Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Авдеев, Н. Е. Горфинкель, Гармонический анализ на сферических однородных пространствах с разрешимым стабилизатором, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 1–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:48:03

Гармонический анализ на сферических однородных пространствах с разрешимым стабилизатором*

© 2012. Р. С. Авдеев, Н. Е. Горфинкель

Для всех сферических однородных пространств G/H , где G — односвязная полупростая алгебраическая группа, а H — ее связная разрешимая подгруппа, вычисляются спектры представлений группы G в пространствах регулярных сечений однородных линейных расслоений над G/H .

§1. Введение

1.1. Пусть G — связная полупростая комплексная алгебраическая группа и H — ее замкнутая подгруппа. Одной из задач гармонического анализа на однородном пространстве G/H является нахождение спектра представления группы G в пространстве $\mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H . Важной характеристикой этого спектра является так называемая *полугруппа старших весов* $\Lambda_+(G/H)$. Она состоит из тех доминантных весов группы G , для которых пространство $\mathbb{C}[G/H]$, рассматриваемое как G -модуль, содержит неприводимый G -подмодуль со старшим весом λ .

Описанная выше задача допускает естественное обобщение. Таким обобщением является задача о нахождении спектров представлений группы G в пространствах регулярных сечений однородных линейных расслоений над G/H . Совокупность этих спектров также определяет некоторую полугруппу $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$, которая называется *расширенной полугруппой старших весов* однородного пространства G/H . Точное определение этой полугруппы будет дано в разд. 1.2. Полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ естественным образом отождествляется с подполугруппой в $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ (см. разд. 1.2).

Подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H называется *сферическим*), если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H . В работе [1] доказан следующий критерий сферичности подгруппы H .

Теорема 1 [1, теорема 1]. (1) *Подгруппа $H \subset G$ является сферической тогда и только тогда, когда для всякого однородного линейного расслоения L над G/H спектр представления группы G в пространстве регулярных сечений расслоения L прост.*

(2) *Если многообразие G/H квазиаффинно, то подгруппа $H \subset G$ является сферической тогда и только тогда, когда спектр представления группы G в пространстве $\mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H прост.*

Из этой теоремы вытекает, что для сферического однородного пространства G/H полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ определяет G -модульную структуру в пространствах регулярных сечений всех однородных линейных расслоений над

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00648-а).

G/H , а полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ определяет структуру G -модуля в пространстве $\mathbb{C}[G/H]$. В связи с этим представляет интерес вычисление полугрупп $\Lambda_+(G/H)$ и $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ для сферических однородных пространств G/H .

На настоящий момент значительные продвижения достигнуты в вычислении полугрупп старших весов для *аффинных* сферических однородных пространств G/H (т.е. таких, для которых H редуктивна). А именно, имеется описание полугрупп $\Lambda_+(G/H)$ для всех *строго неприводимых* односвязных аффинных сферических однородных пространств G/H (их определение см., например, в [2, п. 1.4]), к числу которых относятся все односвязные аффинные сферические однородные пространства простых групп. Для таких пространств G/H в случае простой группы G в работе [3] вычислены полугруппы $\Lambda_+(G/H)$, а в случае непростой G в работе [2] вычислены полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$. Используя эти результаты, с учетом несложных дополнительных соображений можно получить описание полугрупп $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ для *всех* односвязных аффинных сферических однородных пространств G/H , однако этот момент пока не отражен в литературе.

Замечание 1. Насколько известно авторам настоящей работы, в случае непростой группы G полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H были вычислены Ю. В. Дзядыком еще в 1985 г. Однако эти результаты до сих пор не опубликованы.

В случае неаффинных сферических однородных пространств G/H ситуация с вычислением полугрупп $\Lambda_+(G/H)$ или $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ значительно сложнее: авторам настоящей работы известны только некоторые частные случаи вычисления этих полугрупп. Например, полугруппу $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ несложно описать для случая, когда H является промежуточной подгруппой между некоторой параболической подгруппой группы G и ее коммутантом (такие подгруппы H — это в точности *орисферические* подгруппы, т.е. подгруппы, содержащие некоторую максимальную унипотентную подгруппу группы G ; об этом см. [4, п. 2]). Другой частный случай рассмотрен в [5], где вычислены полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ в ситуации, когда группа G односвязна и $H = TU'$ (U — максимальная унипотентная подгруппа в G , U' — ее коммутант, T — максимальный тор в G , нормализующий U).

В общем случае для сферических однородных пространств G/H представляется более удобным вычислять полугруппу $\hat{\Lambda}_+(G/H)$. Это обусловлено следующей причиной: если группа G односвязна, то для любой сферической подгруппы $H \subset G$ полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободна (см. теорему 2 в разд. 1.3). В этом случае для ее вычисления достаточно найти ее ранг и предъявить в нужном количестве ее неразложимые элементы. Что касается полугруппы $\Lambda_+(G/H)$, то она оказывается свободной гораздо реже. А именно, в случае односвязной G и связной H известным достаточным условием свободы этой полугруппы является отсутствие у группы H нетривиальных характеров (см. [6, предложение 2]). Отметим, что, вообще говоря, это условие является весьма ограничительным.

В настоящей работе вычисляются полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ для всех сферических однородных пространств G/H , где G — односвязная полупростая группа и H — ее связная разрешимая подгруппа. Используемый для этой цели подход

соединяет в себе идеи, содержащиеся в работах [5] и [7]. А именно, метод вычисления полугрупп $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ в случае $H = TU'$ (см. выше), применявшийся в [5], мы обобщаем на случай произвольной связной разрешимой сферической подгруппы $H \subset G$, используя при этом развитую в [7] структурную теорию связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах. Результаты вычислений формулируются в терминах тех комбинаторных данных, которые рассматриваются в [7]. Основным результатом работы является теорема 4 (см. разд. 2.1).

1.2. В данной работе основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, все топологические термины относятся к топологии Зарисского, все рассматриваемые группы предполагаются алгебраическими, а их подгруппы — замкнутыми. Касательные алгебры групп, обозначенных прописными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами. Для любой группы L через $\mathfrak{X}(L)$ обозначается группа ее характеров, записываемая аддитивно.

Везде далее через G обозначается связная полупростая алгебраическая группа. Предполагается, что в G фиксированы борелевская подгруппа B и содержащийся в ней максимальный тор T . Буквой U обозначается максимальная унипотентная подгруппа группы G , содержащаяся в B . Группа $\mathfrak{X}(B)$ отождествляется с $\mathfrak{X}(T)$ посредством ограничения характеров с B на T . Множество доминантных весов группы G по отношению к B обозначается через $\Lambda_+(G)$, $\Lambda_+(G) \subset \mathfrak{X}(B)$. Это обозначение согласуется с введенным в разд. 1.1 обозначением $\Lambda_+(G/H)$ в случае $H = \{e\}$. При $\lambda \in \Lambda_+(G)$ через $V(\lambda)$ обозначается неприводимый G -модуль со старшим весом λ , а через v_λ — фиксированный старший вектор в $V(\lambda)$ (по отношению к B). Для всякого веса $\lambda \in \Lambda_+(G)$ через λ^* обозначается старший вес неприводимого G -модуля, сопряженного к $V(\lambda)$.

