Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Посицельский, Алгебра замкнутых форм на диске кошулева, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 71–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 02:46:15

Алгебра замкнутых форм на диске кошулева*

© 2012. Л. Е. Посицельский

В работе показано, что алгебра замкнутых дифференциальных форм на (алгебраическом, формальном или аналитическом) диске с логарифмическими особенностями вдоль нескольких координатных гиперплоскостей является (как нетопологически, так и топологически) кошулевой. Связь с вариациями смешанных структур Ходжа–Тейта обсуждается во введении.

Введение

В настоящей работе рассматриваются алгебры замкнутых дифференциальных форм на диске, регулярных вне нескольких выбранных координатных гиперплоскостей и имеющих, самое большее, логарифмические особенности вдоль этих гиперплоскостей, по отношению к операции умножения дифференциальных форм. Такие алгебры возникают при изучении смешанных пучков Ходжа–Тейта на гладких алгебраических многообразиях [2]. Точнее говоря, указанные алгебры замкнутых форм на диске играют роль в локальном описании таких пучков в окрестности точки, которая может принадлежать либо исходному многообразию, либо дивизору с нормальными пересечениями, образующему бесконечно удаленную часть его гладкой компактификации.

Пусть D — комплексно-аналитический диск и V — дополнение к нескольким координатным гиперплоскостям в D . Согласно результатам работы [2], вещественные смешанные пучки Ходжа–Тейта на V с допустимыми особенностями в $D \setminus V$ описываются в терминах ассоциативной суперкоммутативной положительно внутренне градуированной DG-алгебры $\mathbb{R}\mathcal{HT}_{(V,D)}$. Когомологии DG-алгебры $\mathbb{R}\mathcal{HT}_{(V,D)}$ лежат на объединении двух полупрямых: диагонали, где внутренняя градуировка равна когомологической, и оси, на которой когомологическая градуировка равна единице. Диагональная часть когомологий изоморфна алгебре замкнутых форм на V с логарифмическими особенностями вдоль $D \setminus V$, в то время как часть, лежащая на второй полупрямой (отвечающая за смешанные структуры Ходжа над точкой), имеет одномерную компоненту в каждой положительной внутренней градуировке.

Коммутативная алгебра Хопфа, описывающая категорию смешанных пучков Ходжа–Тейта на (V, D) в рамках таннакиева формализма, есть алгебра нулевых когомологий приведенной бар-конструкции DG-алгебры $\mathbb{R}\mathcal{HT}_{(V,D)}$. Из кошулевости алгебры замкнутых форм, доказанной в настоящей работе, следует, что эта бар-конструкция не имеет когомологий в когомологических градуировках,

* Автор получал финансовую поддержку гранта из средств премии Бальзана, полученной П. Делинем в 2004 году, гранта фонда Саймонса и грантов РФФИ 10-01-93113-НЦНИЛ_а, 11-01-00393-а, 11-01-12072-офи-м-2011 во время работы над окончательной версией аргументов и написания статьи.

отличных от нуля. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть спектральную последовательность, сходящуюся от когомологий бар-конструкции алгебры когомологий DG-алгебры $\mathcal{RHT}_{(V,D)}$ к когомологиям бар-конструкции самой DG-алгебры $\mathcal{RHT}_{(V,D)}$, и воспользоваться известным описанием алгебры Ext для связной прямой суммы аугментированных алгебр [5, предложение 1.1 гл. 3]. Коммутативная алгебра Хопфа нулевых когомологий является косвободным произведением алгебры Хопфа, квадратично двойственной к алгебре замкнутых дифференциальных форм, и косвободной алгебры Хопфа с однородными кообразующими, занумерованными натуральными числами.

Различные свойства кошулеваемости алгебр мотивных когомологий (милноровской K-теории, когомологий Галуа и т.д.) играют важную роль в теории мотивов (см. [3], [4] и другие работы автора на данную тему; рассуждения, приведенные выше, являются новой иллюстрацией этого общего наблюдения). Однако в настоящее время наличие таких свойств является по большей части гипотезами, а не теоремами. Алгебры замкнутых дифференциальных форм на диске, рассматриваемые в настоящей работе, представляют собой интересное семейство алгебр, имеющих мотивное значение, кошулевость которых оказывается легко установить. Это и будет продемонстрировано ниже.

