Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Бунькова, В. М. Бухштабер, Полиномиальные динамические системы и обыкновенные дифференциальные уравнения, ассоциированные с уравнением теплопроводности, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 16–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:07:14

Полиномиальные динамические системы и обыкновенные дифференциальные уравнения, ассоциированные с уравнением теплопроводности*

© 2012. Е. Ю. БУНЬКОВА, В. М. БУХШТАБЕР

Рассматриваются однородные полиномиальные динамические системы в n -мерном пространстве. Каждой такой системе наша конструкция сопоставляет нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение и алгоритм построения решения уравнения теплопроводности. При этом классическое решение, задаваемое функцией Гаусса, соответствует случаю $n = 0$, а решения, определенные эллиптической тета-функцией, приводят к уравнению Шази-3 и соответствуют случаю $n = 2$. Дается явное описание семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в нашем подходе, а также связь с широко известными квадратичными динамическими системами Дарбу–Альфана и их обобщениями.

§1. Введение

Эллиптическая тета-функция $\theta_1(z, \tau)$ является решением уравнения теплопроводности. Используя анзац

$$\phi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)}\sigma(z; g_2(t), g_3(t)),$$

где $\phi(z, t) = \theta_1(z, 2\pi it)$ и $\sigma(z; g_2, g_3)$ — сигма-функция Вейерштрасса с параметрами g_2, g_3 , из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

мы получаем полиномиальную динамическую систему на функции $g_2(t), g_3(t)$ и $h(t)$. Решение $h(t)$ этой системы является решением уравнения Шази-3, а функции $g_2(t), g_3(t)$ являются дифференциальными полиномами от $h(t)$. Таким образом, мы получаем семейство решений уравнения теплопроводности, параметризованное начальными данными задачи Коши для уравнения Шази-3 (см. детали в [1]).

Данная работа посвящена построению и изучению последовательности семейств решений уравнения теплопроводности. Мы получаем семейства решений уравнения теплопроводности, параметризованные полиномиальными динамическими системами в n -мерном пространстве, $n = 0, 1, \dots$, и начальными данными задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения. В случае $n = 2$ мы получаем семейство, включающее семейство, описанное выше.

Содержание работы: В §2 собраны необходимые факты о классическом одномомерном уравнении теплопроводности, в частности, описано действие группы

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00197-а, 11-01-12067-офи-м-2011, и гранта правительства РФ 2010-220-01-077, договор 11.G34.31.0005.

$SL(2, \mathbb{C})$ на пространстве решений этого уравнения. В §3 изучается анзац

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)}\Phi(z; \mathbf{x}(t)) \quad (1.1)$$

для решений уравнения теплопроводности, где коэффициенты ряда по z функции $\Phi(z; \mathbf{x}(t))$ являются полиномами от $\mathbf{x}(t) = (x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$. Этот анзац замкнут относительно действия группы $SL(2, \mathbb{C})$. Мы представляем конструкцию, которая сводит задачу решения уравнения теплопроводности в этом анзаце к решению однородной полиномиальной динамической системы. В §4 мы сводим однородные полиномиальные динамические системы из предыдущего параграфа к обыкновенным дифференциальным уравнениям специального типа. Таким образом, для любого n мы получаем семейство решений вида (1.1) уравнения теплопроводности. Каждое из этих решений задается конечномерным числовым вектором. В §5 для каждого n мы описываем класс обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в предыдущем параграфе, и связь между этими уравнениями для разных n . В §6 мы изучаем рекуррентные формулы на коэффициенты ряда по z функции $\Phi(z; \mathbf{x}(t))$. В §7 введена последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n , общие решения которых задаются рациональными функциями. Получены условия, необходимые для того, чтобы эти уравнения принадлежали к классу, описанному в §5. В §8 мы рассматриваем частные случаи $n = 0, 1, 2, 3, 4$. В центре нашего внимания дифференциальные уравнения со свойством Пенлеве. В §9 вводится понятие алгебраически интегрируемой симметричной квадратичной динамической системы, а также более общий анзац для решений уравнения теплопроводности, такой, что каждое решение такой системы в общем положении определяет решение уравнения теплопроводности в этом анзаце.

Авторы благодарны Р. Конту, Ж.-К. Замбрини и Э. Рису за полезные обсуждения результатов работы.

§2. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

является линейным относительно функции ψ и инвариантным относительно сдвигов аргумента:

- для решений ψ_1 и ψ_2 функция $\psi_1 + \psi_2$ также является решением,
- для решения $\psi(z, t)$ функция $\psi(z + z_0, t + t_0)$ является решением при любых постоянных z_0 и t_0 , и, следовательно, функции $\frac{\partial}{\partial z}\psi(z, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}\psi(z, t)$ также являются решениями.

Значит, мы можем сосредоточиться на следующей задаче: найти решения уравнения (2.1), которые в окрестности точки $(0, t)$ задаются рядом

$$\psi(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t) \frac{z^k}{k!}. \quad (2.2)$$

В этом случае из уравнения (2.1) следует, что ряд полностью определяется начальными данными $\psi(0, t) = \psi_0(t)$, $\psi'(0, t) = \psi_1(t)$. Более того, для решений вида (2.2) уравнение становится эквивалентным системе $\psi_{k+2}(t) = 2\psi'_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, любое решение вида (2.2) можно представить в виде

суммы четного решения с начальными условиями $\psi(0, t) = \psi_0(t)$, $\psi'(0, t) = 0$ и нечетного решения с начальными условиями $\psi(0, t) = 0$, $\psi'(0, t) = \psi_1(t)$.

Рассмотрим функцию вида

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2} \phi(z, t), \quad (2.3)$$

где $\phi(z, t)$ — полином от z .

Лемма 2.1. *Функция $\psi(z, t)$ вида (2.3) является решением уравнения теплопроводности (2.1) тогда и только тогда, когда она является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами функции Гаусса*

$$\frac{1}{\sqrt{t-c}} \exp\left(\frac{-z^2}{2(t-c)}\right) \quad (2.4)$$

и ее производных по z . Здесь c — константа.

Доказательство. Пусть $\phi(z, t)$ — полином степени n . Положим $\phi(z, t) = \sum_{k=0}^n \phi_k(t)z^k$, где $\phi_n(t) \neq 0$. Подставляя (2.3) в (2.1) и деля на $e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2}$, получаем равенство между двумя полиномами от z . В левой части равенства коэффициент при z^{n+2} равен $-\frac{1}{2}h'\phi_n$, тогда как в правой части он равен $\frac{1}{2}h^2\phi_n$. Следовательно, $h(t) = \frac{1}{t-c}$ для некоторой постоянной c . Теперь в левой части равенства коэффициент при z^n равен $\phi'_n(t)$, тогда как в правой части он равен $-(n+1/2)h(t)\phi_n(t)$. Следовательно, $\phi'_n(t) = c_n(t-c)^{-n-1/2}$ для постоянной $c_n \neq 0$. Решением уравнения с таким коэффициентом $\phi_n(t)$ является функция $\psi_n(z, t) = (-1)^n c_n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{\sqrt{t-c}} \exp\left(\frac{-z^2}{2(t-c)}\right) \right)$. Остальные коэффициенты решения связаны соотношениями

$$\phi_{k+2} = \frac{2}{(k+2)(k+1)} \left(\phi'_k(t) + \frac{(2k+1)}{2} h(t) \phi_k(t) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

определяющими ϕ_k однозначно по ϕ_{k+2} с точностью до прибавления решения уравнения $\phi'_k(t) = -\frac{1}{2}(2k+1)h(t)\phi_k(t)$. Таким образом, для полинома $\phi(z, t)$ соответствующим ему решением является сумма функций $\psi_k(z, t)$ с постоянными коэффициентами, а функции $\psi_k(z, t)$ с точностью до постоянных множителей являются производными функции (2.4). $\square$

Группа симметрий. Детальное описание алгебры Ли группы преобразований уравнения теплопроводности и однопараметрических подгрупп, соответствующих базису в этой алгебре Ли, можно найти в [2]. Нам потребуется действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на пространстве решений уравнения теплопроводности.

Пусть $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ и

$$\Gamma(M)\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{ct+d}} \exp\left(\frac{-cz^2}{2(ct+d)}\right) \psi\left(\frac{z}{ct+d}, \frac{at+b}{ct+d}\right). \quad (2.5)$$

Например, $\Gamma(M)1$ — классическое решение (2.4) уравнения теплопроводности.

Лемма 2.2. *Пусть $\psi(z, t)$ — решение уравнения теплопроводности (2.1). Тогда $\Gamma(M)\psi(z, t)$ — также его решение. Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на пространстве решений уравнения теплопроводности.*

Доказательство получается непосредственной подстановкой (2.5) в (2.1) с использованием соотношения $ad - bc = 1$.

§3. Динамические системы, ассоциированные с уравнением теплопроводности

Четную (нечетную) регулярную в $z = 0$ ненулевую функцию $\psi(z, t)$ можно представить в виде

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)} z^{2s} \phi(z, t), \quad (3.1)$$

где s — целое неотрицательное число, а четную (нечетную) функцию $\phi(z, t)$ в окрестности точки $z = 0$ можно представить в виде ряда

$$\phi(z, t) = z^\delta + \sum_{k \geq 2} \phi_k(t) \frac{z^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!}, \quad (3.2)$$

где $\delta = 0$ (соответственно $\delta = 1$). Заметим, что такое представление однозначно; следовательно, для любой функции $\psi(z, t)$ можно говорить о соответствующих функциях $h(t)$, $r(t)$, $\phi(z, t)$. Из §2 следует, что если функция ψ является решением уравнения теплопроводности, то $s = 0$. Далее везде $\delta = 0$ или $\delta = 1$.