Действия группы G самой на себе левыми сдвигами $((g, x) \mapsto gx)$ и правыми сдвигами $((g, x) \mapsto xg^{-1})$ индуцируют ее представления в пространстве $\mathbb{C}[G]$ регулярных функций на G по формулам $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ и $(gf)(x) = f(xg)$ соответственно $(g, x \in G, f \in \mathbb{C}[G])$. Для краткости первое из этих действий будем называть действием *слева*, а второе — действием *справа*. Для любой подгруппы $L \subset G$ через ${}^L\mathbb{C}[G]$ (соответственно $\mathbb{C}[G]^L$) будем обозначать алгебру функций из $\mathbb{C}[G]$, инвариантных относительно действия L слева (соответственно справа).

Пусть $H \subset G$ — произвольная подгруппа. Напомним (см. [8, теорема 4]), что однородные линейные расслоения над G/H находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами группы H . А именно, характеру $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ отвечает однородное линейное расслоение $L(\chi) = (G \times \mathbb{C}_\chi)/H$ над G/H , где H действует на G правыми сдвигами, а в пространстве $\mathbb{C}_\chi \simeq \mathbb{C}$ — при помощи характера χ . Слоем расслоения $L(\chi)$ над точкой eH является прямая $\mathbb{C}_\chi$. При каждом $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ имеется естественный G -эквивариантный изоморфизм между пространством $\Gamma(L(-\chi))$ регулярных сечений расслоения $L(-\chi)$ и пространством

$$V_\chi = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gh) = \chi(h)f(g) \forall g \in G, \forall h \in H\} \subset \mathbb{C}[G].$$

При этом изоморфизме каждой функции $f \in V_\chi$ соответствует сечение $\gamma_f \in \Gamma(L(-\chi))$, задаваемое формулой $\gamma_f(gH) = [g, f(g)]$, где $[g, f(g)]$ — класс пары $(g, f(g))$ в $L(-\chi)$. Легко видеть, что пространство $V_0 \simeq \Gamma(L(0))$, отвечающее

характеру $\chi = 0$, есть не что иное, как пространство $\mathbb{C}[G]^H = \mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H . Отметим, что $\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(H)} V_\chi = \mathbb{C}[G]^{H_0}$, где подгруппа $H_0 \subset H$ — пересечение ядер всех характеров группы H .

Пусть $\lambda \in \Lambda_+(G)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Функцию $f \in \mathbb{C}[G]$ назовем $(B \times H)$ -полуинвариантной веса (λ, χ) , если f полуинвариантна веса λ относительно действия группы B слева и полуинвариантна веса χ относительно действия группы H справа, т. е. $f(b^{-1}gh) = \lambda(b)\chi(h)f(g)$ при всех $b \in B$, $g \in G$, $h \in H$. Всякая ненулевая $(B \times H)$ -полуинвариантная функция веса (λ, χ) является старшим вектором некоторого неприводимого G -подмодуля в V_χ со старшим весом λ , и наоборот. Подпространство в $\mathbb{C}[G]$, состоящее из всех $(B \times H)$ -полуинвариантных функций веса (λ, χ) , обозначим через $A(\lambda, \chi)$. Легко видеть, что кратность вхождения неприводимого G -модуля со старшим весом λ в G -модуль V_χ равна $\dim A(\lambda, \chi)$.

Определение 1. *Расширенной полугруппой старших весов $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ однородного пространства G/H называется множество пар (λ, χ) ($\lambda \in \Lambda_+(G)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$), для которых $\dim A(\lambda, \chi) \geq 1$.*

Из включения $A(\lambda_1, \chi_1)A(\lambda_2, \chi_2) \subset A(\lambda_1 + \lambda_2, \chi_1 + \chi_2)$ вытекает, что множество $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ действительно является полугруппой. Отметим, что эта полугруппа всегда содержит элемент $(0, 0)$, поскольку в пространстве $V_0 = \mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H всегда содержатся константы. Таким образом, полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ является моноидом.

Легко видеть, что $\Lambda_+(G/H) \simeq \{(\lambda, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H) \mid \chi = 0\} \subset \widehat{\Lambda}_+(G/H)$. В частности, если $\mathfrak{X}(H) = 0$, то $\Lambda_+(G/H) \simeq \widehat{\Lambda}_+(G/H)$.

Напомним, что имеется следующий изоморфизм $(G \times G)$ -модулей:

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(G)} V(\lambda^*) \otimes V(\lambda), \quad (1)$$

где в левой части $G \times G$ действует слева и справа, а в каждом слагаемом правой части левый (соответственно правый) множитель группы $G \times G$ действует на левом (соответственно правом) тензорном сомножителе. Отметим, что при фиксированном $\lambda \in \Lambda_+(G)$ вложение $(G \times G)$ -модуля $V(\lambda^*) \otimes V(\lambda)$ в $\mathbb{C}[G]$ осуществляется следующим образом: элементу $u \otimes v \in V(\lambda^*) \otimes V(\lambda)$ соответствует функция, значение которой в точке $g \in G$ равно $\langle u, gv \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — естественное спаривание между $V(\lambda^*)$ и $V(\lambda)$. При изоморфизме (1) подпространству $A(\lambda^*, \chi) \subset \mathbb{C}[G]$ соответствует подпространство $v_{\lambda^*} \otimes V(\lambda)_\chi^{(H)} \subset V(\lambda^*) \otimes V(\lambda)$, где $V(\lambda)_\chi^{(H)} \subset V(\lambda)$ — подпространство H -полуинвариантных векторов веса χ . Отсюда следует, что $\dim A(\lambda^*, \chi) = \dim V(\lambda)_\chi^{(H)}$ и $(\lambda^*, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H)$ тогда и только тогда, когда $V(\lambda)_\chi^{(H)} \neq 0$.

1.3. Теперь пусть $H \subset G$ — сферическая подгруппа. В этом случае из теоремы 1 следует, что условие $(\lambda^*, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H)$ равносильно любому из условий $\dim A(\lambda^*, \chi) = 1$ или $\dim V(\lambda)_\chi^{(H)} = 1$.

Важную априорную информацию о полугруппе $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ сообщает

Теорема 2. *Если группа G односвязна, то для всякой сферической подгруппы $H \subset G$ полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ свободна. Точнее, полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ изоморфна полугруппе $\mathcal{D}(G/H)$ эффективных B -инвариантных дивизоров в G/H ,*

свободно порожденной конечным количеством B -инвариантных простых дивизоров в G/H .

В случае связной сферической подгруппы $H \subset G$ тот факт, что полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободна, может быть доказан при помощи рассуждения, принадлежащего Д. И. Панюшеву, хотя сам он в своей работе [6] применил его в более узкой ситуации — для доказательства того, что полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ свободна при $\mathfrak{X}(H) = 0$ (см. [6, предложение 2]). Адаптацию этого рассуждения к рассматриваемой ситуации см. в [2, теорема 1]. Приводимое ниже доказательство теоремы 2 в общем случае сообщено авторам Д. А. Тимашёвым.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим отображение $\rho: \hat{\Lambda}_+(G/H) \rightarrow \mathcal{D}(G/H)$, заданное следующим образом. Элементу $(\lambda, \chi) \in \hat{\Lambda}_+(G/H)$ сопоставим дивизор нулей (произвольного) ненулевого сечения из одномерного подпространства $A(\lambda, \chi) \subset V_\chi \simeq \Gamma(L(-\chi))$. Легко видеть, что этот дивизор B -инвариантен и что отображение ρ является гомоморфизмом полугрупп. Обратно, пусть $D \in \mathcal{D}(G/H)$ — произвольный дивизор. Как и всякий дивизор Вейля на G/H , дивизор D является локально главным и потому определяет линейное расслоение L над G/H вместе с сечением s (определенным однозначно с точностью до пропорциональности) таким образом, что D является дивизором сечения s . Поскольку дивизор D эффективен, сечение s регулярно. Далее, в силу односвязности группы G ее действие на G/H «поднимается» до действия на L , т. е. расслоение L является однородным (см. [8, предложение 1 и теорема 4]). Из B -инвариантности дивизора D получаем, что сечение s является B -полуинвариантным. Отсюда следует, что ρ — биекция и, следовательно, изоморфизм. $\square$

