Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, Э. Х. Эйвазов, О дискретности спектра магнитного оператора Шрёдингера, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 83–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3081>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 05:59:16

О дискретности спектра магнитного оператора Шрёдингера

© 2012. А. Р. Алиев, Э. Х. Эйвазов

1. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим магнитный оператор Шрёдингера

$$\Delta_{a,V} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 + V(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $V(x)$ — электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ — магнитный потенциал, причем все потенциалы считаются вещественными. Операторы Шрёдингера вида (1) играют исключительно важную роль в современной математике, физике и химии, особенно в квантовой механике при исследовании заряженных частиц в магнитном поле и в квантовой химии при изучении магнитно-оптических свойств молекулярных систем.

Предположим, что $a_j \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$, $V \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $V(x)$ ограничен снизу (для определенности пусть $V(x) \geq 0$). В пространстве основных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$h_{a,V}(u, u) = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla_a u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2) dx,$$

где

$$\nabla_a u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + ia_1(x)u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} + ia_n(x)u \right) = \nabla u + ia(x)u$$

есть магнитный градиент. Самосопряженный оператор, порожденный замыканием квадратичной формы $h_{a,V}(u, u)$ (существование такого оператора установлено в [1]), обозначим через $H_{a,V}$. Пусть $E_\lambda = \chi_{(-\infty, \lambda)}(H_{a,V})$ ($-\infty < \lambda \leq +\infty$) — разложение единицы, отвечающее самосопряженному оператору $H_{a,V}$, и $N(\lambda) = \dim(\text{Im } E_\lambda)$. Если

$$\sup\{\lambda \in (-\infty, +\infty) \mid N(\lambda) < +\infty\} = +\infty,$$

то будем говорить, что оператор $H_{a,V}$ имеет чисто дискретный спектр.

За последние несколько лет появилось много работ, посвященных вопросам дискретности спектра магнитного оператора Шрёдингера, среди которых следует отметить работы Кондратьева, Мазыи и Шубина [2], [3]. В этих работах найдены критерии дискретности спектра магнитного оператора Шрёдингера. Однако выполнение условий этих критериев трудно проверять, поскольку они выражены в терминах емкостей Винера. Особый интерес представляет и работа Саймона [4], в которой установлены на языке лебеговой меры более простые достаточные условия дискретности обычного оператора Шрёдингера (т. е. $a(x) \equiv 0$, без магнитного поля). Данная же работа посвящена распространению результатов работы [4] на случай магнитного оператора Шрёдингера.

Прежде всего, отметим, что справедливо такое утверждение:

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\sup\{\lambda \in (-\infty; +\infty) \mid N(\lambda) < +\infty\} = +\infty$;
- (b) оператор $H_{a,V}$ имеет компактную резольвенту;
- (c) для некоторого (а следовательно, для любого) $s > 0$ оператор $e^{-sH_{a,V}}$ компактен;
- (d) спектр оператора $H_{a,V}$ состоит только из изолированных конечнократных собственных значений.

2. Класс КМШ (Кондратьев, Мазья, Шубин). Пусть существует непрерывная функция $c(x)$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $F \subset \overline{B}(x, 1)$ (F — компактное множество, $\overline{B}(x, 1)$ — замкнутый шар с центром в точке x радиуса 1) выполняются неравенства

$$\int_F |a(x)|^2 dx \leq c(x) \cdot \begin{cases} (\text{mes } F)^{(n-2)/n}, & n > 2, \\ (\ln \frac{4}{\text{mes } F})^{-1}, & n = 2, \end{cases}$$

где $\text{mes } F$ — лебегова мера множества F . Тогда мы будем говорить, что магнитный потенциал $a(x)$ принадлежит классу КМШ.

Теорема 1. Пусть магнитный потенциал $a(x)$ принадлежит классу КМШ, а неотрицательный локально интегрируемый электрический потенциал $V(x)$ удовлетворяет следующему условию: $\text{mes}\{x : 0 \leq V(x) < M\} < +\infty$ для любого $M > 0$. Тогда оператор $H_{a,V}$ имеет чисто дискретный спектр.

Определение (см. [4]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $l > 0$ положим $\omega_x^l(\Omega) = \text{mes}\{\Omega \cap \overline{B}(x, l)\}$. Если существует $r > 0$, такое, что $\int_\Omega (\omega_x^l(\Omega))^r dx < +\infty$ для любого $l > 0$, то говорят, что Ω есть r -полиномиальное тонкое множество.

Теорема 2. Пусть магнитный потенциал $a(x)$ принадлежит классу КМШ и для любого $M > 0$ существует $r > 0$, такое, что $\Omega_M = \{x : 0 \leq V(x) < M\}$ является r -полиномиальным тонким множеством. Тогда оператор $H_{a,V}$ имеет чисто дискретный спектр.