Рассмотрим функцию $\psi(z, t)$ вида (3.1) с $s = 0$. Обозначим через $\gamma_1(M)h(t)$ и $\gamma_2(M)\exp(r(t))$ функции, соответствующие функциям $h(t)$ и $\exp(r(t))$ в представлении вида (3.1) функции $\Gamma(M)\psi(z, t)$.

Лемма 3.1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \gamma_1(M)h(t) &= \frac{1}{(ct+d)^2} h\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) + \frac{c}{(ct+d)}, \\ \gamma_2(M)\exp(r(t)) &= \frac{1}{(ct+d)^\delta \sqrt{ct+d}} \exp\left(r\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для функции $\psi(z, t)$ вида (3.1) с $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(M)\psi(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{ct+d}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(ct+d)^2} h\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) + \frac{c}{(ct+d)}\right) z^2 \right. \\ &\quad \left. + r\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)\right) \phi\left(\frac{z}{ct+d}, \frac{at+b}{ct+d}\right) \end{aligned}$$

и $\phi\left(\frac{z}{ct+d}, \frac{at+b}{ct+d}\right) = \frac{1}{(ct+d)^\delta} \hat{\phi}(z, t)$, где $\hat{\phi}(z, t) = z^\delta + \sum_{k \geq 2} \hat{\phi}_k(t) \frac{z^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!}$ для $\hat{\phi}_k(t) = \frac{1}{(ct+d)^{2k}} \phi_k\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)$. Поскольку функция $\hat{\phi}(z, t)$ имеет вид (3.2), действие на $h(t)$ и $e^{r(t)}$, индуцированное действием группы $\Gamma(M)$ на $\psi(z, t)$, имеет указанный в лемме вид. $\square$

Общая конструкция.

Теорема 3.2. *Функция $\psi(z, t)$ вида (3.1) является решением уравнения теплопроводности (2.1) тогда и только тогда, когда $s = 0$, $r' = -(\delta + 1/2)h$ и функция $\phi(z, t)$ является решением уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \mathcal{H}_2 \phi - h \mathcal{H}_0 \phi, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{H}_2 \phi = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + uz^2 \right) \phi, \quad u = \frac{1}{2} (h' + h^2), \quad \mathcal{H}_0 \phi = \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \delta \right) \phi.$$

Доказательство. Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.1) и представляя правую и левую части уравнения в виде ряда по z , с точностью до элементов порядка $2s + \delta$ получаем $(2s + \delta)(2s + \delta - 1)e^{r(t)}z^{2s+\delta-2} + (z^{2s+\delta}) = 0$; следовательно, $s = 0$. С точностью до элементов порядка $\delta + 2$ имеем $((\delta + \frac{1}{2})h(t) + r'(t))e^{r(t)}z^\delta + (z^{\delta+2}) = 0$; следовательно, $r'(t) = -(\delta + \frac{1}{2})h(t)$. Последнее утверждение теоремы получается подстановкой (3.1) в (2.1) и делением на $e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)}$. $\square$

Положим $\mathbf{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$. Мы будем считать, что переменные x_q имеют градуировку $-4q$, а все постоянные (т. е. параметры, не зависящие от t , z и $\mathbf{x}$) имеют градуировку 0, если не оговорено противное. Положим

$$\Phi(z; \mathbf{x}) = z^\delta + \sum_{k \geq 2} \Phi_k(\mathbf{x}) \frac{z^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!}, \quad (3.4)$$

где z — переменная градуировки 2, не зависящая от $\mathbf{x}$, и $\Phi_k(\mathbf{x})$ — однородные полиномы градуировки $-4k$. Например, $\Phi_2(\mathbf{x}) = c_2 x_2$ и $\Phi_3(\mathbf{x}) = c_3 x_3$ для некоторых констант c_2 и c_3 . Таким образом, $\Phi(z; \mathbf{x})$ — однородная функция градуировки 2δ . Заметим, что функции, однородные относительно некоторой градуировки, часто называют квазиоднородными. Мы не будем различать эти понятия, и все функции с такими свойствами будем называть однородными.

Из однородности функции $\Phi(z; \mathbf{x})$ следует соотношение $\mathcal{H}_0 \Phi = L_0 \Phi$, где $L_0 = \sum_{k=2}^{n+1} 2k x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ с координатами $(x_2, \dots, x_{n+1})$ набор однородных полиномов $p_q(\mathbf{x})$ с $\deg p_q = -4q$, $q = 3, \dots, n+2$, и введем однородную полиномиальную динамическую систему

$$\frac{dx_k}{d\tau} = p_{k+1}(\mathbf{x}), \quad k = 2, \dots, n+1, \quad \deg \tau = 4. \quad (3.5)$$

Положим $L_2 \Phi = \sum p_{k+1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi$. Нам потребуются следующие результаты:

Теорема 3.3. *Функция $\Phi(z; \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{H}_2 \Phi = L_2 \Phi \quad (3.6)$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -4(1 + 2\delta)u, & \Phi_3 &= 2 \frac{d}{d\tau} \Phi_2, \\ \Phi_{k+1} &= 2 \frac{d}{d\tau} \Phi_k + \frac{(2k + \delta - 1)(2k + \delta)}{2(1 + 2\delta)} \Phi_2 \Phi_{k-1}, & k &> 2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теорема доказывается непосредственно подстановкой (3.4) в (3.6).

Следствие 3.4. *В условиях теоремы для постоянной c , такой, что $\Phi_2(\mathbf{x}) = cx_2$, имеет место равенство $u = -\frac{c}{4(1+2\delta)}x_2$.*

Напомним, что функция $f(\mathbf{x})$ называется невырожденной, если для вектор-функции $\phi(\mathbf{x})$ из равенства $\langle \phi(\mathbf{x}), \text{grad } f(\mathbf{x}) \rangle \equiv 0$ следует, что $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Теорема 3.5. *Пусть $\Phi(z; \mathbf{x})$ — невырожденная функция вида (3.4), коэффициенты которой удовлетворяют равенствам (3.7). Функция*

$$\phi(z, t) = \Phi(z; x_2(t), \dots, x_{n+1}(t)) \quad (3.8)$$

является решением уравнения (3.3) тогда и только тогда, когда вектор-функция $\mathbf{x}(t) = (x_2(t), \dots, x_{n+1}(t))$ удовлетворяет динамической системе

$$\frac{d}{dt}x_k(t) = p_{k+1}(\mathbf{x}(t)) - 2kh(t)x_k(t), \quad k = 2, \dots, n+1.$$

Доказательство. После подстановки в него равенства (3.8) уравнение (3.3) принимает вид $\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} - p_{k+1}(x_2, \dots, x_{n+1}) + 2khx_k \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0$. Условие невырожденности функции Φ завершает доказательство. $\square$

Суммируем результаты этого раздела. Пусть $p_k(\mathbf{x})$, $k = 3, \dots, n+2$, — однородные полиномы от $\mathbf{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$, $\deg x_q = -4q$, $\deg p_k = -4k$, $\deg t = 4$, $\deg h = -4$, $\deg r = 0$, c — константа, $\Phi(z; \mathbf{x})$ — однородная функция вида (3.4).

Теорема 3.6 (ключевая теорема). *Из любых двух из трех следующих условий вытекает третье:*

1) функция

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)}\Phi(z; \mathbf{x}(t)) \quad (3.9)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1);

2) коэффициенты функции $\Phi(z; \mathbf{x})$ задаются соотношением

$$\Phi_q = 2 \sum_{k=2}^{n+1} p_{k+1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{q-1} + \frac{(2q + \delta - 3)(2q + \delta - 2)}{2(1 + 2\delta)} \Phi_2 \Phi_{q-2}, \quad q = 4, 5, 6, \dots,$$

с начальными условиями $\Phi_2(\mathbf{x}) = cx_2$, $\Phi_3 = 2cr_3(\mathbf{x})$;

3) набор функций $(r(t), h(t), \mathbf{x}(t))$ удовлетворяет однородной полиномиальной динамической системе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, & \frac{d}{dt}h &= -h^2 - \frac{c}{2(1+2\delta)}x_2, \\ \frac{d}{dt}x_k &= p_{k+1}(\mathbf{x}) - 2khx_k, & k &= 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Действие Γ группы $SL(2, \mathbb{C})$ на решениях уравнения теплопроводности описано выше.

Следствие 3.7. Пусть $\psi(z, t)$ — решение уравнения теплопроводности вида (3.9). Тогда функция

$$\Gamma(M)\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}\widehat{h}(t)z^2 + \widehat{r}(t)}\Phi(z; \widehat{\mathbf{x}}(t)),$$

где $\widehat{h}(t) = \gamma_1(M)h(t)$, $e^{\widehat{r}(t)} = \gamma_2(M)e^{r(t)}$ и $\widehat{x}_k(t) = \frac{x_k(t)}{(ct+d)^{2k}}$, является решением того же вида.

§4. Редукция к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Для набора однородных полиномов $p_k(\mathbf{x})$ с $\deg p_k = -4k$, $k = 3, \dots, n+2$, из градуировки следует, что для любого $k \leq n$ полином $p_k(\mathbf{x})$ не зависит от $x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$. Далее полиномы $p_k(x_2, \dots, x_{n+1})$, не зависящие от $x_s, \dots, x_{n+1}$, мы также обозначаем через $p_k(x_2, \dots, x_{s-1})$.

