname{Im}(V_j(u_j)) \subseteq D(A_j)$, также коммутирующие со всеми T_i , причем $\|V_j(u_j)x\| \leq M\|x\|(e^{u_j \operatorname{Re} \lambda_j} - 1)/\operatorname{Re} \lambda_j$ и

$$(e^{\lambda_j u_j} I - T_j(u_j))x = (\lambda_j I - A_j)V_j(u_j)x \quad \text{при } x \in X.$$

Подставляя это в (7), а результат — в (6), имеем

$$\begin{aligned} (\psi(\lambda)I - \psi(A))x &= \sum_{j=1}^n c_j^1 (\lambda_j I - A_j)x + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} (\lambda_j I - A_j)V_j(u_j)U_j(u)x d\mu(u) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)W_j x, \end{aligned} \quad (8)$$

где операторы

$$W_j x = c_1^j x + \int_{\mathbb{R}_+^n} V_j(u_j)U_j(u)x d\mu(u)$$

ограничены в X , так как

$$\begin{aligned} \|W_j x\| &\leq \left(c_1^j + M^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \|V_j(u_j)\| d\mu(u) \right) \|x\| \\ &\leq \left(c_1^j + \frac{M^n}{\operatorname{Re} \lambda_j} \int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{u_j \operatorname{Re} \lambda_j} - 1) d\mu(u) \right) \|x\| \end{aligned}$$

(интегралы сходятся, поскольку последний выражается через $\psi((\operatorname{Re} \lambda_j)e_j)$, где $(e_j)_{j=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$). Кроме того, $\operatorname{Im}(W_j) \subseteq D(A_j)$ и W_j коммутируют со всеми T_i , а потому и с $\psi(A)$.

Если $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))$, то, заменяя в (8) x на $(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1}x$, $x \in X$, получаем

$$x = \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)(W_j(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1})x \quad \text{при } x \in X,$$

т. е. $\lambda \in \rho_{\text{III}}(A)$, что доказывает (5).

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma(A_j) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j < 0\}$ при всех j . Если мы предположим, что в этом случае теорема неверна, т. е. найдется число из $\psi(\sigma_{\text{III}}(A))$, не принадлежащее $\sigma(\psi(A))$, то $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))$ при некотором $\lambda \in \sigma_{\text{III}}(A)$, а это противоречит (5).

Перейдем к общему случаю. В силу ограниченности рассматриваемых полугрупп при всех $j = 1, \dots, n$ справедливо включение $\sigma(A_j) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0\}$. Тогда для любого $\delta > 0$ операторы $A_j - \delta I$ принадлежат $\operatorname{Gen}(X)$ и $\sigma(A_j - \delta I) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j < 0\}$ при всех j . Кроме того, $\psi_\delta(s) := \psi(s - \bar{\delta}) \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_\delta(A) = \psi(A - \bar{\delta}I)$, где $\bar{\delta} := (\delta, \dots, \delta)$. По доказанному выше

$$\sigma(\psi_\delta(A)) = \sigma(\psi(A - \bar{\delta}I)) \supseteq \psi(\sigma_{\text{III}}(A - \bar{\delta}I)) = \psi_\delta(\sigma_{\text{III}}(A)). \quad (9)$$

Далее, в доказательстве основной теоремы из [11] показано, что $\psi(A)x = \psi_\delta(A)x + F_\delta x$ при $x \in D(A)$, где F_δ — ограниченный оператор. Но тогда $\psi(A) = \psi_\delta(A) + F_\delta$, поскольку по теореме 1 $D(A)$ есть существенная область для обеих частей этого равенства. Кроме того, в [11] показано, что $\|F_\delta\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), а потому по теореме о спектре возмущенного оператора (см. [19, теорема IV.3.6]; ρ_H обозначает метрику Хаусдорфа)

$$\rho_H(\sigma(\psi_\delta(A)), \sigma(\psi(A))) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\delta > 0$ имеем $\sigma(\psi_\delta(A)) \subseteq B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))]$; здесь $B_\varepsilon[N] := \{z \in \mathbb{C} : \inf_{t \in N} |z - t| \leq \varepsilon\}$ для любого множества $N \subset \mathbb{C}$. А тогда $\psi_\delta(\sigma_{\text{III}}(A)) \subseteq B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))]$ в силу (9).