Автор благодарен А. М. Левину за постановку задачи. Эта работа была в основном выполнена, когда А. М. Л. и я оба были приглашены в Математический институт Макса Планка в Бонне весной 2003 года, и я хотел бы поблагодарить институт за гостеприимство.

§1. Модульная кошулевость

Пусть D — диск с координатами $z_1, \dots, z_u$. За немногими исключениями для нас не будет иметь значения, какая конкретно геометрическая категория подразумевается. Так, D может быть алгебраическим аффинным пространством над полем нулевой характеристики, формальным диском над таким полем, комплексно-аналитическим или вещественно-гладким диском. Можно также взять за D спектр алгебры многочленов или формальных степенных рядов с разделенными степенями над полем простой характеристики.

Пусть $0 \leq v \leq u$. Для любого $1 \leq s \leq v$ пусть L_s обозначает координатную гиперплоскость $\{z_s = 0\} \subset D$. Обозначим через Ω DG-алгебру де Рама регулярных дифференциальных форм на $D \setminus \bigcup_{s=1}^v L_s$ с логарифмическими особенностями вдоль L_s . Пусть $Z \subset \Omega$ — подалгебра замкнутых форм, т.е. ядро дерамовского дифференциала $d: \Omega \rightarrow \Omega$. Пусть $H = H(\Omega, d)$ — алгебра когомологий DG-алгебры Ω .

Обозначим через A внешнюю алгебру, порожденную замкнутыми 1-формами dz_s/z_s , $s \leq v$, и dz_r , $r > v$. Для нас важно только контролировать гомологические свойства A -модулей Ω и H . В частности, можно заменить диск на любое пространство, этально отображающееся в диск и удовлетворяющее подходящей версии леммы Пуанкаре. В примерах выше Ω является свободным A -модулем, порожденным Ω^0 , и H есть внешняя алгебра, порожденная формами dz_s/z_s , с очевидной структурой A -модуля, в которой $dz_s/z_s \in A$ действуют свободно и $dz_r \in A$ действуют тривиально на H .

Понятие *кошулевой алгебры*, введенное Придди [6] в контексте алгебр, локально конечномерных относительно дополнительной градуировки, и больше всего изучавшееся для алгебр с конечномерным пространством образующих [5],

можно без труда обобщить на полностью бесконечномерный случай [3]. То же относится к понятию *кошулева модуля* [4], введенному Бейлинсоном, Гинзбургом и Зёргелем [1]. Основная разница с локально конечномерным случаем состоит в том, что в бесконечномерной ситуации квадратичная двойственность связывает алгебры и коалгебры, а также модули и комодули.

Напомним эти определения. Неотрицательно градуированная алгебра A над полем k называется кошулевой, если $A_0 = k$ и $\mathrm{Tor}_{ij}^A(k, k) = 0$ для $i \neq j$. Когда алгебра A кошулева, неотрицательно градуированный левый A -модуль M называется кошулевым, если $\mathrm{Tor}_{ij}^A(k, M) = 0$ для $i \neq j$. Здесь первый индекс i обозначает гомологическую градуировку пространств Tor , а второй индекс j — внутреннюю градуировку (см. работы, упоминавшиеся выше). Отметим, что для любых неотрицательно градуированных алгебры A и модуля M из условия $A_0 = k$ следует, что $\mathrm{Tor}_{ij}^A(k, k) = 0 = \mathrm{Tor}_{ij}^A(k, M)$ для $i > j$. Мы будем использовать верхние и нижние индексы взаимозаменяемым образом для обозначения внутренних градуировок; никаких изменений знаков при переходе от верхних к нижним индексам и обратно не подразумевается.

Лемма. Пусть M — неотрицательно градуированный левый модуль над кошулевой алгеброй A . Тогда градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$ сосредоточено в градуировках i и $i + 1$ для всех i , если и только если $M_+ = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ — кошулев левый A -модуль в градуировке, сдвинутой на 1 (т. е. так, чтобы компонента M_1 попала в градуировку 0).