Лемма 4.1. *Группа полиномиальных преобразований вида*

$$X_2 = c_2x_2, \quad X_k = c_kx_k + q_k(x_2, \dots, x_{k-1}), \quad k = 3, \dots, n+1, \quad (4.1)$$

где $c_k \neq 0$ — постоянные и $q_k(x_2, \dots, x_k)$ — однородные полиномы, $\deg q_k = -4k$, действует на пространстве однородных полиномиальных динамических систем вида (3.5). Это действие переводит систему (3.5) в систему

$$\frac{d}{d\tau} X_k = P_{k+1}(X_2, \dots, X_{n+1}), \quad k = 3, \dots, n+2,$$

где

$$P_{k+1}(X_2, \dots, X_{n+1}) = c_k p_{k+1}(x_2, \dots, x_{n+1}) - \frac{d}{d\tau} q_k(x_2, \dots, x_{k-1}). \quad (4.2)$$

Замечание 4.2. Выражение $\frac{d}{d\tau} q_k(x_2, \dots, x_{k-1})$ является сокращением выражения $\sum_q \frac{\partial}{\partial x_q} q_k(x_2, \dots, x_{k-1}) p_{q+1}(x_2, \dots, x_{n+1})$.

Лемма доказывается прямой подстановкой.

Лемма 4.3. Группа полиномиальных преобразований (4.1) действует на динамических системах вида (3.10) и переводит решение $(r(t), h(t), \mathbf{x}(t))$ такой системы в решение $(r(t), h(t), X_2(t), \dots, X_{n+1}(t))$ динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right) h, & \frac{d}{dt} h &= -h^2 - \frac{c}{2c_2(1+2\delta)} X_2, \\ \frac{d}{dt} X_k &= P_{k+1}(X_2, \dots, X_{n+1}) - 2khX_k, & k &= 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Доказательство. Каждое преобразование (4.1) можно представить как композицию преобразований вида

$$X_k = c_k x_k, \quad c_k \neq 0, \quad k = 2, \dots, n+1, \quad (4.3)$$

и

$$X_k = x_k, \quad k \neq s, \quad X_s = x_s + a_0 x_2^{j_2} \cdots x_{s-2}^{j_{s-2}}, \quad \text{где} \quad \sum_{m=2}^{s-2} m j_m = s, \quad a_0 = \text{const}. \quad (4.4)$$

При этом (4.3) переводит (3.10) в

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right) h, & \frac{d}{dt} h &= -h^2 - \frac{c}{2(1+2\delta)c_2} X_2, \\ \frac{d}{dt} X_k &= c_k p_{k+1}\left(\frac{X_2}{c_2}, \dots, \frac{X_{n+1}}{c_{n+1}}\right) - 2khX_k, & k &= 2, \dots, n+1, \end{aligned}$$

и (4.4) переводит (3.10) в

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right) h, & \frac{d}{dt} h &= -h^2 - \frac{c}{2(1+2\delta)} X_2, \\ \frac{d}{dt} X_k &= P_{k+1}(X_2, \dots, X_{n+1}) - 2khX_k, & k &= 2, \dots, n+1, \end{aligned}$$

где $P_{k+1}(X_2, \dots, X_{n+1})$ задается выражением (4.2). Второе утверждение леммы имеет место, так как из (3.10) следует, что функция $F = x_2^{j_2} \cdots x_{s-2}^{j_{s-2}}$, где $\sum_{m=2}^{s-2} m j_m = s$, удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt} F = \sum p_{k+1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} F + 2shF$. $\square$

Лемма 4.4. Если $p_s(\mathbf{x})$ не зависит от x_s для некоторого s , то набор $(r(t), h(t), x_2(t), \dots, x_{s-1}(t))$ является решением системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, & \frac{d}{dt}h &= -h^2 - \frac{c}{2(1+2\delta)}x_2, \\ \frac{d}{dt}x_k &= p_{k+1}(x_2, \dots, x_{s-1}) - 2khx_k, & k &= 2, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Это решение вместе с набором полиномов $p_k(x_2, \dots, x_{s-1})$, $k = 3, \dots, s$, задает решение уравнения теплопроводности, совпадающее с описанным выше решением (3.9).

Таким образом, в условиях леммы решение уравнения теплопроводности не зависит от полиномов $p_{s+1}, \dots, p_{n+2}$.

Доказательство. Если $p_s(x_2, \dots, x_{n+1})$ не зависит от x_s , то все $p_k(x_2, \dots, x_{n+1})$, $k = 3, \dots, s$, не зависят от $x_s, \dots, x_{n+1}$ в силу градуировки и, следовательно, система (4.5) является подсистемой системы (3.10), зависящей только от переменных $h(t), r(t), x_2(t), \dots, x_{s-1}(t)$. Функции Φ_k суть функции от $(h(t), r(t), x_2(t), \dots, x_{s-1}(t))$, так как $\Phi_2, p_3, \dots, p_s$ суть такие функции, а Φ_k задаются рекуррентно формулой (3.7). Таким образом, решение (3.9) уравнения теплопроводности не зависит от $x_s(t), \dots, x_{n+1}(t)$ и задается лишь решением системы (4.5). $\square$

Полиномиальная динамическая система (3.5) называется *редуцированной*, если она задается набором

$$p_k(\mathbf{x}) = x_k, \quad k = 3, \dots, n+1, \quad p_{n+2}(\mathbf{x}) = P_n(\mathbf{x}), \quad (4.6)$$

где $P_n(\mathbf{x})$ — однородный полином градуировки $-4(n+2)$.

Лемма 4.5. Каждое решение вида (3.9) уравнения теплопроводности можно получить, используя в нашем построении редуцированную динамическую систему (4.6) и решение системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, & \frac{d}{dt}h &= -h^2 + x_2, \\ \frac{d}{dt}x_k &= x_{k+1} - 2khx_k, & k &= 2, \dots, n, \\ \frac{d}{dt}x_{n+1} &= P_n(x_2, \dots, x_{n+1}) - 2(n+1)hx_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство. Начнем с набора однородных полиномов $p_k(x_2, \dots, x_{n+1})$, $k = 3, \dots, n+2$. Согласно лемме 4.4, можно предполагать, что $p_k(x_2, \dots, x_{n+1})$ существенно зависят от x_k для $k = 3, \dots, n+1$; следовательно, в (4.1) можно положить $X_2 = -\frac{c}{2(1+2\delta)}x_2$ и $X_k = c_{k-1}p_k(x_2, \dots, x_{n+1}) + \frac{d}{d\tau}q_{k-1}(x_2, \dots, x_{k-1})$ для $k = 3, \dots, n+1$, где c_{k-1} и q_{k-1} определены в (4.1). Такое преобразование приводит динамическую систему к требуемому виду. $\square$

Система (4.7) задается числом n и полиномом $P_n(\mathbf{x})$. В этой системе r определяется функцией $h(t)$ с точностью до постоянной интегрирования r_0 соотношением $r' = -(\delta + \frac{1}{2})h$, а $x_2, \dots, x_{n+1}$ определены равенствами

$$x_2 = h' + h^2, \quad x_k = x'_{k-1} + 2(k-1)hx_{k-1}, \quad k = 3, \dots, n+1. \quad (4.8)$$

Подставляя x_k как функцию от $h(t)$ в $\frac{d}{dt}x_{n+1} = P_n(x_2, \dots, x_{n+1}) - 2(n+1)hx_{n+1}$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = 0 \quad (4.9)$$

порядка $n+1$ на $h(t)$. Это уравнение однородно относительно градуировки $\deg h = -4$, $\deg t = 4$.

Суммируем результаты этого параграфа.

Теорема 4.6. Каждое решение вида (3.9) уравнения теплопроводности задается набором (n, P_n, h, r_0) , где n — натуральное число, P_n — однородный полином $P_n(\mathbf{x})$ градуировки $-4(n+2)$, h — решение $h(t)$ уравнения $\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = 0$, r_0 — константа.

Следствие 4.7. Каждое решение вида (3.9) уравнения теплопроводности задается конечномерным числовым вектором $(n, \mathbf{P}_n, \mathbf{h}_n, r_0)$, где $\mathbf{P}_n$ — вектор коэффициентов полинома $P_n(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_n$ — вектор начальных данных задачи Коши уравнения (4.9).

§5. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ассоциированные с уравнением теплопроводности

Пусть $P_n(\mathbf{y})$ — полином n -мерного аргумента, такой, что для градуированного вектора $\mathbf{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$ полином $P_n(\mathbf{x})$ является однородным градуировки $-4(n+2)$.

Обозначим через V_n линейное векторное пространство таких полиномов.

Лемма 5.1. Имеем $\dim V_n = p(n+2) - p(n+1) - 1$, где $p(n)$ — число разбиений числа n .

Доказательство. Размерность пространства однородных полиномов градуировки $-4(n+1)$ от переменных $x_1, \dots, x_{n+1}$ с $\deg x_k = -4k$ равна $p(n+1)$. Следовательно, $p(n+2) - p(n+1)$ — размерность пространства полиномов от $x_1, \dots, x_{n+2}$ градуировки $-4(n+2)$, которые нельзя представить в виде $x_1 P$, где P — полином градуировки $-4(n+1)$. Учитывая полиномы $p(x_1, \dots, x_{n+2}) = x_1 P$, получаем требуемую размерность. $\square$

Рассмотрим уравнение (4.9). В случае $P_n \equiv 0$ положим $\mathcal{D}_{0, n+1}(h) = \mathcal{D}_{n+1}(h)$.

Теорема 5.2. Имеем $\mathcal{D}_1(h) = (\frac{d}{dt} + h)h$ и $\mathcal{D}_n(h) = (\frac{d}{dt} + 2nh)\mathcal{D}_{n-1}(h)$ для каждого $n > 1$.