Замечание 2. Поскольку для односвязной группы G алгебра $\mathbb{C}[G]$ факториальна (см. [8, следствие из предложения 1]), в условиях теоремы 2 полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ изоморфна также полугруппе эффективных $(B \times H)$ -инвариантных дивизоров в G . При этом изоморфизме элементу $(\lambda, \chi) \in \hat{\Lambda}_+(G/H)$ соответствует дивизор нулей (любой) ненулевой $(B \times H)$ -полуинвариантной функции из $A(\lambda, \chi)$. В случае связной подгруппы H полугруппа эффективных $(B \times H)$ -инвариантных дивизоров в G свободно порождается конечным множеством простых $(B \times H)$ -инвариантных дивизоров. При этом элемент $(\lambda, \chi) \in \hat{\Lambda}_+(G/H)$ неразложим тогда и только тогда, когда соответствующая ему ненулевая $(B \times H)$ -полуинвариантная функция из $A(\lambda, \chi)$ неприводима в $\mathbb{C}[G]$.

1.4. Некоторые обозначения и соглашения.

e — единичный элемент произвольной группы;

$|X|$ — мощность конечного множества X ;

V^* — пространство линейных функций на векторном пространстве V ;

$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ — диагональная матрица порядка n с элементами $a_1, \dots, a_n$ на диагонали.

Для группы L запись $L = L_1 \ltimes L_2$ означает, что L разлагается в полупрямое произведение своих подгрупп L_1, L_2 , т. е. $L = L_1 L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{e\}$ и подгруппа L_2 нормальна в L .

Отождествим решетку $\mathfrak{X}(T)$ с подрешеткой в $\mathfrak{t}^*$, сопоставив каждому характеру $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ его дифференциал $d\mu \in \mathfrak{t}^*$.

Зафиксируем в $\mathfrak{X}(T)$ (и, тем самым, в $\mathfrak{t}^*$) систему корней Δ относительно T и систему положительных корней $\Delta_+ \subset \Delta$ по отношению к B . Пусть $\Pi =$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Delta_+$ — система простых корней, и пусть $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — фундаментальные веса, отвечающие простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответственно. В случае односвязной группы G имеем $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathfrak{X}(T)$.

Для всякого корня $\alpha \in \sum_{\gamma \in \Pi} k_{\gamma} \gamma \in \Delta_+$ положим $\text{Supp } \alpha = \{\gamma \mid k_{\gamma} > 0\}$.

Пусть $W = N_G(T)/T$ — группа Вейля. Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, инвариантное относительно W . При $\lambda, \mu \in \mathfrak{X}(T)$ ($\mu \neq 0$) положим $\langle \lambda \mid \mu \rangle = 2(\lambda, \mu)/(\mu, \mu)$.

Пусть $\Delta^{\vee} \subset \mathfrak{t}$ — система корней, двойственная к Δ . Для каждого корня $\alpha \in \Delta$ обозначим через h_{α} соответствующий ему элемент из $\Delta^{\vee}$.

В каждом корневом подпространстве $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{g}$ выберем базисный вектор e_{α} так, чтобы для всякого $\alpha \in \Delta$ выполнялось условие $[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha}$.

Благодарности. Авторы глубоко признательны Э. Б. Винбергу и Д. А. Тимашёву за прочтение предыдущей версии работы и ценные замечания.

§2. Формулировка основного результата

2.1. Для того чтобы сформулировать основную теорему, нам потребуются некоторые сведения из структурной теории связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах, см. [7].

Пусть $H \subset B$ — связная разрешимая подгруппа и $N \subset U$ — ее унитарный радикал. Будем говорить, что подгруппа H *стандартно вложена* в B (по отношению к T), если подгруппа $S = H \cap T \subset T$ является максимальным тором в H . В этой ситуации, очевидно, имеем $H = S \ltimes N$. Всякую связную разрешимую подгруппу в G при помощи сопряжения подходящим элементом из G можно перевести в подгруппу, которая стандартно вложена в B .

Пусть фиксирована стандартно вложенная в B связная разрешимая подгруппа $H \subset G$. Как и выше, положим $S = H \cap T$ и $N = H \cap U$, так что $H = S \ltimes N$. Группы $\mathfrak{X}(H)$ и $\mathfrak{X}(S)$ будем отождествлять посредством ограничения характеров с H на S . Обозначим через $\tau: \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ отображение ограничения характеров тора T на S . Пусть $\Phi = \tau(\Delta_+) \subset \mathfrak{X}(S)$ — система весов действия тора S на $\mathfrak{u}$ посредством присоединенного представления группы G . Имеем $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{u}_{\varphi}$, где $\mathfrak{u}_{\varphi} \subset \mathfrak{u}$ — весовое подпространство веса φ относительно S . Пусть $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{n}_{\varphi}$ — разложение алгебры $\mathfrak{n}$ в прямую сумму весовых подпространств относительно тора S ; при этом для всякого $\varphi \in \Phi$ имеем $\mathfrak{n}_{\varphi} \subset \mathfrak{u}_{\varphi}$. Для каждого $\varphi \in \Phi$ обозначим через c_{φ} коразмерность пространства $\mathfrak{n}_{\varphi}$ в пространстве $\mathfrak{u}_{\varphi}$.

Во введенных обозначениях имеет место следующий критерий сферичности связной разрешимой подгруппы в G .

Теорема 3 [7, теорема 1]. *Пусть $H \subset G$ — связная разрешимая подгруппа, стандартно вложенная в B . Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) *подгруппа H является сферической в G ;*
- (2) *для всякого $\varphi \in \Phi$ выполнено неравенство $c_{\varphi} \leq 1$, и все веса с условием $c_{\varphi} = 1$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$.*

Далее мы предполагаем, что $H \subset G$ — связная разрешимая сферическая подгруппа, стандартно вложенная в B , и сохраняем все введенные выше обозначения. Положим $\Psi = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \not\subset \mathfrak{n}\} \subset \Delta_+$.

Определение 2. Корни из множества Ψ называются *активными*.

Обозначим все веса $\varphi \in \Phi$, для которых $c_\varphi = 1$, через $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. При $i = 1, \dots, m$ положим $\Psi_i = \{\alpha \in \Psi \mid \tau(\alpha) = \varphi_i\}$ и $\mathfrak{u}_i = \bigoplus_{\alpha \in \Psi_i} \mathfrak{g}_\alpha$. Очевидно, что $\Psi = \Psi_1 \cup \dots \cup \Psi_m$ и $\mathfrak{u}_i \subset \mathfrak{u}_{\varphi_i}$.

Множество активных корней обладает следующим свойством (см. [7, лемма 4]): если α — активный корень и $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторых корней $\beta, \gamma \in \Delta_+$, то ровно один из корней β, γ является активным.

Определение 3. Будем говорить, что активный корень β *подчинен* активному корню α , если существует такой корень $\gamma \in \Delta_+$, что $\alpha = \beta + \gamma$.