Доказательство. Утверждение следует из длинной точной последовательности $\dots \rightarrow \mathrm{Tor}_{i+1}^A(k, M_0) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^A(k, M_+) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^A(k, M) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^A(k, M_0) \rightarrow \dots$, поскольку градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^A(k, M_0)$ сосредоточено в градуировке i (в силу кошулевости алгебры A). $\square$

Теорема 1. Пусть (Ω, d) — неотрицательно градуированная DG -алгебра над полем k с дифференциалом степени 1; положим $Z = \ker d$ и $H = H(\Omega, d)$. Пусть A — кошулева алгебра и $f: A \rightarrow Z$ — морфизм градуированных алгебр. Предположим, что Ω и H — кошулевы левые A -модули по отношению к модульным структурам, индуцированным морфизмом f . Тогда $Z^+ = Z^1 \oplus Z^2 \oplus \dots$ — кошулев левый A -модуль в градуировке, сдвинутой на 1.

Доказательство. Для любого градуированного A -модуля M и $j \in \mathbb{Z}$ обозначим через $M(j)$ градуированный A -модуль с компонентами $M(j)^m = M^{m-j}$ и действием алгебры A , определенным по правилу $a \cdot x(j) = (-1)^{jn}(a \cdot x)(j)$ для $x \in M$ и $a \in A^n$. Рассмотрим комплекс градуированных A -модулей

$$C: \dots \longrightarrow \Omega(3) \longrightarrow \Omega(2) \longrightarrow \Omega(1) \longrightarrow Z.$$

Нас интересуют две спектральные последовательности гипергомологий с одним и тем же пределом, получающиеся при применении производного функтора $\mathrm{Tor}^A(k, -)$ к этому комплексу C . Конкретно, мы имеем $'E_{pq}^2, ''E_{pq}^1 \implies \mathrm{Tor}_{p+q}^A(k, C)$, где $'E_{pq}^2 = \mathrm{Tor}_p^A(k, H(q))$ и $''E_{pq}^1 = \mathrm{Tor}_q^A(k, \Omega(p))$ для $p > 0$, в то время как $''E_{0,q}^1 = \mathrm{Tor}_q^A(k, Z)$.

По предположению член $'E_{pq}^2$ сосредоточен во внутренней градуировке $p + q$, так что предельный член $\mathrm{Tor}_i^A(k, C)$ сосредоточен во внутренней градуировке i . Далее, член $''E_{pq}^1$ сосредоточен во внутренней градуировке $p + q$ для всех $p > 0$.

Теперь все компоненты члена $"E_{0,i}^1$ внутренней градуировки, отличной от i , должны убиваться дифференциалами $"d^r : "E_{r,i-r+1}^r \rightarrow "E_{0,i}^r$, так что член $"E_{0,i}^1$ сосредоточен во внутренних градуировках i и $i+1$. Остается воспользоваться леммой. $\square$

Для неотрицательно градуированной k -алгебры B положим $B' = k \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$. Согласно предыдущей лемме и [4, теорема 6.1], если $A \rightarrow B'$ — гомоморфизм градуированных алгебр, алгебра A кошулева и B_+ — кошулев левый A -модуль в градуировке, сдвинутой на 1, то алгебра B' кошулева. (Теорема 2 из §3 доставляет другое доказательство того же результата.) Поэтому в предположениях теоремы все три градуированные алгебры Ω' , H' и Z' кошулевы.

Следствие. *В любой из перечисленных выше геометрических категорий алгебра Z замкнутых дифференциальных форм на диске D с логарифмическими особенностями вдоль нескольких координатных гиперплоскостей L_s является кошулевой алгеброй.*

Доказательство. Как видно из обсуждения в начале параграфа, алгебра Ω логарифмических дифференциальных форм на D относительно $\{L_s\}$ и ее алгебра дерамовских когомологий H являются кошулевыми модулями над внешней алгеброй A , порожденной dz_s/z_s и dz_r . Кроме того, $Z^0 = k$. Поэтому утверждение следствия вытекает из доказанной выше теоремы 1 и теоремы 6.1 из работы [4]. $\square$

§2. Замечания о топологической кошулевости

Кошулевость градуированной алгебры Z — это условие точности бар-комплекса этой алгебры, компоненты которого суть прямые суммы тензорных произведений градуировочных компонент алгебры Z . Однако тензорные произведения градуировочных компонент алгебры Z не всегда являются естественным объектом для рассмотрения. Совершенно естественно рассматривать такие тензорные произведения, когда Z есть алгебра функций или форм на алгебраическом многообразии, но, возможно, не в том случае, когда Z есть алгебра форм на формальном, комплексно-аналитическом или вещественно-гладком диске. В последних случаях, может быть, лучше рассматривать пополненные тензорные произведения. Отметим, что, в частности, в задаче о локальном описании смешанных пучков Ходжа–Тейта возникает алгебра форм на комплексно-аналитическом диске (см. введение к настоящей работе и препринт [2]).