Доказательство. Уравнение $\mathcal{D}_{n+1} = 0$ получается из $\frac{dx_{n+1}}{dt} = -2(n+1)hx_{n+1}$ подстановкой (4.8). Для $n = 0$ подстановку делать не нужно и уравнение имеет вид $h' + h^2 = 0$. Переход от $\mathcal{D}_{n+1}$ к $\mathcal{D}_{n+2}$ задается подстановкой $x_{n+2} = x'_{n+1} + 2(n+1)hx_{n+1}$ в $\frac{dx_{n+2}}{dt} = -2(n+2)hx_{n+2}$, т. е. действием оператора $\frac{d}{dt} + 2(n+2)h$ на $\mathcal{D}_{n+1}(h)$. $\square$

Следствие 5.3. Для $n > 1$ имеем $\mathcal{D}_n(h) = h^{(n)} + n(n+1)h^{(n-1)}h + \dots + 2^{n-1}n!h^{n+1}$.

Теорема 5.4. Для $(n-1)$ -мерной вектор-функции $\mathcal{D}(h) = (\mathcal{D}_1(h), \dots, \mathcal{D}_{n-1}(h))$ и полинома $P_n(\mathbf{y}) \in V_n$ имеем $\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = \mathcal{D}_{n+1}(h) - P_n(\mathcal{D}(h))$.

Доказательство следует из (4.7) и использует теорему 5.2.

Положим $d = \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_k}$.

Теорема 5.5. Для полинома $P_n(\mathbf{x}) \in V_n$ имеем $\left(\frac{d}{dt} + 2(n+2)h\right) \mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = \mathcal{D}_{P_{n+1}, n+2}(h)$, где $P_{n+1}(\mathbf{y}) = dP_n(\mathbf{y})$.

Доказательство. Для каждого монома $\mathcal{D}_1(h)^{j_1} \dots \mathcal{D}_n(h)^{j_n}$ в $P_n(\mathcal{D}(h))$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} + 2(n+2)h\right) \mathcal{D}_1(h)^{j_1} \dots \mathcal{D}_n(h)^{j_n} \\ &= \sum_k j_k \mathcal{D}_1(h)^{j_1} \dots \mathcal{D}_k(h)^{j_k-1} \dots \mathcal{D}_n(h)^{j_n} \left(\frac{d}{dt} + 2(k+1)h\right) \mathcal{D}_k(h) \\ &= \sum_k j_k \mathcal{D}_1(h)^{j_1} \dots \mathcal{D}_k(h)^{j_k-1} \dots \mathcal{D}_n(h)^{j_n} \mathcal{D}_{k+1}(h). \end{aligned}$$

Следовательно, $\left(\frac{d}{dt} + 2(n+2)h\right) P_n(\mathcal{D}(h)) = (dP_n)(\mathcal{D}(h))$. $\square$

Для $n > 1$ мы получаем семейства уравнений, параметрами которых являются коэффициенты полиномов P_n . Для фиксированных значений этих параметров мы получаем специальные классы дифференциальных уравнений. Далее мы рассмотрим в деталях уравнения $\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = 0$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4$, и обсудим получающиеся классы уравнений.

Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение обладает *свойством Пенлеве*, если можно построить однозначное общее решение этого уравнения. Характеристикой уравнения со свойством Пенлеве является независимость его критических особых точек от начальных данных (см. [3]). Уравнения со свойством Пенлеве играют важную роль в современных физических задачах. Задачи, связанные с уравнением Шази-3, описаны в [4]–[6]. Действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на пространстве его решений изучено в [7]. Далее мы покажем что для некоторых параметров уравнение $\mathcal{D}_{P_{2,3}}(h) = 0$ совпадает с уравнениями Шази-3 и Шази-12 и, следовательно, обладает свойством Пенлеве.

Согласно следствию 3.7, группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на пространстве решений каждого дифференциального уравнения $\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = 0$.

§6. Дискретные дифференциальные уравнения, ассоциированные с уравнением теплопроводности

В нашей общей конструкции (§3) мы построили однородные функции $\Phi(z; \mathbf{x})$, удовлетворяющие уравнению (3.6) и, следовательно, являющиеся решением уравнения теплопроводности (см. теорему 3.6). В этом параграфе мы вернемся к проблеме построения таких функций.

Однородная функция $\Phi(z; \mathbf{x})$ (см. (3.4)) может быть представлена в виде

$$\Phi(z; \mathbf{x}) = z^\delta + \sum_{\|\mathbf{J}\| \geq 4} a(\mathbf{J}) \mathbf{x}^{\mathbf{J}} \frac{z^{\|\mathbf{J}\| + \delta}}{(\|\mathbf{J}\| + \delta)!}, \quad (6.1)$$

где, как и раньше, $\mathbf{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$, $\deg x_k = -4k$, $\deg z = 2$, $\mathbf{J} = (j_2, \dots, j_{n+1})$ — мультииндекс, $a(\mathbf{J})$ — постоянные коэффициенты и $\|\mathbf{J}\| = \sum_{k=2}^{n+1} 2kj_k$. То есть в обозначениях, приведенных выше, $\Phi_k(x) = \sum_{\|\mathbf{J}\|=2k} a(\mathbf{J}) \mathbf{x}^{\mathbf{J}}$.

Для редуцированной динамической системы (4.6) уравнение (3.6) имеет вид

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + uz^2\right) \Phi = P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \Phi + \sum_{k=2}^n x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi, \quad (6.2)$$

где $u = -\frac{c}{4(1+2\delta)}x_2$ и c — такая константа, что $\Phi_2 = cx_2$. Заметим, что в предыдущих параграфах мы использовали значение $c = -2(1 + 2\delta)$. Представим однородные полиномы $P_n(\mathbf{x})$ в виде $P_n(\mathbf{x}) = \sum_S p(S)\mathbf{x}^S$ с мультииндексом S . Имеем $\|S\| = 2(n + 2)$.

Пример 6.1. Для $n = 1$ имеем $J = (j_2)$. Коэффициенты $a(j_2)$ определяются рекуррентной формулой

$$a(j_2) = \frac{c}{2(1+2\delta)}(4j_2 + \delta - 3)(4j_2 + \delta - 2)a(j_2 - 1)$$

с начальным условием $a(0) = 1$.

Пример 6.2. Для $n = 2$ имеем $J = (j_2, j_3)$. Коэффициенты $a(j_2, j_3)$ определяются рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} a(J) = \frac{c}{2(1+2\delta)}(&\|J\| + \delta - 3)(\|J\| + \delta - 2)a(J - (1, 0)) \\ &+ 2(j_2 + 1)a(J + (1, -1)) + 2(j_3 + 1)p(2, 0)a(J + (-2, 1)) \end{aligned}$$

с начальными условиями $a(0, 0) = 1$ и $a(j_2, j_3) = 0$ при $j_2 < 0$ и при $j_3 < 0$.

Положим $T_1 a(j_2, j_3) = a(j_2 - 1, j_3)$, $T_2 a(j_2, j_3) = a(j_2 + 1, j_3 - 1)$. Тогда эта рекуррентная формула эквивалентна дискретному дифференциальному уравнению $Wa(j_2, j_3) = 0$ с оператором

$$W = \frac{c}{2(1+2\delta)}(\|J\| + \delta - 3)(\|J\| + \delta - 2)T_1 + 2(j_2 + 1)T_2 + 2(j_3 + 1)p(2, 0)T_1T_2^{-1} - 1$$

и начальными условиями $a(0, 0) = 1$, $a(j_2, j_3) = 0$ при $\min(j_2, j_3) < 0$.

Положим $T_1 a(J) = a(j_2 - 1, j_3, \dots, j_{n+1})$, $T_k a(J) = a(j_2, \dots, j_k + 1, j_{k+1} - 1, \dots, j_{n+1})$, где $k = 2, \dots, n$, и

$$T_S a(J) = T_1^{s_2+s_3+\dots+s_{n+1}-1} T_2^{s_3+\dots+s_{n+1}-1} \dots T_n^{s_{n+1}-1} a(J) = T_1^{-1} \dots T_n^{-1} a(J - S).$$

Теорема 6.3. Коэффициенты $a(J)$ являются решениями дискретного дифференциального уравнения $Wa(J) = 0$ с оператором

$$W = \frac{c}{2(1+2\delta)}(\|J\| + \delta - 2)(\|J\| + \delta - 3)T_1 + \sum_{k=2}^n 2(j_k + 1)T_k + 2 \sum_S (j_{n+1} + 1)p(S)T_S - 1$$

и начальными условиями $a(0, 0) = 1$ и $a(J) = 0$ при $\min(j_k) < 0$. Из уравнения $Wa(J) = 0$ коэффициенты $a(J)$ выражаются как линейные комбинации коэффициентов $a(J')$, таких, что $\|J'\| < \|J\|$.

Доказательство осуществляется прямой подстановкой (6.1) в (6.2), причем используется, что $\|S\| = 2(n + 2)$.

Соответствующее дискретное дифференциальное уравнение для ряда сигма-функции Вейерштрасса получено в [11].

Следствие 6.4. Для $c \geq 0$ и $p(S) \geq 0$ для всех S получаем $a(J) \geq 0$ для любого J .

Рядом Гурвица над коммутативным ассоциативным кольцом A называется формальный степенной ряд вида

$$\varphi(z) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k \frac{z^k}{k!} \in A \otimes \mathbb{Q}[[z]], \quad \text{где } \varphi_k \in A.$$

Следствие 6.5. Если $\frac{c}{(1+2\delta)} \in \mathbb{Z}$ и $p(S) \in \mathbb{Z}$, то $\Phi(z; \mathbf{x})$ является рядом Гурвица по z над кольцом $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$.

§7. Рациональные решения

В этом параграфе мы описываем дифференциальные уравнения, приводящие к рациональным решениям уравнений вида $\mathcal{D}_{P_n, n+1} = 0$.