С другой стороны, при достаточно малых $\delta > 0$ имеет место включение $\psi(\sigma_{\text{III}}(A)) \subseteq B_\varepsilon[\psi_\delta(\sigma_{\text{III}}(A))]$. Это следует из того, что $\psi(\lambda) - \psi(\lambda - \bar{\delta}) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) равномерно по $\lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$, так как

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda - \bar{\delta})| \leq c_1 \cdot \bar{\delta} + \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 - e^{-u \cdot \bar{\delta}}) d\mu(u) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow +0)$$

по теореме Б. Леви. Следовательно, $\psi(\sigma_{\text{III}}(A)) \subseteq B_\varepsilon[B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))]] \subseteq B_{2\varepsilon}[\sigma(\psi(A))]$,

а потому

$$\psi(\sigma_{\text{III}}(A)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} B_{2\varepsilon}[\sigma(\psi(A))] = \sigma(\psi(A))$$

в силу замкнутости множества $\sigma(\psi(A))$. □

§ 4. Сравнение коммутантного спектра и спектра Тейлора — окончание доказательства теоремы 2

Основная теорема вытекает из теоремы 3 и следующего утверждения.

Теорема 4. *Имеет место включение*

$$\sigma_{\text{III}}(A) \supseteq \sigma_T(A).$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Пусть ограниченный оператор $B: X \rightarrow X$ коммутирует с каждым из операторов $T_k(t)$. Тогда B отображает линейное многообразие $D(A_{i_1} \cdots A_{i_m})$ в себя для любого набора индексов $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ и*

$$BA_{i_1} \cdots A_{i_m} x = A_{i_1} BA_{i_2} \cdots A_{i_m} x = \cdots = A_{i_1} \cdots A_{i_m} Bx$$

для любого $x \in D(A_{i_1} \cdots A_{i_m})$.

Доказательство. Оператор B коммутирует с каждым из генераторов A_k , откуда следует справедливость утверждения леммы при $m = 1$. Предположим теперь, что $m \geq 2$, и покажем, что $BA_{i_2} \cdots A_{i_m} x \in D(A_{i_1})$ при любом $x \in D(A_{i_1} \cdots A_{i_m})$ и

$$BA_{i_1} \cdots A_{i_m} x = A_{i_1} BA_{i_2} \cdots A_{i_m} x.$$

Для доказательства достаточно заметить, что для вектора $y := A_{i_2} \cdots A_{i_m} x$, принадлежащего $D(A_{i_1})$,

$$\frac{T_{i_1}(h)By - By}{h} = B \frac{T_{i_1}(h)y - y}{h},$$

причем правая часть стремится к $BA_{i_1}y$ при $h \rightarrow 0$.

Применяя теперь доказанное утверждение к $BA_{i_2} \cdots A_{i_m} x$ и т. д. (и учитывая коммутирование B с A_k), получаем требуемое. □

Лемма 3. *Пусть ограниченный оператор $B: X \rightarrow X$ коммутирует с каждым из операторов A_j , $j = 1, \dots, n$, и $\text{Im}(B) \subseteq D(A_k)$ для некоторого k . Тогда для любого набора индексов $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$ справедливо включение*

$$\begin{aligned} & D(A_{j_1} \cdots A_{j_m}) \\ & \subseteq D(A_k A_{j_1} \cdots A_{j_m} B) \cap D(A_{j_1} A_k A_{j_2} \cdots A_{j_m} B) \cap \cdots \cap D(A_{j_1} \cdots A_{j_m} A_k B). \end{aligned}$$

При этом, если $x \in D(A_{j_1} \cdots A_{j_m})$, то

$$A_k A_{j_1} \cdots A_{j_m} Bx = A_{j_1} A_k A_{j_2} \cdots A_{j_m} Bx = \cdots = A_{j_1} \cdots A_{j_m} A_k Bx.$$

Доказательство леммы проведем индукцией по m .

Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Пусть $x \in D(A_{j_1})$. Тогда $A_{j_1} Bx = BA_{j_1} x \in D(A_k)$, т. е. $x \in D(A_k A_{j_1} B)$. Кроме того, $Bx \in D(A_k A_{j_1}) \cap D(A_k) \subseteq D(A_{j_1} A_k)$ по лемме 1. Значит, $x \in D(A_{j_1} A_k B)$ и по той же лемме $A_{j_1} A_k Bx = A_k A_{j_1} Bx$.

Переходя к случаю $m = 2$, предположим, что $x \in D(A_{j_1} A_{j_2})$. Тогда по лемме 2 $A_k B A_{j_1} A_{j_2} x = A_k A_{j_1} B A_{j_2} x = A_k A_{j_1} A_{j_2} Bx$, причем все значения существуют.

Следовательно, $x \in D(A_k A_{j_1} A_{j_2} B)$ и, кроме того, $BA_{j_2}x \in D(A_k A_{j_1}) \cap D(A_k)$. Поэтому по лемме 1 $A_{j_2}Bx = BA_{j_2}x \in D(A_{j_1} A_k)$, т. е. $x \in D(A_{j_1} A_k A_{j_2} B)$. Снова применяя лемму 1, выводим отсюда, что $Bx \in D(A_k A_{j_2}) \cap D(A_k) \subseteq D(A_{j_2} A_k)$

и $A_k A_{j_2} Bx = A_{j_2} A_k Bx$. А так как существует $A_{j_1} A_k A_{j_2} Bx$, то существует и $A_{j_1} A_{j_2} A_k Bx$ и справедливы равенства

$$A_k A_{j_1} A_{j_2} Bx = A_{j_1} A_k A_{j_2} Bx = A_{j_1} A_{j_2} A_k Bx,$$

что доказывает наше утверждение при $m = 2$.

Предположим теперь, что утверждение леммы верно при некотором $m \geq 2$, а $x \in D(A_{j_1} \cdots A_{j_{m+1}})$. Тогда $x_1 := A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}}x \in D(A_{j_1} A_{j_2})$ и в силу рассмотренного выше случая $m = 2$

$$A_k A_{j_1} A_{j_2} Bx_1 = A_{j_1} A_k A_{j_2} Bx_1 = A_{j_1} A_{j_2} A_k Bx_1, \quad (10)$$

причем все значения существуют. Но по лемме 2 $Bx_1 = A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}} Bx$. С учетом (10) отсюда следует, что

$$A_k A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_{m+1}} Bx = A_{j_1} A_k A_{j_2} \cdots A_{j_{m+1}} Bx = A_{j_1} A_{j_2} A_k A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}} Bx \quad (11)$$

и все значения существуют. А так как $x \in D(A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}})$, то по индуктивному предположению

$$A_k A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}} Bx = A_{j_3} A_k \cdots A_{j_{m+1}} Bx = \cdots = A_{j_3} \cdots A_{j_{m+1}} A_k Bx,$$

где все значения также существуют. Подстановка этих равенств в (11) завершает индуктивный переход. $\square$

Доказательство теоремы 4. Достаточно показать, что обобщенный комплекс Кошуля $\mathcal{K}(X, \lambda - A)$ точен для любого $\lambda \in \rho_{\text{ш}}(A)$. Пусть B_k — операторы в X , фигурирующие в определении 7. Как и для случая ограниченных операторов (см. [20, гл. 1, предложение 2]), положим

$$s_m: X_m \rightarrow X_{m+1}: x \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} \mapsto - \sum_{k=1}^n B_k x \otimes e_k \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}, \quad x \in X.$$