Конкретно, может быть желательным определить пополненное тензорное произведение $Z_{n_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} Z_{n_m}$ как пространство замкнутых форм на D^m степени n_t по отношению к t -й группе переменных с логарифмическими особенностями вдоль гиперплоскостей $D^t \times L_s \times D^{m-t-1}$. После этого можно построить пополненный бар-комплекс из таких пополненных тензорных произведений и задаться вопросом о его точности вне диагонали. Более того, можно рассматривать диагональные гомологии этого комплекса как пополненную версию коалгебры, кошулево двойственной к Z . Компонента степени n этой пополненной коалгебры есть пространство всех замкнутых форм на D^n степени 1 по отношению к каждой группе переменных с зануляющимися обратными образами относительно отображений $\text{Id}_D^{t-1} \times \Delta_D \times \text{Id}_D^{n-t-1} : D^{n-1} \rightarrow D^n$, где $\Delta_D : D \rightarrow D^2$ обозначает диагональное отображение.

С точки зрения специалиста по гомологической алгебре топологическая алгебра как таковая — это зыбкая почва, которой лучше по возможности избегать. Поэтому мы предлагаем простой линейно-алгебраический формализм для описания топологической кошулеваемости в указанном выше смысле, не зависящий ни от какого понятия топологического тензорного произведения.

С любой ассоциативной алгеброй Z с единицей над полем k можно связать семейство векторных пространств $Z_n = Z^{\otimes n}$, $n \geq 0$, снабженных линейными отображениями, индуцированными умножением и единицей в Z . Структура, которая таким образом получается, — это симплицальное k -векторное пространство $Z_\bullet$, снабженное отображением $k \rightarrow Z_\bullet$ в него из постоянного симплицального векторного пространства k .

Когда Z — градуированная алгебра, получается гораздо более богатая структура. (Квазиассоциативная градуированная) квазиалгебра $\mathcal{Z}$ над полем k — это семейство векторных пространств $\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m}$, где $m \geq 0$ и $n_t \in \mathbb{Z}$, снабженных отображениями квазиумножения

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_{t-1}, n_t + n_{t+1}, n_{t+2}, \dots, n_m}$$

и отображениями квазиединицы

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t, 0, n_{t+1}, \dots, n_m},$$

обладающими обычным свойствам отображений умножения и единицы между тензорными произведениями $\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} = \mathcal{Z}_{n_1} \otimes_k \dots \otimes_k \mathcal{Z}_{n_m}$ градуировочных компонент ассоциативной алгебры с единицей. Конкретнее, композиции отображений

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_s + n_{s+1}, \dots, n_t, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_s + n_{s+1}, \dots, n_t + n_{t+1}, \dots, n_m}$$

и

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_s, \dots, n_t + n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_s + n_{s+1}, \dots, n_t + n_{t+1}, \dots, n_m}$$

должны совпадать; композиции отображений

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_{t-1} + n_t, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_{t-1} + n_t + n_{t+1}, \dots, n_m}$$

и

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t + n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_{t-1} + n_t + n_{t+1}, \dots, n_m}$$

должны совпадать. Отображения квазиединицы должны коммутировать с отображениями квазиумножения; композиции

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t, 0, n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t + 0, n_{t+1}, \dots, n_m} = \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m}$$

и

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t, 0, n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t, 0 + n_{t+1}, \dots, n_m} = \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m}$$

должны быть тождественными отображениями. Компонента $\mathcal{Z}_\emptyset$ с $m = 0$ индексами должна быть отождествлена с k (ср. [5, §4 гл. 3]).