Предложение 1 [7, предложение 3]. Пусть α — активный корень. Тогда существует единственный простой корень $\pi(\alpha) \in \text{Supp } \alpha$, обладающий следующим свойством: если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ для некоторых корней $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_+$, то из двух корней α_1, α_2 активным является тот и только тот, носитель которого не содержит $\pi(\alpha)$.

Таким образом, имеется отображение $\pi: \Psi \rightarrow \Pi$.

При каждом $j = 1, \dots, m$ рассмотрим множество $\pi(\Psi_j)$. Обозначим через $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$, где $r = r(j) = |\pi(\Psi_j)|$, все корни, входящие в $\pi(\Psi_j)$. Положим $\lambda_j = \omega_{j_1} + \dots + \omega_{j_r}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 4. Если группа G односвязна, то полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами $(\omega_i^*, \tau(\omega_i))$, $i = 1, \dots, n$, и элементами $(\lambda_j^*, \tau(\lambda_j) - \varphi_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Эта теорема будет доказана в §4.

2.2. Приведем два примера применения теоремы 4. В обоих случаях сферичность подгруппы H вытекает из теоремы 3.

Пример 1 [5]. Пусть G односвязна и $H = TU'$. Тогда $S = T$, $N = U'$, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$, $\tau = \text{id}$, $m = n$, $\Psi = \Pi$, $\pi = \text{id}$. Полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается элементами (ω_i^*, ω_i) , $(\omega_i^*, \omega_i - \alpha_i)$, где $i = 1, \dots, n$.

Пример 2. Пусть $G = \text{SL}_4$ и группы B, U и T состоят из всех соответственных верхнетреугольных, верхних унитреугольных и диагональных матриц, содержащихся в G . При $t = \text{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \in T$ и $k = 1, 2, 3$ положим $\alpha_k(t) = t_k t_{k+1}^{-1}$. Рассмотрим подгруппу $H = S \ltimes N \subset G$, где $S = \{\text{diag}(s_1, s_2, s_2^{-1}, s_1^{-1}) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{C}^\times\}$, а $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ — множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с произвольными числами $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Отметим, что подгруппа H является борелевской подгруппой в группе $\text{Sp}_4 \subset G$, сохраняющей кососимметричную билинейную форму с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $n = 3$, $m = 2$, $\varphi_1 = \tau(\alpha_1) = \tau(\alpha_3)$, $\varphi_2 = \tau(\alpha_1 + \alpha_2) = \tau(\alpha_2 + \alpha_3)$, $\Psi_1 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\Psi_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$, $\pi(\alpha_1) = \alpha_1$, $\pi(\alpha_3) = \alpha_3$, $\pi(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_2$. При $s = \text{diag}(s_1, s_2, s_2^{-1}, s_1^{-1}) \in S$ положим $\chi_1(s) = s_1$, $\chi_2(s) = s_1 s_2$. Полугруппа $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ свободно порождается пятью элементами $(\omega_3, \tau(\omega_1)) = (\omega_3, \chi_1)$, $(\omega_2, \tau(\omega_2)) = (\omega_2, \chi_2)$, $(\omega_1, \tau(\omega_3)) = (\omega_1, \chi_1)$, $(\omega_1 + \omega_3, \tau(\omega_1 + \omega_3) - \varphi_1) = (\omega_1 + \omega_3, \chi_2)$, $(\omega_2, \tau(\omega_2) - \varphi_2) = (\omega_2, 0)$.

§3. Вспомогательные результаты

Настоящий параграф содержит все результаты, которые нам понадобятся для доказательства теоремы 4.

3.1. В этом разделе мы опишем общий метод вычисления ранга полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ в случае произвольной связной подгруппы $H \subset G$. Этим методом мы воспользуемся в разд. 4.1 для вычисления ранга полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ в условиях теоремы 4.

Сначала напомним одно понятие.

Пусть L — редуктивная группа и B_L — ее борелевская подгруппа. *Рангом* действия $L: X$ группы L на неприводимом алгебраическом многообразии X называется ранг решетки $\Lambda(X) \subset \mathfrak{X}(B_L)$, где $\Lambda(X)$ состоит из тех весов $\mu \in \mathfrak{X}(B_L)$, для которых в поле $\mathbb{C}(X)$ рациональных функций на X содержится ненулевая B_L -полуинвариантная функция веса μ . Ранг действия $L: X$ обозначим через $r_L(X)$. Рангом однородного пространства L/K будем называть ранг естественного действия $L: L/K$ левыми сдвигами.

Пусть H — произвольная связная подгруппа в G . Рассмотрим однородное пространство G/H_0 (определение подгруппы H_0 см. в разд. 1.2). Оно квазиаффинно, поскольку подгруппа H_0 не имеет нетривиальных характеров. На G/H_0 имеется транзитивное действие группы $\hat{G} = G \times H/H_0$, где G действует слева, а H/H_0 — справа. Стабилизатором точки eH_0 при этом действии является подгруппа $\hat{H} = \{(h, hH_0) \mid h \in H\} \subset \hat{G}$, изоморфная группе H . Таким образом, имеется изоморфизм многообразий $G/H_0 \simeq \hat{G}/\hat{H}$. Алгебры $\mathbb{C}[G/H_0]$ и $\mathbb{C}[\hat{G}/\hat{H}]$ изоморфны как $\hat{G}$ -модули, поэтому имеется изоморфизм полугрупп $\hat{\Lambda}_+(G/H) \simeq \Lambda_+(\hat{G}/\hat{H})$. Поскольку многообразие $\hat{G}/\hat{H}$ квазиаффинно, решетка $\Lambda(\hat{G}/\hat{H})$ порождается полугруппой $\Lambda_+(\hat{G}/\hat{H})$ (см., например, [9, предложение 5.14]); поэтому $\text{rk } \Lambda_+(\hat{G}/\hat{H}) = \text{rk } \Lambda(\hat{G}/\hat{H})$. Отсюда $\text{rk } \hat{\Lambda}_+(G/H) = r_{\hat{G}}(\hat{G}/\hat{H})$. Ранг однородного пространства $\hat{G}/\hat{H}$ можно вычислить, воспользовавшись следующим общим результатом Д. И. Панюшева.

Предложение 2 [10, теорема 1.2(ii)]. Пусть L — связная редуктивная группа, $P \subset L$ — ее параболическая подгруппа с разложением Леви $P = P_r \ltimes P_u$, где P_r и P_u — соответственно максимальная редуктивная подгруппа и унитарный радикал в P . Пусть $K \subset L$ — связная подгруппа с разложением Леви $K = K_r \ltimes K_u$, где K_r и K_u — соответственно максимальная редуктивная подгруппа и унитарный радикал в K , причем $K_r \subset P_r$ и $K_u \subset P_u$. Пусть $F \subset K_r$ — стабилизатор общего положения для действия $K_r: \mathfrak{p}_r/\mathfrak{k}_r$ (подгруппа F редуктивна). Тогда $r_L(L/K) = r_{P_r}(P_r/K_r) + r_F(P_u/K_u)$.

3.2. В этом разделе формулируются все необходимые результаты из теории активных корней.

Предложение 3. Пусть $1 \leq i, j \leq t$ и различные корни $\alpha \in \Psi_i$, $\beta \in \Psi_j$ таковы, что $\gamma = \beta - \alpha \in \Delta_+$. Тогда

- (a) [7, предложение 1] $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$;
- (b) [7, предложение 10(в)] если $|\Psi_i| \geq 2$, то γ — единственный положительный корень со свойством $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$.