Для функции $h = h(t)$ и постоянной b рассмотрим $(n+2) \times (n+2)$ -матрицу

$$S_n(h) = \begin{pmatrix} bh & -1 & \dots & 0 \\ bh' & bh & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{b}{n!}h^{(n)} & \frac{b}{(n-1)!}h^{(n-1)} & \dots & -(n+1) \\ \frac{b}{(n+1)!}h^{(n+1)} & \frac{b}{n!}h^{(n)} & \dots & bh \end{pmatrix}.$$

Уравнение

$$\frac{1}{b} \det S_n(h) = 0 \quad (7.1)$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением, однородным относительно градуировки $\deg h = -4$, $\deg t = 4$. Имеем $\frac{1}{b} \det S_0(h) = h' + bh^2$ и $\frac{1}{b} \det S_n(h) = h^{(n+1)} + (n+2)bhh^{(n)} + \dots + b^{n+1}h^{n+2}$ для $n > 0$.

Теорема 7.1. Для любого целочисленного $n \geq 0$ функция

$$h(t) = h_n(t) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{t - a_k} \quad (7.2)$$

является общим решением уравнения (7.1).

Доказательство. Рассмотрим полиномы Ньютона $N_q = \sum_{k=1}^{n+1} z_k^q$ от $n+1$ переменных, где $z_k(t) = \frac{1}{a_k - t}$. Имеем $(-1)^q \frac{b}{q!} h^{(q)}(t) = N_{q+1}$. Используя классический результат теории симметрических функций, получаем $\det S_n(h) = (n+2)! s_{n+2}(z_1, \dots, z_{n+1}, 0) \equiv 0$, где $s_{n+2}(\cdot)$ — элементарная симметрическая функция. Следовательно, функция (7.2) является решением дифференциального уравнения (7.1) порядка $n+1$. Она определяет общее решение этого уравнения, поскольку зависит от $n+1$ параметров $a_1, \dots, a_{n+1}$. $\square$

Следствие 7.2. Для каждого положительного целого n для существования полинома P_n , такого, что $\mathcal{D}_{P_n, n+1}(h) = \frac{1}{b} \det S_n(h)$, необходимо выполнение условия $b = n+1$.

Вычисления для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ показывают, что это условие также является достаточным (см. ниже).

Задача 7.3. Доказать, что в условиях следствия условие $b = n+1$ является достаточным.

§8. Частные случаи

В этом параграфе мы детально обсуждаем для случаев $n = 0, 1, 2, 3, 4$ следствия полученных выше результатов.

8.1. Случай $n = 0$. Имеем $\mathcal{D}_1(h) = h' + h^2$. В этом случае нет переменных x_k и $P_0 = 0$. Система (4.7) принимает вид

$$\frac{d}{dt}r = -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, \quad \frac{d}{dt}h = -h^2.$$

Общее решение этой системы: $h(t) = \frac{a}{at-b}$, $r(t) = -(\frac{1}{2} + \delta) \ln(at - b) + r_0$, где параметры $r_0 \in \mathbb{C}$ и $(a : b) \in \mathbb{CP}^1$ — константы. Следовательно, функция

$$\psi(z, t) = \frac{\exp r_0}{(at - b)^{1/2+\delta}} \exp\left(-\frac{az^2}{2(at - b)}\right) z^\delta$$

является решением уравнения теплопроводности. В случае $\delta = 0$, $r_0 = 0$, $b/a = c$ она совпадает с решением (2.4) уравнения теплопроводности.

Следствие 8.1. Для $\delta = 0$ и $b/a < t < \infty$ функция $\psi(z, t)$ является гауссовой функцией плотности распределения.

8.2. Случай $n = 1$. Имеем $\mathcal{D}_2(h) = (\frac{d}{dt} + 4h)\mathcal{D}_1(h)$ и $\deg x_2 = -8$, $\deg P_1 = -12$; следовательно, $P_1(x_2) \equiv 0$. Система (4.7) имеет вид

$$\frac{d}{dt}r = -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, \quad \frac{d}{dt}h = -h^2 + x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -4hx_2.$$

Таким образом, $h(t)$ является решением уравнения

$$h'' + 6hh' + 4h^3 = 0. \tag{8.1}$$

Замечание 8.2. Дифференцируя (8.1) и подставляя $y(t) = 2h(t)$, получаем уравнение Шази-4:

$$y''' = -3yy'' - 3y'^2 - 3y^2y'.$$

Общее решение уравнения (8.1) имеет вид $h(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b}\right)$, и, следовательно, $x_2(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t-b}\right)^2$. В случае $a = b$ приходим к случаю $n = 0$.

Согласно ключевой теореме, $\Phi(z; x_2) = z^\delta + \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{2q}(x_2) \frac{z^{4q+\delta}}{(4q+\delta)!}$, где $\Phi_2 = -2(1+2\delta)x_2$, $\Phi_{2q} = -(4q+\delta-3)(4q+\delta-2)x_2\Phi_{2q-2}$, $q = 2, 3, \dots$.

Заметим, что функция $\Phi(z; x_2)$ является решением уравнения $\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z; x_2) = -x_2z^2\Phi(z; x_2)$.

Лемма 8.3. $\Phi(z; x_2) = z^\delta \gamma(z^4; x_2, \delta)$, где $\gamma(v; x_2, \delta)$ — решение дифференциального уравнения

$$\gamma'(v) + \frac{4v}{3+2\delta}\gamma''(v) = \lambda\gamma(v), \quad \lambda = -\frac{1}{4(3+2\delta)}x_2,$$

с начальным условием $\gamma(0) = 1$.

Следовательно, функция $\gamma(v)$ является собственной функцией обобщенного оператора сдвига, определенного генератором

$$d = \frac{d}{dv} + \frac{4}{3+2\delta}v \frac{d^2}{dv^2}.$$

8.3. Случай $n = 2$. Этот случай приводит к замечательным уравнениям, обладающим свойством Пенлеве (см., например, [3]).

Имеем $P_2(x_2, x_3) = c_4 x_2^2$, где c_4 — константа, и $\mathcal{D}_3(h) = (\frac{d}{dt} + 6h)\mathcal{D}_2(h)$, $\mathcal{D}_{P_2,3}(h) = \mathcal{D}_3(h) - c_4 \mathcal{D}_1(h)^2$.

Система (4.7) имеет вид

$$\frac{d}{dt}r = -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, \quad \frac{d}{dt}h = -h^2 + x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = x_3 - 4hx_2, \quad \frac{d}{dt}x_3 = c_4 x_2^2 - 6hx_3.$$

Следовательно, функция $h(t)$ является решением уравнения

$$h''' + 12hh'' - 18(h')^2 + (24 - c_4)(h' + h^2)^2 = 0. \quad (8.2)$$

Уравнение (8.2) переводится подстановкой $y(t) = -6h(t)$ в

$$y''' = 2yy'' - 3(y')^2 + \frac{24 - c_4}{216}(6y' - y^2)^2. \quad (8.3)$$

Для $\frac{24 - c_4}{216} = -\frac{4}{k^2 - 36}$ уравнение (8.3) является уравнением Шази-12. Для $c_4 = 24$ это уравнение является уравнением Шази-3.

Для $c_4 = 6$ уравнение (8.3) принимает вид

$$y''' = 2yy'' - y^2y' + \frac{1}{12}y^4. \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) является линейным относительно производных.

Имеем $\frac{1}{6} \det S_2(h) = h''' + 4bhh'' + 3b(h')^2 + 6b^2h^2h' + b^3h^4$. Для $b = 3$ получаем уравнение (8.2) с $c_4 = -3$.

Следствие 8.4. Функция $-2\left(\frac{1}{t-a_1} + \frac{1}{t-a_2} + \frac{1}{t-a_3}\right)$ является общим решением уравнения Шази-12 (см. (8.3)) с $c_4 = -3$ ($k^2 = 4$).

Мы опишем решения уравнения теплопроводности в случае, когда $y(t) = -6h(t)$ — решение уравнения Шази-3. Такие решения могут быть явно построены в терминах сигма-функции Вейерштрасса.

Определение 8.5. σ -функцией Вейерштрасса называется целая нечетная функция $\sigma(z) = \sigma(z; g_2, g_3)$, такая, что $(\ln \sigma(z; g_2, g_3))' = -\wp(z; g_2, g_3)$ и $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma(z)}{z}\right) = 1$.

Здесь $\wp(z; g_2, g_3)$ есть $\wp$ -функция Вейерштрасса. Необходимые факты из теории эллиптических функций см., например, в [8].

Теорема 8.6 [1]. Функция $\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)}\sigma(z; g_2(t), g_3(t))$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1) тогда и только тогда, когда функции $r(t)$, $h(t)$, $g_2(t)$ и $g_3(t)$ удовлетворяют однородной полиномиальной динамической системе в $\mathbb{C}^4$ с координатами (r, h, g_2, g_3) , $\deg h = -4$, $\deg r = 0$:

$$r' = -\frac{3}{2}h, \quad h' = -h^2 + \frac{1}{12}g_2, \quad g_2' = 6g_3 - 4hg_2, \quad g_3' = \frac{1}{3}g_2^2 - 6hg_3. \quad (8.5)$$

Пример 8.7. Функция

$$\psi(z, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}a^2t\right)\frac{\sin az}{a}, \quad a = \text{const},$$

является периодической нечетной функцией от z с начальными условиями $\psi(0, t) = 0$, $\psi'(0, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}a^2t\right)$. Она является классическим решением уравнения теплопроводности. В этом случае $r = -\frac{1}{2}a^2t$, $h = \frac{1}{3}a^2$, $g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4$, $g_3 = \frac{8}{27}\gamma^6$.