Квазиалгебра называется *неотрицательной*, если $\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} = 0$, как только $n_t < 0$ для некоторого $1 \leq t \leq m$. Неотрицательная квазиалгебра называется *положительной*, если все ее отображения квазиединицы являются изоморфизмами. Положительная квазиалгебра определяется своими компонентами $\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m}$ с положительными индексами $n_m > 0$ и отображениями квазиумножения между ними, удовлетворяющими уравнениям квазиассоциативности

(т. е. тем из сформулированных выше уравнений, которые зависят только от отображений квазиумножения).

Пусть Z — положительно градуированная ассоциативная алгебра над k , т. е. Z неотрицательно градуирована в очевидном смысле и $Z_0 = k$. Положим $Z_+ = Z/k$. Тогда можно ассоциировать с Z ее приведенный бар-комплекс B вида

$$k \longleftarrow Z_+ \longleftarrow Z_+ \otimes_k Z_+ \longleftarrow Z_+ \otimes_k Z_+ \otimes_k Z_+ \longleftarrow \cdots,$$

рассмотреть его градуировочную компоненту B_n внутренней градуировки n и взять тензорное произведение $\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m} = B_{n_1} \otimes_k \cdots \otimes_k B_{n_m}$ нескольких таких комплексов. Компоненты комплекса $\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m}$ суть прямые суммы тензорных произведений градуировочных компонент алгебры Z . Заменяя все такие тензорные произведения компонентами $\mathcal{Z}_{n'_1, \dots, n'_m}$ произвольной положительной квазиалгебры $\mathcal{Z}$, можно определить комплекс $\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m}$ как аддитивный функтор на абелевой категории положительных квазиалгебр. Положительная квазиалгебра $\mathcal{Z}$ называется *кошулевой*, если все комплексы $\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m}$ имеют гомологии только в гомологической степени $n_1 + \cdots + n_m$.

Обращая все стрелки в приведенных выше определениях, получаем определения (*квазикоассоциативных градуированных*) *квазикоалгебр* и, в частности, *положительных квазикоалгебр* и *кошулевых квазикоалгебр*. В частности, квазикоумножения суть отображения $\mathcal{C}_{n_1, \dots, n_{t-1}, n_t + n_{t+1}, n_{t+2}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{C}_{n_1, \dots, n_m}$, квазиединицы суть отображения $\mathcal{C}_{n_1, \dots, n_t, 0, n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{C}_{n_1, \dots, n_m}$, и кошулевость положительных квазикоалгебр определяется в терминах комплексов, имитирующих тензорные произведения градуировочных компонент приведенных кобар-комплексов положительно градуированных коалгебр.

Аддитивные категории кошулевых квазиалгебр и кошулевых квазикоалгебр эквивалентны. Функтор эквивалентности сопоставляет кошулевой квазиалгебре $\mathcal{Z}$ кошулеву квазикоалгебру $\mathcal{C}$ с компонентами $\mathcal{C}_{n_1, \dots, n_m} = H_{n_1 + \cdots + n_m}(\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m})$. Естественные сюръективные отображения комплексов

$$\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_{t-1}, n_t + n_{t+1}, n_{t+2}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m}$$

индуцируют отображения квазикоумножения на $\mathcal{C}$. Обратный функтор определяется аналогичным образом в терминах кобар-комплексов квазикоалгебр.

В частности, все отображения квазиумножения между компонентами с неотрицательными индексами у кошулевой квазиалгебры сюръективны. Это аналог условия порожденности градуированной алгебры Z компонентой Z_1 для случая квазиалгебр. Есть также аналог условия квадратичности и двойственные условия для кошулевых квазикоалгебр. В силу этих условий двойственные кошулевы квазиалгебра $\mathcal{Z}$ и квазикоалгебра $\mathcal{C}$ однозначно определяются векторными пространствами $\mathcal{Z}_{1, \dots, 1} \simeq \mathcal{C}_{1, \dots, 1}$ и точными последовательностями

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1} \longrightarrow \mathcal{C}_{1, \dots, 1} \simeq \mathcal{Z}_{1, \dots, 1} \longrightarrow \mathcal{Z}_{1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1} \longrightarrow 0.$$

Чтобы соответствующие квазикоалгебра $\mathcal{C}$ и квазиалгебра $\mathcal{Z}$ были кошулевыми, набор из $n - 1$ подпространств $\mathcal{C}_{1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1}$ в векторном пространстве $\mathcal{C}_{1, \dots, 1}$ (n единиц) должен быть дистрибутивным для всех n (ср. [3, §2.2]).