Следствие 1. Пусть $1 \leq i \leq t$ и корни $\alpha, \beta \in \Psi_i$ различны. Тогда $\alpha - \beta \notin \Delta$.

Доказательство. Предположим, что $\gamma = \alpha - \beta \in \Delta$. Можно считать, что $\gamma \in \Delta_+$. Тогда в силу предложения 3(а) имеем $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_i$, что невозможно. $\square$

При каждом $i = 1, \dots, t$ подпространство $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i$ задается в пространстве $\mathfrak{u}_i$ обращением в нуль некоторой (определенной с точностью до пропорциональности) линейной функции, которую обозначим через ξ_i . Если $\alpha \in \Psi_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$, то ограничение функции ξ_i на $\mathfrak{g}_\alpha$ не равно нулю.

Предложение 4 [7, предложение 2]. Если $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, t\}$ и $\gamma \in \Delta_+$, то существует такое число $c \neq 0$, что $\xi_i(x) = c\xi_j([x, e_\gamma])$ при всех $x \in \mathfrak{u}_i$.

Предложение 5 [7, следствие 11]. Пусть активные корни α, β таковы, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Тогда либо $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, либо ни один из корней $\pi(\alpha), \pi(\beta)$ не содержится в $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta$.

§4. Доказательство основной теоремы

С учетом теоремы 2 доказательство теоремы 4 включает в себя три этапа. Сначала в разд. 4.1 мы вычислим ранг полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$. Затем в разд. 4.2 мы покажем, что все элементы, указанные в формулировке теоремы 4, действительно содержатся в этой полугруппе. Наконец, в разд. 4.3 мы докажем, что указанные элементы неразложимы в $\hat{\Lambda}_+(G/H)$.

В этом параграфе мы сохраняем обозначения, введенные в разд. 2.1.

4.1. В этом разделе мы докажем следующее

Предложение 6. В условиях теоремы 4 ранг полугруппы $\hat{\Lambda}_+(G/H)$ равен $n + t$.

Ниже приводятся два различных доказательства этого предложения. В первом из них применяется общий метод вычисления ранга расширенной полугруппы старших весов, описанный в разд. 3.1. Второе доказательство является прямым и использует геометрические соображения.

Доказательство 1. При естественном эпиморфизме $H \rightarrow H/H_0$ подгруппа $S \subset H$ изоморфно отображается на H/H_0 . Ввиду этого далее мы будем отождествлять группы S и H/H_0 . В разд. 3.1 было показано, что $\text{rk } \hat{\Lambda}_+(G/H) = r_{\hat{G}}(\hat{G}/\hat{H})$. Для вычисления $r_{\hat{G}}(\hat{G}/\hat{H})$ применим предложение 2 при $L = \hat{G} = G \times S$ и $K = \hat{H}$. Положим $P = B \times S$. Тогда $P_r = T \times S$, $P_u = U$; $K_r = \hat{S}$, $K_u = N$, где подгруппа $\hat{S} \subset \hat{H}$ изоморфна S и вложена в подгруппу $S \times S \subset H \times S$ диагонально. Подгруппа $\hat{S}$ тривиально действует в пространстве $\mathfrak{p}_r/\mathfrak{k}_r \simeq (\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s})/\hat{\mathfrak{s}}$, поэтому $F = \hat{S}$. Следовательно, $r_{\hat{G}}(\hat{G}/\hat{H}) = r_{T \times S}((T \times S)/\hat{S}) + r_{\hat{S}}(U/N)$. Легко видеть, что в последней сумме первое слагаемое равно $\text{rk } T = n$. Найдем значение второго слагаемого этой суммы. Ясно, что оно совпадает с $r_S(U/N)$. В силу [11, лемма 1.4] имеется S -эквивариантный изоморфизм $U/N \simeq$

$\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$. По теореме 3 пространство $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ как S -модуль изоморфно прямой сумме $\mathbb{C}_{\varphi_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{\varphi_m}$, где $\mathbb{C}_{\varphi_i} \simeq \mathbb{C}$ — подпространство веса φ_i относительно S , причем веса $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно независимы. Отсюда вытекает, что $r_S(U/N) = m$. $\square$

Доказательство 2. Поскольку подгруппа H связна, с учетом замечания 2 получаем, что ранг полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ равен количеству простых $(B \times H)$ -инвариантных дивизоров в G . Рассмотрим разложение Бруа группы G :

$$G = \bigsqcup_{\sigma \in W} B\sigma B,$$

где объединение является дизъюнктым. Среди подмножеств $B\sigma B \subset G$, каждое из которых $(B \times B)$ -инвариантно, имеется открытое подмножество $G_0 = B\sigma_0 B \subset G$ (называемое открытой клеткой), где σ_0 — элемент наибольшей длины в группе W . Хорошо известно, что дополнение в G множества G_0 является объединением ровно n простых дивизоров, которые являются $(B \times B)$ -инвариантными, а значит, и $(B \times H)$ -инвариантными. Поэтому для завершения доказательства остается доказать, что в G_0 имеется ровно m простых $(B \times H)$ -инвариантных дивизоров. С учетом изоморфизма $G_0 \simeq B\sigma_0 \times U$ мы получаем, что $(B \times H)$ -инвариантные дивизоры в G_0 находятся во взаимно однозначном соответствии с H -инвариантными дивизорами в U , где действие H на U описывается формулой $(sv, u) \mapsto suv^{-1}s^{-1}$ ($s \in S$, $v \in N$, $u \in U$). В свою очередь, H -инвариантные дивизоры в U находятся во взаимно однозначном соответствии с S -инвариантными дивизорами в U/N или, с учетом S -эквивариантного изоморфизма $U/N \simeq \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ (см. [11, лемма 1.4]), с S -инвариантными дивизорами в $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$. Принимая во внимание изоморфизм S -модулей $\mathfrak{u}/\mathfrak{n} \simeq \mathbb{C}_{\varphi_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}_{\varphi_m}$ (см. теорему 3), мы получаем, что простые S -инвариантные дивизоры в $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ — это в точности дивизоры нулей S -полуинвариантных линейных функций на $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$, которых с точностью до пропорциональности ровно m . $\square$

4.2. В этом разделе мы покажем, что элементы, перечисленные в формулировке теоремы 4, содержатся в полугруппе $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$.

Как отмечалось ранее (см. разд. 1.2), условие $(\lambda^*, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H)$ эквивалентно тому, что $V(\lambda)_{\chi}^{(H)} \neq 0$. Для элементов $(\omega_i^*, \tau(\omega_i))$ при $i = 1, \dots, n$ указать ненулевой вектор в $V(\omega_i)_{\tau(\omega_i)}^{(H)}$ совсем просто: таковым будет старший вектор $v_{\omega_i} \in V(\omega_i)$. Теперь остается доказать, что $(\lambda_j^*, \tau(\lambda_j) - \varphi_j) \in \Lambda_+(G/H)$ или, эквивалентно, $V(\lambda_j)_{\tau(\lambda_j) - \varphi_j}^{(H)} \neq 0$ при всех $j = 1, \dots, m$. Этому посвящена оставшаяся часть раздела.

Ниже нам потребуется следующая простая

Лемма 1. Пусть $\mu \in \Lambda_+(G)$ и $\alpha, \beta \in \Delta_+$. Тогда

- (a) $e_{\alpha}(e_{-\beta}v_{\mu}) = [e_{\alpha}, e_{-\beta}]v_{\mu}$;
- (b) если $[e_{\alpha}, e_{-\beta}]v_{\mu} \neq 0$, то $\beta - \alpha \in \Delta_+$.