Пример 8.8. Для классического решения

$$\psi(z, t) = \psi_*(z, t) - \psi_*(-z, t), \quad \text{где } \psi_*(z, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2t}\right),$$

убывающего при $z \rightarrow \pm\infty$, имеем $\gamma = -\frac{ia}{t}$ и $h = -\frac{a^2-3t}{3t^2}$, $r = \ln(\frac{2a}{\sqrt{t^3}}) - \frac{a^2}{2t}$, $g_2 = \frac{4}{3}\frac{a^4}{t^4}$, $g_3 = -\frac{8}{27}\frac{a^6}{t^6}$. Для этого решения $\psi(0, t) = 0$ и $\psi'(z, t) = \frac{2a}{t\sqrt{t}} \exp(-\frac{a^2}{2t})$.

Рассмотрим динамическую систему (8.5). Она соответствует системе

$$\frac{d}{d\tau}g_2 = 6g_3, \quad \frac{d}{d\tau}g_3 = \frac{1}{3}g_2^2. \quad (8.6)$$

Для $x_2 = \frac{1}{12}g_2$, $x_3 = \frac{1}{2}g_3$ получаем случай $n = 2$, $\delta = 1$, $c_4 = 24$.

В этом случае уравнение (8.2) принимает вид $h''' + 12hh'' - 18(h')^2 = 0$ и приводится подстановкой $y(t) = -6h(t)$ к уравнению Шази-3: $y''' = 2yy'' - 3(y')^2$.

Система (8.6) обладает решением

$$g_2(\tau) = 3\wp(\tau + d; 0, b_3), \quad g_3(\tau) = \frac{1}{2}\wp'(\tau + d; 0, b_3), \quad (8.7)$$

где $b_3 = \frac{4}{27}g_2(0)^3 - 4g_3(0)^2$ и d является решением совместной системы $\wp(d; 0, b_3) = \frac{1}{3}g_2(0)$, $\wp'(d; 0, b_3) = 2g_3(0)$.

В терминах нашей конструкции $x_2 = \frac{1}{4}\wp(\tau + d; 0, b_3)$ для $n = 2$, $c_4 = 24$. Далее мы покажем, что для $n = 3$ возникают решения уравнения теплопроводности с $x_2 = \frac{1}{4}\wp(\tau + d; b_2, b_3)$.

Соответствующую функцию $\Phi(z; \mathbf{x})$ можно разложить в ряд по параметру b_2 . При $b_2 = 0$ получаем сигма-функцию Вейерштрасса (см. случай $n = 2$).

8.4. Случай $n = 3$. В этом случае $\mathcal{D}_4(h) = (\frac{d}{dt} + 8h)\mathcal{D}_3(h)$ и $P_3(x_2, x_3, x_4) = c_5x_2x_3$, где c_5 — константа и $\mathcal{D}_{P_3,4}(h) = \mathcal{D}_4(h) - c_5\mathcal{D}_1(h)\mathcal{D}_2(h)$.

Система (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, & \frac{d}{dt}h &= -h^2 + x_2, & \frac{d}{dt}x_2 &= x_3 - 4hx_2, \\ \frac{d}{dt}x_3 &= x_4 - 6hx_3, & \frac{d}{dt}x_4 &= c_5x_2x_3 - 8hx_4. \end{aligned}$$

Следовательно, $h(t)$ является решением уравнения

$$h'''' + 20hh''' - 24h'h'' + 96h^2h'' - 144h(h')^2 + (48 - c_5)(h' + h^2)(h'' + 6hh' + 4h^3) = 0. \quad (8.8)$$

Лемма 8.9. Для $c_5 = 2c_4$ имеем $\mathcal{D}_{P_3,4}(h) = (\frac{d}{dt} + 8h)\mathcal{D}_{P_2,3}(h)$.

Следовательно, для $c_5 = 48$ уравнение (8.8) получается из уравнения Шази-3 подстановкой $y(t) = -6h(t)$ и действием оператора $\frac{d}{dt} + 8h$.

Лемма 8.10. Для $c_5 = 24$ и $y(t) = -2h(t)$ уравнение (8.8) принимает вид

$$y'''' - 10yy''' + 30y^2y'' - 30y^3y' + 6y^5 = 0. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.9) является линейным относительно производных.

Имеем $\frac{1}{b} \det S_3(h) = h'''' + 5bhh''' + 10bh'h'' + 10b^2h^2h'' + 15b^2h(h')^2 + 10b^3h^3h' + b^4h^5$. Для $b = 4$ получаем уравнение (8.8) с $c_5 = -16$.

Следствие 8.11. *Функция*

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-a_1} + \frac{1}{t-a_2} + \frac{1}{t-a_3} + \frac{1}{t-a_4} \right)$$

является общим решением уравнения (8.8) с $c_5 = -16$.

Рассмотрим функции (8.7) (случай $n = 2$) как предел функций

$$g_2(\tau) = 3\wp(\tau + d; b_2, b_3), \quad g_3(\tau) = \frac{1}{2}\wp'(\tau + d; b_2, b_3) \quad (8.10)$$

при $b_2 \rightarrow 0$. Функции (8.10) вместе с $g_4 = -b_2/8$ задают общее решение системы

$$\frac{d}{d\tau}g_2 = 6g_3, \quad \frac{d}{d\tau}g_3 = \frac{1}{3}g_2^2 + 2g_4, \quad \frac{d}{d\tau}g_4 = 0.$$

Для $x_2 = \frac{1}{12}g_2$, $x_3 = \frac{1}{2}g_3$, $x_4 = \frac{1}{6}g_2^2 + g_4$ эта система

$$\frac{d}{d\tau}x_2 = x_3, \quad \frac{d}{d\tau}x_3 = x_4, \quad \frac{d}{d\tau}x_4 = -96x_2x_3,$$

соответствует случаю $n = 3$, $c_5 = 48$.

Следовательно, решение $\psi(z, t)$ уравнения теплопроводности, соответствующее этому случаю, имеет параметр b_2 и при $b_2 = 0$ является решением, соответствующим случаю $n = 2$, $c_4 = 24$.

Таким образом, функция $e^{\frac{1}{2}h(t)z^2 - r(t)}\psi(z, t)$ при $t = 0$ является деформацией сигма-функции Вейерштрасса $\sigma(z; g_2, g_3)$ с параметром деформации b_2 .

8.5. Случай $n = 4$. В этом случае $\mathcal{D}_5(h) = \left(\frac{d}{dt} + 10h\right)\mathcal{D}_4(h)$ и $P_4(x_2, x_3, x_4, x_5) = c_{6,2}x_2^3 + c_{6,3}x_3^2 + c_{6,4}x_2x_4$, где $c_{6,2}$, $c_{6,3}$ и $c_{6,4}$ — константы, и $\mathcal{D}_{P_4,5}(h) = \mathcal{D}_5(h) - c_{6,2}\mathcal{D}_1(h)^3 - c_{6,3}\mathcal{D}_2(h)^2 - c_{6,4}\mathcal{D}_1(h)\mathcal{D}_3(h)$.

Система (4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r &= -\left(\delta + \frac{1}{2}\right)h, & \frac{d}{dt}h &= -h^2 + x_2, & \frac{d}{dt}x_2 &= x_3 - 4hx_2, & \frac{d}{dt}x_3 &= x_4 - 6hx_3, \\ \frac{d}{dt}x_4 &= x_5 - 8hx_4, & \frac{d}{dt}x_5 &= c_{6,2}x_2^3 + c_{6,3}x_3^2 + c_{6,4}x_2x_4 - 10hx_5. \end{aligned}$$

Лемма 8.12. Для $c_{6,2} = 0$, $c_{6,3} = c_5$ и $c_{6,4} = c_5$ имеем $\mathcal{D}_{P_4,5}(h) = \left(\frac{d}{dt} + 10h\right)\mathcal{D}_{P_3,4}(h)$.

Следовательно, для $c_{6,2} = 0$, $c_{6,3} = 48$ и $c_{6,4} = 48$ уравнение $\mathcal{D}_{P_4,5}(h) = 0$ получается из уравнения Шази-3 подстановкой $y(t) = -6h(t)$ и действием оператора $\left(\frac{d}{dt} + 10h\right)\left(\frac{d}{dt} + 8h\right)$.

Лемма 8.13. Для $c_{6,2} = -120$, $c_{6,3} = 24$, $c_{6,4} = 44$ и $y(t) = -10h(t)$ уравнение $\mathcal{D}_{P_4,5}(h) = 0$ принимает вид

$$y'''' - 3yy'''' + 3y^2y''' - \frac{6}{5}y^3y'' + \frac{9}{50}y^4y' - \frac{3}{500}y^6 = 0. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) линейно относительно производных.

Имеем $\det S_4(h) = h'''' + 6bhh'''' + 15b(h' + bh^2)h''' + 10b(h'' + 6bhh' + 2b^2h^3)h'' + 15b^2((h')^2 + 3bh^2h' + b^2h^4)h' + b^5h^6$. Для $b = 5$ получаем $\mathcal{D}_{P_4,5}(h)$ с $c_{6,2} = -45$, $c_{6,3} = -26$ и $c_{6,4} = -31$.

Следствие 8.14. *Функция*

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{t - a_1} + \frac{1}{t - a_2} + \frac{1}{t - a_3} + \frac{1}{t - a_4} + \frac{1}{t - a_5} \right)$$

является общим решением уравнения $\mathcal{D}_{P_4,5}(h) = 0$ с $c_{6,2} = -45$, $c_{6,3} = -26$ и $c_{6,4} = -31$.

§9. Симметрические квадратичные динамические системы и уравнение теплопроводности

В этом параграфе мы рассматриваем классическую задачу интегрирования квадратичных динамических систем от n переменных (см. [9]) и исследуем более общий анзац для решений уравнения теплопроводности, такой, что каждое решение симметричной квадратичной динамической системы в общем положении (см. определения 9.1, 9.2) определяет решение уравнения теплопроводности в этом анзаце.