Точность комплекса $\mathcal{K}(X, \lambda - A)$ будет следовать из справедливости равенств

$$d_m(\lambda - A)s_m y + s_{m-1}d_{m-1}(\lambda - A)y = y \quad (m = 1, \dots, n)$$

при всех $y \in D(d_{m-1}(A))$. Формально они проверяются непосредственно, однако, в отличие от случая ограниченных операторов, мы должны убедиться еще в том, что $s_m y \in D(d_m(A))$ (напомним, что $D(d_m(\lambda - A)) = D(d_m(A))$). Но если $y = x \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $x \in D(A_{j_1} \cdots A_{j_m})$ для любой перестановки $(j_1, \dots, j_m)$ мультииндекса $(i_1, \dots, i_m)$, то по лемме 3 для любого $k = 1, \dots, n$

$$B_k x \in D(A_k A_{j_1} \cdots A_{j_m}) \cap D(A_{j_1} A_k A_{j_2} \cdots A_{j_m}) \cap \cdots \cap D(A_{j_1} \cdots A_{j_m} A_k),$$

т. е. $B_k x \in D(A_{l_1} \cdots A_{l_{m+1}})$ для любой перестановки $(l_1, \dots, l_{m+1})$ мультииндекса $(k, i_1, \dots, i_m)$. Последнее и означает, что $s_m y \in D(d_m(A))$. $\square$

Отметим, что включение в теореме 4 может быть строгим даже в случае ограниченных операторов (см. [21, теорема 4.1]).

Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Kishimoto, D. Robinson, *Subordinate semigroups and order properties*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **31**:1 (1981), 59–76.
- [2] Ch. Berg, K. Boyadzhiev, R. deLaubenfels, *Generation of generators of holomorphic semigroups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **55**:2 (1993), 246–269.
- [3] A. S. Carasso, T. Kato, *On subordinated holomorphic semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **327**:2 (1991), 867–878.
- [4] А. Р. Миротин, *О $\mathcal{T}$ -исчислении генераторов C_0 -полугрупп*, Сиб. матем. ж., **39**:3 (1998), 571–582.
- [5] R. Shilling, R. Song, Z. Vondraček, *Bernstein Functions. Theory and Applications*, de Greyter, Berlin–New York, 2010.
- [6] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.
- [7] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [8] D. Applebaum, *Levy processes—from probability to finance and quantum groups*, Notices Amer. Math. Soc., **51**:11 (2004), 1336–1347.
- [9] А. Р. Миротин, *Действие функций класса Шенберга $\mathcal{T}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры*, Матем. заметки, **61**:4 (1997), 630–633.
- [10] А. Р. Миротин, *Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры, II*, Матем. заметки, **64**:3 (1998), 423–430.
- [11] А. Р. Миротин, *Многомерное $\mathcal{T}$ -исчисление от генераторов C_0 -полугрупп*, Алгебра и анализ, **11**:2 (1999), 142–170.
- [12] Ch. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Graduate Texts in Math., vol. 100, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1984.
- [13] А. Р. Миротин, *О многомерном функциональном исчислении Бохнера–Филлипса*, Проблемы физики, математики и техники, **1**:1 (2009), 63–66.
- [14] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.
- [15] Дж. Голдстейн, *Полугруппы линейных операторов и их приложения*, Высшая школа, Киев, 1989.
- [16] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986.
- [17] Z. Słodkowski, W. Zelazko, *On joint spectra of commuting families of operators*, Studia Math., **50** (1974), 127–148.
- [18] Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент и др., *Однопараметрические полугруппы*, Мир, М., 1992.
- [19] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [20] А. Я. Хелемский, *Гомологические методы в голоморфном исчислении от нескольких операторов в банаховом пространстве, по Тейлору*, УМН, **36**:1(217) (1981), 127–172.
- [21] J. L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Funct. Anal., **6**:2 (1970), 172–191.