Зафиксируем $j \in \{1, \dots, m\}$. Обозначим через $\beta_1, \dots, \beta_p$ все корни, входящие в Ψ_j . Линейная функция $\xi_j \in \mathfrak{u}_j^*$ (см. разд. 3.2) задается набором ненулевых чисел $a_1, \dots, a_p$ следующим образом: элемент $x_1e_{\beta_1} + \dots + x_pe_{\beta_p} \in \mathfrak{u}_j$ лежит в $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда $a_1x_1 + \dots + a_px_p = 0$.

Пусть $\pi(\Psi_j) = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\}$ и $\lambda_j = \omega_{j_1} + \dots + \omega_{j_r} \in \Lambda_+(G)$ (см. разд. 2.1). Отметим, что при каждом $k = 1, \dots, p$ в силу условия $\pi(\beta_k) \in \text{Supp } \beta_k$ имеем

$\lambda_j(h_{\beta_k}) = \langle \lambda_j | \beta_k \rangle > 0$ и, значит, $e_{-\beta_k} v_{\lambda_j} \neq 0$. Положим

$$f_j = \frac{a_1}{\lambda_j(h_{\beta_1})} e_{-\beta_1} + \cdots + \frac{a_p}{\lambda_j(h_{\beta_p})} e_{-\beta_p} \in \mathfrak{g}$$

и рассмотрим в неприводимом G -модуле $V(\lambda_j)$ со старшим весом λ_j (ненулевой) вектор $w_j = f_j v_{\lambda_j} \in V(\lambda_j)$.

Покажем, что $w_j \in V(\lambda_j)_{\tau(\lambda_j) - \varphi_j}^{(H)}$. Легко видеть, что вектор w_j является S -полуинвариантным веса $\tau(\lambda_j) - \varphi_j$. Докажем, что этот вектор является H -полуинвариантным. Для этого достаточно доказать следующее

Предложение 7. *Вектор w_j аннулируется алгеброй $\mathfrak{n}$.*

Доказательство состоит из трех шагов.

Шаг 1. Докажем, что вектор w_j аннулируется подпространством $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_j$. Для этого возьмем произвольный элемент $x = x_1 e_{\beta_1} + \cdots + x_p e_{\beta_p} \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_j$ и покажем, что $xw_j = 0$. С учетом леммы 1(a) имеем

$$xw_j = \left(\sum_{k=1}^p x_k e_{\beta_k} \right) \left(\sum_{l=1}^p \frac{a_l}{\lambda_j(h_{\beta_l})} e_{-\beta_l} \right) v_{\lambda_j} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \frac{a_l x_k}{\lambda_j(h_{\beta_l})} [e_{\beta_k}, e_{-\beta_l}] v_{\lambda_j}.$$

При всех $k \neq l$ в силу следствия 1 имеем $\beta_k - \beta_l \notin \Delta$, откуда вытекает, что $[e_{\beta_k}, e_{-\beta_l}] = 0$. Значит,

$$xw_j = \sum_{k=1}^p \frac{a_k x_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} [e_{\beta_k}, e_{-\beta_k}] v_{\lambda_j} = \sum_{k=1}^p \frac{a_k x_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} h_{\beta_k} v_{\lambda_j} = \left(\sum_{k=1}^p a_k x_k \right) v_{\lambda_j} = 0,$$

где учтено, что $h_{\beta_k} v_{\lambda_j} = \lambda_j(h_{\beta_k}) v_{\lambda_j}$ и $a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = 0$.

Шаг 2. Докажем, что вектор w_j аннулируется подпространством $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i$ при $i \neq j$. Пусть $\Psi_i = \{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$. Если $|\Psi_i| = 1$, то $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i = \{0\}$ и доказывать нечего. Поэтому далее считаем, что $|\Psi_i| \geq 2$. Линейная функция $\xi_i \in \mathfrak{u}_i^*$ задается набором ненулевых чисел $b_1, \dots, b_q$ так, что элемент $y_1 e_{\gamma_1} + \cdots + y_q e_{\gamma_q}$ лежит в $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда $b_1 y_1 + \cdots + b_q y_q = 0$. Пусть $y = y_1 e_{\gamma_1} + \cdots + y_q e_{\gamma_q} \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i$. Покажем, что $yw_j = 0$. С учетом леммы 1(a) имеем

$$yw_j = \left(\sum_{k=1}^q y_k e_{\gamma_k} \right) \left(\sum_{l=1}^p \frac{a_l}{\lambda_j(h_{\beta_l})} e_{-\beta_l} \right) v_{\lambda_j} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^p \frac{a_l y_k}{\lambda_j(h_{\beta_l})} [e_{\gamma_k}, e_{-\beta_l}] v_{\lambda_j}.$$

Предположим, что при некоторых $k \in \{1, \dots, q\}$ и $l \in \{1, \dots, p\}$ элемент $[e_{\gamma_k}, e_{-\beta_l}]$ нетривиально действует на вектор v_{λ_j} . Тогда по лемме 1(b) получаем, что $\gamma_k - \beta_l = -\delta$ для некоторого корня $\delta \in \Delta_+$. В силу предложения 3(a) имеем $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$. Так как $|\Psi_i| \geq 2$, то по предложению 3(b) корень δ является единственным положительным корнем со свойством $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$. Перенумеровав корни в Ψ_j , без ограничения общности можно считать, что $\gamma_1 + \delta = \beta_1, \dots, \gamma_q + \delta = \beta_q$. Тогда

$$yw_j = \sum_{k=1}^q \frac{a_k y_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} [e_{\gamma_k}, e_{-\beta_k}] v_{\lambda_j} = \left(\sum_{k=1}^q \frac{a_k d_k y_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} \right) e_{-\delta} v_{\lambda_j},$$

где при $k = 1, \dots, q$ числа d_k таковы, что $[e_{\gamma_k}, e_{-\beta_k}] = d_k e_{-\delta}$. Далее, при $k = 1, \dots, q$ имеем $[e_{\gamma_k}, e_{\delta}] = c_k e_{\beta_k}$, где $c_k \neq 0$. Тогда с учетом предложения 4 можно считать, что $b_k = a_k c_k$ при всех $k = 1, \dots, q$.

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что

$$\frac{a_1 d_1 y_1}{\lambda_j(h_{\beta_1})} + \dots + \frac{a_q d_q y_q}{\lambda_j(h_{\beta_q})} = 0.$$

Подставляя в эту формулу $a_k = b_k/c_k$ при $k = 1, \dots, q$ и учитывая условие $b_1 y_1 + \dots + b_q y_q = 0$, мы находим, что теперь нам достаточно доказать следующее:

$$\frac{d_1}{c_1 \lambda_j(h_{\beta_1})} = \dots = \frac{d_q}{c_q \lambda_j(h_{\beta_q})}.$$

Для этого при фиксированном $k \in \{1, \dots, q\}$ рассмотрим три элемента e_{γ_k} , e_δ , $e_{-\beta_k}$ и выпишем для них тождество Якоби:

$$[[e_{\gamma_k}, e_\delta], e_{-\beta_k}] + [[e_{-\beta_k}, e_{\gamma_k}], e_\delta] + [[e_\delta, e_{-\beta_k}], e_{\gamma_k}] = 0,$$