Квазиалгебра с *внешними умножениями* — это квазиалгебра $\mathcal{Z}$, снабженная линейными отображениями

$$\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_t} \otimes_k \mathcal{Z}_{n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m},$$

совместимыми с отождествлением $\mathcal{Z}_\emptyset = k$ и коммутирующими с отображениями квазиумножения и квазиединицы. Квазикоалгебры с внешними умножениями определяются аналогично. На этот раз стрелки не обращаются, т. е. внешние умножения в квазикоалгебре имеют вид

$$\mathcal{C}_{n_1, \dots, n_t} \otimes_k \mathcal{C}_{n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{C}_{n_1, \dots, n_m}.$$

Квазиалгебра или квазикоалгебра, соответствующая градуированной алгебре или коалгебре, естественным образом снабжена внешними умножениями, и квази(ко)алгебра с внешними умножениями происходит из (однозначно определенной) градуированной (ко)алгебры тогда и только тогда, когда все ее отображения внешнего умножения являются изоморфизмами.

Эквивалентность между категориями кошулевых квазиалгебр и кошулевых квазикоалгебр преобразует квазиалгебры с внешними умножениями в квазикоалгебры с внешними умножениями и обратно. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить естественные внешние умножения

$$\mathcal{B}_{n_1, \dots, n_t} \otimes_k \mathcal{B}_{n_{t+1}, \dots, n_m} \longrightarrow \mathcal{B}_{n_1, \dots, n_m}$$

на бар-комплексах квазиалгебры с внешними умножениями и аналогичные внешние умножения на кобар-комплексах квазикоалгебры с внешними умножениями.

§3. Модульная кошулевость для квазиалгебр

Пусть A — кошулева алгебра и $\mathcal{Z}$ — положительная квазиалгебра над полем k . Предположим, что A действует слева на $\mathcal{Z}$ в следующем смысле: для любых $l_p, \dots, l_1, n_0, \dots, n_q \geq 0$, $p, q \geq 0$, имеются линейные отображения

$$A_n \otimes_k \mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1, n_0, \dots, n_q} \longrightarrow \mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1, n+n_0, n_1, \dots, n_q},$$

превращающие $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1, n, n_0, \dots, n_q}$ в градуированный левый A -модуль для любых фиксированных $l_p, \dots, l_1, n_1, \dots, n_q$ и коммутирующие с отображениями квазиумножения

$$\mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1, n_0, \dots, n_q} \longrightarrow \mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1, n_0, \dots, n_t + n_{t+1}, \dots, n_q}$$

для всех $0 \leq t < q$.

Для любой положительно градуированной ассоциативной алгебры Z над k рассмотрим тензорное произведение $E_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q} = Z_{l_p} \otimes_k \dots \otimes_k Z_{l_0} \otimes_k B_{n_1} \otimes_k \dots \otimes_k B_{n_q}$ градуировочных компонент алгебры Z и ее приведенного бар-комплекса B (с тривиальными коэффициентами). Члены комплекса $E_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q}$ суть прямые суммы тензорных произведений градуировочных компонент алгебры Z ; заменив все такие тензорные произведения компонентами $\mathcal{Z}_{n'_1, \dots, n'_m}$ положительной квазиалгебры $\mathcal{Z}$, получим комплекс $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q}$. Действие алгебры A на квазиалгебре $\mathcal{Z}$ индуцирует ее действие

$$A_n \otimes_k \mathcal{E}_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q} \longrightarrow \mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1, n+l_0; n_1, \dots, n_q}$$

на комплексах $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q}$, а следовательно, и на их когомологиях.

Теорема 2. *Предположим, что градуированный A -модуль*

$$\bigoplus_{l_0=1}^{\infty} H_{n_1 + \dots + n_q}(\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q})$$

кошулев в градуировке, сдвинутой на 1, для любых фиксированных $l_p, \dots, l_1, n_1, \dots, n_q \geq 1$, $p, q \geq 0$. Тогда квазиалгебра $\mathcal{Z}$ кошулева.