9.1. Алгебраически интегрируемые квадратичные динамические системы. Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ с координатами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ общую однородную квадратичную динамическую систему

$$\xi'_k(t) = \xi^\top A_k \xi, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9.1)$$

где A_k — постоянные матрицы. Эта система однородна относительно градуировки $\deg t = 4$, $\deg \xi_i = -4$. Она определяет линейный оператор $L = L(A_1, \dots, A_n): \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n] \rightarrow \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$,

$$LP(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_k \xi^\top A_k \xi \frac{\partial}{\partial \xi_k} P(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Имеем $\deg L = -4$.

Обозначим через $\text{Sym} \subset \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ подкольцо симметричных полиномов.

Определение 9.1. Систему (9.1) мы будем называть *симметричной*, если L переводит кольцо Sym в себя.

Согласно классическим результатам, Sym — кольцо полиномов от n образующих. Наиболее известные мультипликативные образующие этого кольца — элементарные симметрические функции и полиномы Ньютона.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — однородный мультипликативный базис кольца Sym с $\deg a_k = -4k$. Тогда из симметричной системы (9.1) получается однородная динамическая система

$$a'_k(t) = La_k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Из градуировки следует, что эту систему можно переписать в виде

$$a'_k(t) = g_{k+1}(a_1(t), \dots, a_k(t)) + c_k a_{k+1}(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (9.2)$$

где $c_n = 0$ и $g_j(a_1, \dots, a_{j-1})$ — однородные полиномы с $\deg g_j = -4j$.

Определение 9.2. Однородная симметричная система (9.1) находится в *общем положении*, если все c_k отличны от 0, $k = 1, \dots, n-1$.

Лемма 9.3. Понятие «в общем положении» не зависит от выбора мультипликативного базиса.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ — два мультипликативных базиса с $\deg a_j = \deg b_j = -4j$. Рассмотрим идеал разложимых элементов $J \subset \text{Sym}$. Имеем $a_k = C_k b_k \bmod J$, где $C_k \neq 0$, $C_k \in \mathbb{C}$. Таким образом, из (9.2) следует, что

$$b'_k(t) = G_{k+1}(b_1(t), \dots, b_k(t)) + c_k \frac{C_{k+1}}{C_k} b_{k+1}(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

для однородных полиномов $G_j(b_1, \dots, b_k)$. □

Рассмотрим отображение

$$S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (s_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, s_n(\xi_1, \dots, \xi_n)),$$

где s_k есть k -й элементарный симметрический полином от $\xi_1, \dots, \xi_n$. Индуцированное отображение S^* переводит полиномы от $s_1, \dots, s_n$ в симметрические полиномы от $\xi_1, \dots, \xi_n$, более того, каждый симметрический полином от $\xi_1, \dots, \xi_n$ есть образ некоторого полинома от $s_1, \dots, s_n$. Наш подход к интегрированию квадратичных динамических систем использует соотношение

$$\xi_j^n - s_1 \xi_j^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n \equiv 0,$$

верное для каждого j .

Определение 9.4. Назовем систему (9.1) *алгебраически интегрируемой* набором функций $h_1, \dots, h_n$, если набор корней уравнения

$$\xi^n - h_1 \xi^{n-1} + \dots + (-1)^n h_n \equiv 0 \quad (9.3)$$

является решением системы (9.1).

Задача 9.5 (алгебраическая интегрируемость). Для заданной системы вида (9.1) найти обыкновенное дифференциальное уравнение от h степени n и дифференциальные полиномы $h_2, \dots, h_n$ от h , такие, что для каждого решения h полученного уравнения набор $h_1 = h, h_2, \dots, h_n$ алгебраически интегрирует заданную систему.

Теорема 9.6. Для каждой симметричной системы (9.1) в общем положении существует решение задачи алгебраической интегрируемости.

Доказательство. Рассмотрим систему (9.2) с $a_k = s_k$. В условиях теоремы имеем $c_k \neq 0$; следовательно, функции $s_j(t)$ могут быть выражены как полиномы от $s_1(t), \dots, s_{j-1}(t)$ и их производных из $(j-1)$ -го уравнения для $j = 2, \dots, n$. Следовательно, последнее уравнение задает единственное однородное дифференциальное уравнение на $s_1(t)$, в котором коэффициент при старшей производной от $s_1(t)$ постоянный и ненулевой. Таким образом, набор $(h_1, \dots, h_n) = (s_1, \dots, s_n)$ алгебраически интегрирует систему (9.2). □

Пример 9.7. Классическая система Дарбу–Альфана

$$\xi'_1 = \xi_2 \xi_3 - \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_3, \quad \xi'_2 = \xi_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_3, \quad \xi'_3 = \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_3 - \xi_2 \xi_3$$

алгебраически интегрируется набором (h_1, h_2, h_3) , где $-2h_1$ — решение уравнения Шази-3 (см. (8.3)), $h_2 = -h'_1$ и $h_3 = -\frac{1}{6}h'_2 = \frac{1}{6}h''_1$.

Пример 9.8. Общая двумерная квадратичная симметричная динамическая система имеет вид

$$\xi'_1 = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_1 \xi_2 + \gamma \xi_2^2, \quad \xi'_2 = \gamma \xi_1^2 + \beta \xi_1 \xi_2 + \alpha \xi_2^2. \quad (9.4)$$

Функция $h_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ является решением дифференциального уравнения $h'' + \lambda_1 h' h + \lambda_2 h^3 = 0$, где $\lambda_1 = (\gamma - 3\alpha - \beta)$, $\lambda_2 = (\alpha - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$. При $\beta \neq \alpha + \gamma$ система (9.4) находится в общем положении и

$$h_2 = \frac{1}{2(\beta - \alpha - \gamma)} h_1' - \frac{\alpha + \gamma}{2(\beta - \alpha - \gamma)} h_1^2.$$

Пример 9.9. Общая трехмерная квадратичная симметричная динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \alpha \xi_2 \xi_3 + \beta \xi_1 (\xi_2 + \xi_3) + \gamma \xi_1^2 + \delta (\xi_2^2 + \xi_3^2), \\ \xi_2' &= \alpha \xi_1 \xi_3 + \beta \xi_2 (\xi_1 + \xi_3) + \gamma \xi_2^2 + \delta (\xi_1^2 + \xi_3^2), \\ \xi_3' &= \alpha \xi_1 \xi_2 + \beta \xi_3 (\xi_1 + \xi_2) + \gamma \xi_3^2 + \delta (\xi_1^2 + \xi_2^2).\end{aligned}$$

Функция $h_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ является решением дифференциального уравнения

$$\lambda_1 h''' + \lambda_2 h'' h + \lambda_3 (h')^2 + \lambda_4 h' h^2 + \lambda_5 h^4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + 2\beta - 2\gamma - 4\delta, \\ \lambda_2 &= (\alpha - 3\beta - 4\gamma + 2\delta)(\alpha + 2\beta - 2\gamma - 4\delta), \\ \lambda_3 &= 2(\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2 + \alpha\gamma - 2\beta\gamma + 3\gamma^2 - 2\alpha\delta + 6\beta\delta + 2\gamma\delta + \delta^2), \\ \lambda_4 &= 2(-\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 2\beta^3 - 2\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 8\beta^2\gamma + 2\alpha\gamma^2 - 4\beta\gamma^2 - 6\gamma^3 \\ &\quad + 4\alpha\beta\delta + 4\alpha\gamma\delta - 12\beta\gamma\delta - 8\gamma^2\delta + 6\alpha\delta^2 - 16\beta^2\delta + 4\beta\delta^2 + 10\gamma\delta^2 + 4\delta^3), \\ \lambda_5 &= 2(\alpha + 2\beta + \gamma + 2\delta)(\gamma\alpha^2 - \gamma\beta^2 - \alpha\gamma^2 + \gamma^3 - 2\alpha\beta\delta + 2\beta^2\delta + 2\beta\gamma\delta \\ &\quad + \alpha\delta^2 - 2\beta\delta^2 - 3\gamma\delta^2 + 2\delta^3).\end{aligned}$$

При $\alpha + 2\beta - 2\gamma - 4\delta \neq 0$, $\alpha - \beta + \gamma - \delta \neq 0$ система находится в общем положении и

$$\begin{aligned}(\alpha + 2\beta - 2\gamma - 4\delta)h_2 &= h_1' - (\gamma + 2\delta)h_1^2, \\ 3(\alpha - \beta + \gamma - \delta)(\alpha + 2\beta - 2\gamma - 4\delta)h_3 &= -(\alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 - 2\beta\delta + \gamma\delta - 2\delta^2)h_1^3 \\ &\quad + (\alpha + \beta + 3\gamma - \delta)h_1'h_1 - h_1''.\end{aligned}$$

Пример 9.10. Система

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \xi_2 \xi_3 - \xi_1 (\xi_2 + \xi_3) + \tau^2, \\ \xi_2' &= \xi_1 \xi_3 - \xi_2 (\xi_1 + \xi_3) + \tau^2, \\ \xi_3' &= \xi_1 \xi_2 - \xi_3 (\xi_1 + \xi_2) + \tau^2,\end{aligned}$$

где $\tau^2 = a^2(\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1) + b^2(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2) + c^2(\xi_3 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)$, была впервые изучена Альфаном как естественное обобщение классической системы Дарбу–Альфана (см. [10]). Эта система является симметричной при $a = b = c$ и соответствует параметрам $\alpha = a^2 + 1$, $\beta = a^2 - 1$, $\gamma = -a^2$, $\delta = -a^2$. В этом случае функция $y = -2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$ является решением уравнения (8.3) с $c_4 = \frac{-24}{9a^2 - 1}$.

Определение 9.11. Система (9.1) называется *квазисимметричной*, если существует невырожденная постоянная матрица B , такая, что в координатах $\eta = B\xi$ система является симметричной.