или

$$c_k h_{\beta_k} + d_k h_\delta + A_k h_{\gamma_k} = 0,$$

где A_k — некоторое число. Подействовав обеими частями этого равенства на вектор v_{λ_j} , получаем

$$c_k \lambda_j(h_{\beta_k}) + d_k \lambda_j(h_\delta) + A_k \lambda_j(h_{\gamma_k}) = 0.$$

Так как γ_k — активный корень, подчиненный активному корню β_k , то простой корень $\pi(\beta_k) = \alpha_{j_l}$ не содержится в множестве $\text{Supp } \gamma_k$, откуда $\omega_{j_l}(h_{\gamma_k}) = 0$. Далее, в силу условия $\text{Supp } \gamma_m \subset \text{Supp } \beta_m$ и предложения 5 получаем, что $\pi(\Psi_j) \cap \text{Supp } \gamma_k = \emptyset$. Отсюда $\omega_{j_l}(h_{\gamma_k}) = \dots = \omega_{j_r}(h_{\gamma_k}) = 0$ и $\lambda_j(h_{\gamma_k}) = 0$. Таким образом, $c_k \lambda_j(h_{\beta_k}) + d_k \lambda_j(h_\delta) = 0$. Заметим, что $\lambda_j(h_\delta) = \langle \lambda_j | \delta \rangle = \langle \omega_{j_l} | \delta \rangle > 0$, поскольку $\alpha_{j_l} \in \text{Supp } \delta$. Значит, величина

$$\frac{d_k}{c_k \lambda_j(h_{\beta_k})} = -\frac{1}{\lambda_j(h_\delta)}$$

не зависит от k , что и оставалось доказать.

Шаг 3. Докажем, что вектор w_j аннулируется подпространством $\mathfrak{g}_\gamma$ при любом $\gamma \in \Delta_+ \setminus \Psi$. С учетом леммы 1(a) имеем

$$e_\gamma w_j = e_\gamma \left(\sum_{k=1}^p \frac{a_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} e_{-\beta_k} \right) v_{\lambda_j} = \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{\lambda_j(h_{\beta_k})} [e_\gamma, e_{-\beta_k}] v_{\lambda_j}.$$

Покажем, что в последней сумме каждое слагаемое равно нулю. Предположим противное: $[e_\gamma, e_{-\beta_k}] v_{\lambda_j} \neq 0$ при некотором $k \in \{1, \dots, p\}$. Тогда по лемме 1(b) получаем, что $\delta = \beta_k - \gamma \in \Delta_+$. Отсюда следует, что $e_{-\delta} v_{\lambda_j} \neq 0$ и $\langle \lambda_j | \delta \rangle > 0$. С другой стороны, из условий $\beta_k = \gamma + \delta$ и $\gamma \notin \Psi$ вытекает, что δ — активный корень, подчиненный активному корню β_k . Это означает, что $\pi(\beta_k) \notin \text{Supp } \delta$. Тогда по предложению 5 имеем $\pi(\Psi_i) \cap \text{Supp } \delta = \emptyset$, откуда $\langle \lambda_j | \delta \rangle = 0$. Полученное противоречие завершает шаг 3 и доказательство предложения. $\square$

Замечание 3. Если $p = 1$ (т.е. $|\Psi_j| = 1$), то доказательство предложения 7 значительно упрощается. А именно, в этом случае на шаге 1 нечего доказывать (так как $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_j = 0$), а из шага 2 исчезает содержательная часть: при $i \neq j$ и $|\Psi_i| \geq 2$ условие $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$ не может быть выполнено ни для какого корня $\gamma \in \Delta_+$. Отметим также, что при $p = 1$ вектор w_j пропорционален вектору $e_{-\beta_1} v_{\lambda_j}$.

4.3. В этом разделе мы докажем, что элементы полугруппы $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$, перечисленные в формулировке теоремы 4, неразложимы в этой полугруппе. В силу связности подгруппы H и замечания 2 для этого достаточно доказать, что ненулевые $(B \times H)$ -полуинвариантные регулярные функции на G , соответствующие указанным элементам, неприводимы в $\mathbb{C}[G]$.

При $i = 1, \dots, n$ обозначим через P_i функцию из $\mathbb{C}[G]$, соответствующую при изоморфизме (1) элементу $v_{\omega_i^*} \otimes v_{\omega_i} \in V(\omega_i^*) \otimes V(\omega_i)$. Имеем $P_i(g) = \langle v_{\omega_i^*}, gv_{\omega_i} \rangle$ при всех $g \in G$. Функция P_i является $(B \times H)$ -полуинвариантной веса $(\omega_i^*, \tau(\omega_i))$. Аналогично, при $j = 1, \dots, m$ обозначим через Q_j функцию из $\mathbb{C}[G]$, соответствующую при изоморфизме (1) элементу $v_{\lambda_j^*} \otimes w_j \in V(\lambda_j^*) \otimes V(\lambda_j)$. Имеем $Q_j(g) = \langle v_{\lambda_j^*}, gw_j \rangle$ при всех $g \in G$. Функция Q_j является $(B \times H)$ -полуинвариантной веса $(\lambda_j^*, \tau(\lambda_j) - \varphi_j)$.

Лемма 2. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $v \in V(\omega_i) \setminus \{0\}$. Тогда функция $f \in \mathbb{C}[G]$, соответствующая при изоморфизме (1) элементу $v_{\omega_i^*} \otimes v \in V(\omega_i^*) \otimes V(\omega_i)$, неприводима в $\mathbb{C}[G]$.

Доказательство. Рассмотрим алгебру ${}^U\mathbb{C}[G]$. С учетом изоморфизма (1) имеем

$${}^U\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(G)} v_{\lambda^*} \otimes V(\lambda),$$

где компонента $v_{\lambda^*} \otimes V(\lambda)$ рассматривается как подпространство в $V(\lambda^*) \otimes V(\lambda)$. Действие тора T слева задает на алгебре ${}^U\mathbb{C}[G]$ градуировку полугруппой $\Lambda_+(G)$, причем компоненте веса λ^* соответствует подпространство $v_{\lambda^*} \otimes V(\lambda)$. Из условия следует, что функция f содержится в компоненте веса ω_i^* алгебры ${}^U\mathbb{C}[G]$. Поскольку компонента веса 0 этой алгебры состоит только из констант, а вес ω_i^* не допускает нетривиальных представлений в виде суммы двух элементов из $\Lambda_+(G)$, мы получаем, что функция f неприводима в ${}^U\mathbb{C}[G]$. Остается заметить, что для функции из ${}^U\mathbb{C}[G]$ неприводимость в ${}^U\mathbb{C}[G]$ эквивалентна неприводимости в $\mathbb{C}[G]$, поскольку группа U связна и не имеет нетривиальных характеров (см. [12, теорема 3.17]). $\square$

Следствие 2. При всех $i = 1, \dots, n$ функция P_i неприводима в $\mathbb{C}[G]$.

Заметим, что при каждом $i = 1, \dots, n$ функция P_i является не только $(B \times H)$ -полуинвариантной, но и $(B \times B)$ -полуинвариантной. Поэтому соответствующий ей простой $(B \times H)$ -инвариантный дивизор $D_i \subset G$ является также $(B \times B)$ -инвариантным. Как уже упоминалось в разд. 4.1 (см. доказательство 2 предложения 6), дополнение в G открытой клетки Брюа $G_0 = B\sigma_0 B$ является объединением ровно n простых дивизоров, являющихся $(B \times B)$ -инвариантными. Ясно, что эти дивизоры — не что иное, как $D_1, \dots, D_n$.