Доказательство. Покажем, что гомологии комплекса $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_0, \dots, n_q}$ сосредоточены в градуировке $n_0 + \dots + n_q$ для всех $l_p, \dots, l_1, n_0, \dots, n_q \geq 1$, $p, q \geq 0$. Воспользуемся индукцией по $n_0 + \dots + n_q$.

Представим себе, что имеется морфизм положительно градуированных алгебр $A \rightarrow Z$, и рассмотрим бикомплекс $F = \bigoplus_{t', t''=0}^{\infty} A_+^{\otimes t'} \otimes_k Z \otimes_k Z_+^{\otimes t''}$ с одним дифференциалом, индуцированным дифференциалом приведенного бар-комплекса алгебры A с коэффициентами в левом A -модуле Z , и другим, индуцированным дифференциалом приведенного бар-комплекса алгебры Z с коэффициентами в правом Z -модуле Z . Рассмотрим компоненту F_{n_0} комплекса F (полной) внутренней градуировки n_0 и возьмем ее тензорное произведение $Z_{l_p} \otimes_k \dots \otimes_k Z_{l_1} \otimes_k F_{n_0} \otimes_k B_{n_1} \otimes_k \dots \otimes_k B_{n_q}$ с компонентами алгебры Z и ее приведенного бар-комплекса B (с тривиальными коэффициентами). Обозначим полученный таким образом комплекс через $F_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$. Компоненты этого комплекса суть прямые суммы тензорных произведений градуировочных компонент алгебр A и Z . Переносим тензорные произведения компонент алгебры A налево в этих тензорных произведениях и заменяя все тензорные произведения компонент алгебры Z компонентами $\mathcal{Z}_{n'_1, \dots, n'_{m'}}$ положительной квазиалгебры $\mathcal{Z}$, получаем комплекс $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$, зависящий как аддитивный функтор от квазиалгебры $\mathcal{Z}$ с левым действием A .

Используя версию стягивающей гомотопии бар-комплекса алгебры Z с коэффициентами в Z для случая квазиалгебр, индуцированную изоморфизмами $\mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1; n'_0, \dots, n'_{q'}} \rightarrow \mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1; 0, n'_0, \dots, n'_{q'}}$, можно видеть, что комплекс $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ квазиизоморфен тензорному произведению компоненты внутренней градуировки n_0 приведенного бар-комплекса алгебры A (с тривиальными коэффициентами) и комплекса $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_1, \dots, n_q}$. Поэтому из предположения индукции следует, что гомологии $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ сосредоточены в гомологической градуировке $n_0 + \dots + n_q$. С другой стороны, имеется естественный сюръективный морфизм комплексов $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q} \rightarrow \mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_0, \dots, n_q}$. Мы покажем, что гомологии ядра этого отображения сосредоточены в гомологических градуировках $n_0 + \dots + n_q$ и $n_0 + \dots + n_q - 1$; из этого будет следовать, что гомологии комплекса $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_0, \dots, n_q}$ сосредоточены в градуировке $n_0 + \dots + n_q$.

В самом деле, пусть $\mathcal{F}'_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ — подкомплекс в $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$, состоящий из всех компонент, в которых у тензорного сомножителя $\mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1; n'_0, \dots, n'_{q'}}$ все индексы положительны (т.е. $n'_0 \geq 1$). Тогда факторкомплекс комплекса $\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ по $\mathcal{F}'_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ изоморфен прямой сумме тензорных произведений компоненты внутренней градуировки n приведенного бар-комплекса алгебры A (с тривиальными коэффициентами) и комплекса $\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_0 - n, n_1, \dots, n_q}$. Из предположения индукции следует, что ядро отображения

$$\mathcal{F}_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q} / \mathcal{F}'_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q} \longrightarrow \mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1; n_0, \dots, n_q}$$

имеет гомологии только в гомологической градуировке $n_0 + \dots + n_q$.