Пример 9.12. Система

$$\xi_1' = \gamma_1 \xi_2 \xi_3, \quad \xi_2' = \gamma_2 \xi_1 \xi_3, \quad \xi_3' = \gamma_3 \xi_1 \xi_2$$

квазисимметрична. Она переводится в симметричную систему диагональной матрицей $B = \text{diag}(\frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1}, \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2}, \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3})$. Система решается в функциях Якоби: $\xi_1 = \sqrt{\gamma_1} \text{sn}(t)$, $\xi_2 = \sqrt{\gamma_2} \text{cn}(t)$, $\xi_3 = \frac{1}{k} \sqrt{\gamma_3} \text{dn}(t)$, где k — параметр эллиптического синуса $\text{sn}(t)$. В симметричном случае имеем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$. Положим $\kappa_1' = \alpha_1 \frac{\xi_2 \xi_3}{\xi_1}$, $\kappa_2' = \alpha_2 \frac{\xi_1 \xi_3}{\xi_2}$, $\kappa_3' = \alpha_3 \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_3}$. Получаем систему

$$\begin{aligned} \kappa_1' &= \kappa_1 \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} \kappa_2 + \frac{\gamma_3}{\alpha_3} \kappa_3 - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \kappa_1 \right), & \kappa_2' &= \kappa_2 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \kappa_1 + \frac{\gamma_3}{\alpha_3} \kappa_3 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \kappa_2 \right), \\ \kappa_3' &= \kappa_3 \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \kappa_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \kappa_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_3} \kappa_3 \right). \end{aligned}$$

Для $\gamma_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, 3$, мы получили трехмерную квадратичную симметричную динамическую систему с $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 0$. Таким образом, функция h_1 является решением дифференциального уравнения $h''' + h''h + 2(h')^2 - 2h'h^2 = 0$ и мы имеем $4h_2 = h_1' + h_1^2$, $24h_3 = 2h_1'h_1 + h_1''$. Для $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = -k^2$ получаем $\xi_1 = \text{sn}(t)$, $\xi_2 = \text{cn}(t)$, $\xi_3 = \text{dn}(t)$. Следовательно, система

$$\kappa_k' = \kappa_k \left(\sum_{l=1}^3 \kappa_l - 2\kappa_k \right), \quad k = 1, 2, 3, \quad (9.5)$$

имеет решение $\kappa_1 = (\ln \text{sn}(t))'$, $\kappa_2 = (\ln \text{cn}(t))'$, $\kappa_3 = (\ln \text{dn}(t))'$. Результат, что система (9.5) интегрируется в абелевых функциях, был получен С. Ковалевской, см. [9]. Имеем $h_1 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, и, следовательно, решением уравнения $h''' + h''h + 2(h')^2 - 2h'h^2 = 0$ является эллиптическая функция $(\ln((\text{sn}(t)^2)))'$.

Пример 9.13. В примере 9.9 для $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = -3$, $\delta = 0$ функция h_1 является решением дифференциального уравнения $h''' + 12h''h + 9(h')^2 + 54h'h^2 + 27h^4 = 0$, совпадающего с (8.2) для $c_4 = -3$.

Положим $m_i = \xi_i - \frac{1}{3}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$. Тогда $s_1(m_i) = 0$.

Следствие 9.14. Функция $\psi(z, t)$, такая, что $\psi(z, t) = e^{-\frac{1}{2}h(t)z^2 + r(t)\sigma(z; g_2(t), g_3(t))}$ для некоторых функций $r(t)$, $h(t)$, $g_2(t)$ и $g_3(t)$, удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1) тогда и только тогда, когда для некоторого решения ξ_1, ξ_2, ξ_3 системы Дарбу–Альфана имеют место формулы

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{3}s_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), & r'(t) &= -\frac{3}{2}h(t), \\ g_2(t) &= -4s_2(m_1, m_2, m_3), & g_3(t) &= 4s_3(m_1, m_2, m_3). \end{aligned}$$

Следствие 9.15. Уравнение эллиптической кривой $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ в терминах m_i принимает вид $(y/2)^2 = (x - m_1)(x - m_2)(x - m_3)$. Таким образом, следствие 9.14 дает решения уравнения теплопроводности в терминах точек ветвления этой кривой.

9.2. Решения уравнения теплопроводности в терминах квадратичных динамических систем. Мы исследовали в деталях анзац (3.9) для решений уравнения теплопроводности (2.1). Заметим, что анзац (3.9) является частным случаем анзаца

$$\psi(z, t) = e^{r(t)} \Psi(z; \mathbf{x}(t)), \quad (9.6)$$

где

$$\Psi(z; \mathbf{x}) = z^\delta + \sum_{k \geq 1} \Psi_k(\mathbf{x}) \frac{z^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!}, \quad (9.7)$$

$\deg z = 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $\deg x_q = -4q$ и $\Psi_k(\mathbf{x})$ — однородные полиномы степени $-4k$.

Используя подход, развитый в §§3 и 4, мы получаем следующие результаты:

Теорема 9.16. *Из любых двух из трех следующих условий вытекает третье:*

- 1) функция $\psi(z, t)$ вида (9.6) удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1);
- 2) коэффициенты функции $\Psi(z; \mathbf{x})$ задаются соотношением

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{j=1}^{n+1} p_{j+1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi_k(\mathbf{x}) + \Psi_1(\mathbf{x}) \Psi_k(\mathbf{x})$$

с начальными условиями $r'(t) = \frac{1}{2} \Psi_1(\mathbf{x}(t))$, где $p_k(\mathbf{x})$ — однородные полиномы;

- 3) набор функций $x_k(t)$ является решением однородной полиномиальной динамической системы

$$\frac{d}{dt} x_k = p_{k+1}(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (9.8)$$

Пример 9.17. Для $n = 2$ положим $x_1(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t-a_1} + \frac{1}{t-a_2} + \frac{1}{t-a_3} \right)$. Тогда для $x_2(t) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(t-a_1)^2} + \frac{1}{(t-a_2)^2} + \frac{1}{(t-a_3)^2} \right)$ и $x_3(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{(t-a_1)^3} + \frac{1}{(t-a_2)^3} + \frac{1}{(t-a_3)^3} \right)$ имеем

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt} x_2 = x_3, \quad \frac{d}{dt} x_3 = -3(4x_1x_3 + 3x_2^2 + 18x_2x_1^2 + 9x_1^4).$$

Положим $\mathcal{L} = 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - 6(4x_1x_3 + 3x_2^2 + 18x_2x_1^2 + 9x_1^4) \frac{\partial}{\partial x_3} + \Psi_1(\mathbf{x})$.

Из теоремы 9.16 следует, что для функции $\Psi(z; \mathbf{x})$ вида (9.7), где $\Psi_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}x_1$ и $\Psi_k(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{k-1} \Psi_1(\mathbf{x})$, функция

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt[12]{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}} \Psi(z; \mathbf{x}(t))$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Используя методы §4, мы приводим систему (9.8) к виду

$$\frac{d}{dt} x_k = x_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \frac{d}{dt} x_{n+1} = K_n(\mathbf{x}).$$

Теорема 9.18. *Каждое решение уравнения теплопроводности вида (9.6) задается набором (n, K_n, x_1, r_0) , где n — натуральное число, K_n — однородный полином $K_n(\mathbf{x})$ градуировки $-4(n+2)$, x_1 — решение $x_1(t)$ уравнения $x_1^{(n+1)} = K_n(x_1, x_1', \dots, x_1^{(n)})$, r_0 — константа.*

Следствие 9.19. Каждое решение уравнения теплопроводности вида (9.6) определяется конечномерным числовым вектором $(n, \mathbf{K}_n, \mathbf{C}_n, r_0)$, где $\mathbf{K}_n$ — вектор коэффициентов полинома $K_n(\mathbf{x})$ и $\mathbf{C}_n$ — вектор начальных данных задачи Коши уравнения $x_1^{(n+1)} = K_n(x_1, x_1', \dots, x_1^{(n)})$.

Из теорем 9.6 и 9.16 получаем

Следствие 9.20. Каждая симметричная квадратичная динамическая система в общем положении определяет решение уравнения теплопроводности вида (9.6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. Ю. Бунькова, В. М. Бухштабер, *Уравнения теплопроводности и семейства двумерных сигма-функций*, в кн.: Геометрия, топология и математическая физика. II, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика С. П. Новикова, Труды МИАН, т. 266, МАИК, М., 2009, 5–32.
- [2] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [3] Р. Конт, М. Мюзетт, *Метод Пенлеве и его приложения*, РХД, Москва–Ижевск, 2011.
- [4] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, М. В. Павлов, *Егоровские гидродинамические цепочки, уравнение Шазы и группа $SL(2, \mathbb{C})$* , Функци. анализ и его прил., **37**:4 (2003), 13–26.
- [5] S. Chakravarty, M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Reductions of self-dual Yang-Mills fields and classical systems*, Phys. Rev. Lett., **65**:9 (1990), 1085–1087.
- [6] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, in: Lecture Notes in Math., vol. 1620, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 120–348.
- [7] P. A. Clarkson, P. J. Olver, *Symmetry and the Chazy equation*, J. Differential Equations, **124**:1 (1996), 225–246.
- [8] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, ч. 2. Трансцендентные функции, УРСС, М., 2010.
- [9] *Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера*, в кн.: Научное наследство, т. 7, Наука, М., 1984, Письмо 57.
- [10] S. Chakravarty, R. G. Halburd, *First integrals and gradient flow for a generalized Darboux–Halphen system*, in: Contemp. Math., vol. 301, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 273–281.
- [11] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых*, в кн.: Труды МИАН, т. 251, Наука, М., 2005, 54–126.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: bunkova@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
11 июня 2012 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: buchstab@mi.ras.ru