Для завершения доказательства теоремы 4 осталось доказать, что функция Q_j неприводима в $\mathbb{C}[G]$ при $j = 1, \dots, m$.

Предложение 8. При всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$ функция Q_j не делится на функцию P_i .

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ и покажем, что Q_j не делится на P_i . Функция Q_j/P_i является $(B \times H)$ -полуинвариантной рациональной функцией на G веса $(\lambda_j^* - \omega_i^*, \tau(\lambda_j - \omega_i) - \varphi_j)$. Если $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$,

то вес $\lambda_j^* - \omega_i^*$ не является доминантным, а значит, функция Q_j/P_i не является регулярной. Поэтому далее предполагаем, что $i \in \{j_1, \dots, j_r\}$. Более того, без ограничения общности можно считать, что $i = j_1$. Напомним, что $w_j = f_j v_{\lambda_j}$, где элемент f_j определен в разд. 4.2. Функция, соответствующая при изоморфизме (1) элементу $v_{\lambda_j^*} \otimes v_{\lambda_j}$, является $(B \times H)$ -полуинвариантной веса (λ_j^*, λ_j) . В силу условия $\dim A(\lambda_j^*, \lambda_j) \leq 1$ получаем, что эта функция совпадает с функцией $cP_i P_{j_2} \cdots P_{j_r}$ для некоторой константы $c \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $c = 1$. Тогда $Q_j = f_j(P_i P_{j_2} \cdots P_{j_r})$, где действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{C}[G]$ индуцировано действием группы G справа. Элемент f_j действует на произведение $P_i P_{j_2} \cdots P_{j_r}$ как дифференцирование, поэтому $Q_j = (f_j P_i) P_{j_2} \cdots P_{j_r} + P_i \cdot f_j(P_{j_2} \cdots P_{j_r})$. Отсюда следует, что делимость функции Q_j на P_i равносильна делимости на P_i функции $f_j P_i$. При изоморфизме (1) функции $f_j P_i$ соответствует вектор $v_{\omega_i^*} \otimes (f_j v_{\omega_i}) \in V(\omega_i^*) \otimes V(\omega_i)$. Покажем, что он отличен от нуля, т.е. $f_j v_{\omega_i} \neq 0$. Для этого достаточно найти такой корень $\beta \in \Psi_j$, что $e_{-\beta} v_{\omega_i} \neq 0$. Последнее условие равносильно неравенству $\langle \omega_i | \beta \rangle > 0$, которое заведомо выполнено для любого корня $\beta \in \Psi_j$ с условием $\pi(\beta) = \alpha_i$. Итак, вектор $f_j v_{\omega_i} \in V(\omega_i)$ отличен от нуля. Легко видеть, что он не пропорционален вектору v_{ω_i} . Отсюда с учетом леммы 2 вытекает, что функция $f_j P_i$ неприводима в $\mathbb{C}[G]$ и не пропорциональна функции P_i . Следовательно, функции $f_j P_i$, а значит и функция Q_j , не делится на P_i . $\square$

В силу условия $G \setminus G_0 = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ и предложения 8 доказательство неприводимости в $\mathbb{C}[G]$ каждой из функций Q_j сводится к следующему предложению.

Предложение 9. *При каждом $j = 1, \dots, t$ ограничение функции Q_j на множество G_0 является неприводимой функцией в $\mathbb{C}[G_0]$.*

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{1, \dots, t\}$. Тогда $\lambda_j = \omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_r}$. Ограничения функций $P_1, \dots, P_n$ на G_0 являются обратимыми функциями, поэтому нам достаточно доказать, что функция $\hat{Q}_j = Q_j/(P_{j_1} \cdots P_{j_r})$ неприводима в $\mathbb{C}[G_0]$. Отметим, что эта функция $(B \times H)$ -полуинвариантна веса $(0, -\varphi_j)$. Поскольку группа $B \times H$ имеет открытую орбиту в G_0 , подпространство в $\mathbb{C}[G_0]$, состоящее из всех $(B \times H)$ -полуинвариантных функций веса $(0, -\varphi_j)$, одномерно. Доказательство будет завершено, если мы предъявим в $\mathbb{C}[G_0]$ неприводимую $(B \times H)$ -полуинвариантную функцию веса $(0, -\varphi_j)$. Группа $U \times N$ связна и не имеет нетривиальных характеров; поэтому в силу [12, теорема 3.17] нам достаточно предъявить в алгебре ${}^U \mathbb{C}[G_0]^N$ неприводимую $(T \times S)$ -полуинвариантную функцию веса $(0, -\varphi_j)$. Имеем ${}^U \mathbb{C}[G_0]^N \simeq {}^U \mathbb{C}[U \times T\sigma_0 \times U]^N \simeq \mathbb{C}[T \times U/N] \simeq \mathbb{C}[T \times \mathfrak{u}/\mathfrak{n}]$, где последний изоморфизм обусловлен существованием S -эквивариантного изоморфизма $U/N \simeq \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ (см. [11, лемма 1.4]). Действие группы $T \times S$ на многообразии $T \times \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ устроено следующим образом. Пара $(t, s) \in T \times S$ переводит пару $(t_0, x) \in T \times \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ в пару $(tt_0(\sigma_0 s^{-1} \sigma_0^{-1}), sx)$. Напомним, что по теореме 3 пространство $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ как S -модуль изоморфно прямой сумме $\mathbb{C}_{\varphi_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{\varphi_m}$, где $\mathbb{C}_{\varphi_i} \simeq \mathbb{C}$ — подпространство веса φ_i относительно S . Пусть l_j есть j -я координатная функция на $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$. Тогда l_j , будучи линейной, является неприводимой S -полуинвариантной функцией веса $-\varphi_j$. Значит, функция $1 \otimes l_j \in \mathbb{C}[T] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{u}/\mathfrak{n}] \simeq \mathbb{C}[T \times \mathfrak{u}/\mathfrak{n}]$ является неприводимой $(T \times S)$ -полуинвариантной функцией веса $(0, -\varphi_j)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Б. Винберг, Б. Н. Кимельфельд, *Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли*, Функц. анализ и его прил., **12**:3 (1978), 12–19.
- [2] Р. С. Авдеев, *Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп*, Изв. РАН. Сер. матем., **74**:6 (2010), 3–26.
- [3] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math., **38**:2 (1979), 129–153.
- [4] F. Кноп, *Weylgruppe und Momentabbildung*, Invent. Math., **99**:1 (1990), 1–23.
- [5] Н. Е. Горфинкель, *Гармонический анализ на некотором классе сферических однородных пространств*, Матем. заметки, **90**:5 (2011), 703–711.
- [6] D. I. Panyushev, *Complexity and rank of homogeneous spaces*, Geom. Dedicata, **34**:3 (1990), 249–269.
- [7] Р. С. Авдеев, *О разрешимых сферических подгруппах полупростых алгебраических групп*, Труды ММО, **72**:1 (2011), 5–62.
- [8] В. Л. Попов, *Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **38**:2 (1974), 294–322.
- [9] D. A. Timashev, *Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 138, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2011.
- [10] D. I. Panyushev, *Complexity and nilpotent orbits*, Manuscripta Math., **83** (1994), 223–237.
- [11] P.-L. Montagard, *Une nouvelle propriété de stabilité du pléthysme*, Comm. Math. Helvetici, **71**:3 (1996), 475–505.
- [12] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 55, ВИНТИ, М., 1989, 137–309.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: suselr@yandex.ru

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: nataly.gorfinkel@gmail.com

Поступило в редакцию
17 декабря 2010 г.