С другой стороны, комплекс $\mathcal{F}'_{l_p, \dots, l_1; n_0; n_1, \dots, n_q}$ имеет конечную возрастающую фильтрацию, индексами которой служат суммы $n'_1 + \dots + n'_{q'}$ индексов тензорных сомножителей $\mathcal{Z}_{l_p, \dots, l_1; n'_0, \dots, n'_{q'}}$. Присоединенные факторы этой фильтрации суть

компоненты внутренней градуировки n бар-комплексов алгебры A с коэффициентами в комплексах градуированных A -модулей $\bigoplus_{l_0=1}^{\infty} \mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1, l_0; n_0-n, n_1, \dots, n_q}$. Из предположения индукции следует, что они квазиизоморфны компонентам внутренней градуировки n бар-комплексов алгебры A с коэффициентами в градуированных модулях

$$\bigoplus_{l_0=1}^{\infty} H_{n_0+\dots+n_q-n}(\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_1, l_0; n_0-n, n_1, \dots, n_q}),$$

помещенных в гомологическую градуировку $n_0 + \dots + n_q - n$. Согласно предположению о модульной кошулевости в формулировке теоремы, их гомологии сосредоточены в гомологической градуировке $n_0 + \dots + n_q - 1$. (Ср. [4, доказательство теоремы 6.1].) $\square$

Наконец, вернемся к случаю, когда $\mathcal{Z}_{n_1, \dots, n_m} = \mathcal{Z}_{n_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{Z}_{n_m}$ есть квазиалгебра замкнутых форм на формальном, комплексно-аналитическом или вещественно-гладком диске, определенная в §2. Квазиумножение на $\mathcal{Z}$ определяется с помощью диагонального вложения $\Delta_D: D \rightarrow D \times D$. Векторное пространство $H_{n_1+\dots+n_q}(\mathcal{E}_{l_p, \dots, l_0; n_1, \dots, n_q})$ описывается как пространство замкнутых форм на $D^{p+1+n_1+\dots+n_q}$ степеней $l_1, \dots, l_0$ по первым $p+1$ группам переменных и 1 по каждой из последних $n_1 + \dots + n_q$ групп, регулярных вне гиперплоскостей $D^t \times L_s \times D^{p+1+n_1+\dots+n_q-t}$ и имеющих не более чем логарифмические особенности вдоль этих гиперплоскостей, с зануляющимися обратными образами относительно отображений

$$\mathrm{Id}_D^{p+n_1+\dots+n_{t-1}+s} \times \Delta_D \times \mathrm{Id}_D^{n_t-s-1+n_{t+1}+\dots+n_q} : D^{p+n_1+\dots+n_q} \longrightarrow D^{p+1+n_1+\dots+n_q}$$

для всех $1 \leq s \leq n_t - 1$.

Чтобы показать, что такие пространства замкнутых форм удовлетворяют условию модульной кошулевости из теоремы 2, достаточно рассмотреть их как пространства замкнутых форм степени l_0 на диске D , координатами в котором служит $(p+1)$ -я группа переменных, зависящих от параметров, в роли которых выступают переменные из всех остальных групп. Следует включить такие параметры в утверждение теоремы 1 и использовать лемму Пуанкаре с параметрами (доказываемую с помощью обычной процедуры интегрирования, которая сохраняет условия, наложенные на зависимость наших форм от параметров).

Поэтому квазиалгебра $\mathcal{Z}$ кошулева, и квадратично двойственная к ней квазикоалгебра $\mathcal{C}$, описанная в §2, также кошулева. Кроме того, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{C}$ очевидным образом являются квазиалгеброй и квазикоалгеброй с внешним умножением, и их структуры внешнего умножения соответствуют одна другой при кошулевой двойственности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc., **9:2** (1996), 473–527.
- [2] A. Levin, *Note on $\mathbb{R}$ -Hodge–Tate sheaves*, Max Planck Institute for Mathematics Preprint, MPIM2001-37; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints>.
- [3] L. Positselski, A. Vishik, *Koszul duality and Galois cohomology*, Math. Res. Lett., **2:6** (1995), 771–781; <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9507010>.

- [4] L. Positselski, *Koszul property and Bogomolov's conjecture*, Int. Math. Res. Notices, **2005**:31 (2005), 1901–1936.
- [5] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic Algebras*, University Lecture Series, vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [6] S. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc., **152**:1 (1970), 39–60.

Факультет математики и лаборатория
алгебраической геометрии НИУ ВШЭ
Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: posic@mccme.ru

Поступило в редакцию
13 августа 2010 г.