Теперь наметим доказательства теорем 1 и 2. В условиях теоремы 1 $H_{a,0} = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x))^2$ есть неотрицательный самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^n)$, который порожден замыканием квадратичной формы $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_a u(x)|^2 dx$, определенной на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Используя замечание 4.7 из работы [2] и условия, налагаемые на магнитный потенциал $a(x)$, устанавливаем так же, как в [5], что оператор $H_{a,0}$ доминируется оператором $H_0 = -\Delta$, т.е. для любой функции $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и любого $s > 0$ неравенство $|e^{-sH_{a,0}}\psi| \leq e^{s\Delta}|\psi|$ справедливо п. в. на $\mathbb{R}^n$. Из этой оценки следует, что полугруппа $e^{-sH_{a,0}}$ является $(2, \infty)$ -ограниченной, т.е. при всех $s > 0$ оператор $e^{-sH_{a,0}} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ограничен. Известно, что (см., например, [6, § XI.1] или [7, теорема 1.3]) оператор $e^{-sH_{a,0}}$ является интегральным оператором и

$$\|e^{-sH_{a,0}}\|_{L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |G_{a,0}(x, y, s)|^2 dy < +\infty,$$

где $G_{a,0}(x, y, s)$ — ядро интегрального оператора $e^{-sH_{a,0}}$. Далее, применяя теорему 2 из работы [4], получаем справедливость утверждения теоремы 1. Отметим, что можно провести доказательство теоремы 1 иначе, если дополнительно предположить, что $a \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Введем следующие обозначения: $D = -2ia\nabla - i\nabla a$, $A = \sum_{k=1}^n a_k^2(x)$, $V = V(x)$. Операторы H_0 , D , A и V являются существенно самосопряженными в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из условий теоремы 1 следует, что оператор D вполне подчинен H_0 , т. е. ограничен относительно H_0 . Поэтому $B = H_0 + D + A$ есть ограниченный снизу самосопряженный оператор. Далее, с помощью формулы Троттера для произведения (см. [8, с. 324]) доказывается неравенство Сигала (см. [9, с. 288]). В свою очередь, из условий теоремы 1 вытекает компактность оператора $e^{-B}e^{-V}$, а из теоремы 2.2 работы [4], следовательно, — компактность оператора $e^{-(B+V)}$. Тем самым теорема 1 доказана. В доказательстве же теоремы 2, следуя [4], через $Q_R(x)$ обозначим характеристическую функцию шара $\{x : |x| < R\}$. Пусть Φ_R — оператор свертки с $G_{a,0}Q_R$. Из условий теоремы 2 вытекает, что k -я степень ($k > (r+2)/2$) оператора $\Phi_R\chi_{\Omega_M}$ компактна в $L_2(\mathbb{R}^n)$, где χ_{Ω_M} — оператор умножения на характеристическую функцию множества Ω_M . Поэтому из соотношения

$$\|e^{H_{a,0}}\chi_{\Omega_M} - \Phi_R\chi_{\Omega_M}\| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

следует компактность оператора $e^{H_{a,0}}\chi_{\Omega_M}$. Далее доказательство завершаем, как в соответствующей теореме 3 работы [4].

3. Замечание 1. В двумерном пространстве функция $V(x, y) = x^2y^4 + y^4x^2$ (см. [4]) удовлетворяет условиям теоремы 1.

Замечание 2. В двумерном случае функция $V(x, y) = x^2y^2$ (см. [4]) удовлетворяет условиям теоремы 2, но не удовлетворяет условиям теоремы 1.

Замечание 3. Ни одна из функций, указанных в замечаниях 1 и 2, не удовлетворяет условию Реллиха, т. е. $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} V(x, y) \neq +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. Leinfelder, C. G. Simader, *Math. Z.*, **176**:1 (1981), 1–19. [2] V. Kondratiev, V. Maz'ya, M. Shubin, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:3–4 (2004), 489–521. [3] V. Kondratiev, V. Maz'ya, M. Shubin, *Comm. Partial Differential Equations*, **34**:10 (2009), 1127–1146. [4] B. Simon, *Methods Funct. Anal. Topology*, **15**:1 (2009), 61–66. [5] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York–London, 1979. [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977. [7] W. Arendt, A. V. Bukhvalov, *Forum Math.*, **6**:1 (1994), 111–135. [8] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. 1, Функциональный анализ*, Мир, М., 1977. [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. 2, Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана
e-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило в редакцию
17 декабря 2010 г.

Бакинский государственный университет,
e-mail: eyvazovshad@mail.ru