Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 91–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:59:42

Доказательство. Нульмерный метрический компакт M гомеоморфен подмножеству любого совершенного множества, например, какого-нибудь совершенного множества Кронекера (такие бывают — см., например, [10]). Но кронекеровость наследуется замкнутыми подмножествами. Остальное очевидно.

Пример. Пусть c — банахово пространство сходящихся последовательностей. Пусть $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Пространство c можно отождествить с $C(M)$, $M = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, рассматривая сходящиеся последовательности $(f_n) \in c$ как функции $f \in C(M)$, $f(\lambda_n) = f_n$; $f(\lambda) = \lim f_n$. Определим оператор $T: c \rightarrow c$, $(Tf)_n = \lambda_n f_n$. Если множество $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ кронекерово, то оператор T — изометрия, удовлетворяющая условию $4_{1/2}$ для любого одноточечного множества $K \in \frac{O(M)}{2}$.

Отметим, что операторы из c в c вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$, не обладая полной системой конечномерных подпространств, являются, тем не менее, скалярно почти периодическими [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Lasota, T.-Y. Li, J. A. Yorke, Trans. Amer. Math. Soc., **286**:2 (1984), 751–764.
 [2] W. Bartoszek, Studia Math., **91**:3 (1988), 179–188. [3] Бу Куок Фонг, Укр. матем. ж., **38**:6 (1986), 688–692. [4] R. Sine, Rocky Mountain J. Math., **21**:4 (1991), 1373–1383.
 [5] E. Yu. Emel'yanov, M. Wolff, Studia Math., **144**:2 (2001), 169–179. [6] K. V. Storozhuk, J. Math. Anal. Appl., **332**:2 (2007), 1365–1370. [7] E. Yu. Emel'yanov, *Non-Spectral Asymptotic Analysis of One-Parameter Operator Semigroups*, Operator Theory Advances and Applications, vol. 173, Birkhauser, Basel, 2007. [8] К. В. Сторожук, Сиб. матем. ж., **50**:4 (2009), 928–932. [9] К. В. Сторожук, Сиб. матем. ж., **52**:6 (2011), 1389–1393.
 [10] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980. [11] Ю. Я. Любич, УМН, **18**:1 (1963), 165–171.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
 Новосибирский государственный университет
 e-mail: stork@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
 18 октября 2010 г.

УДК 517.956.2

Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле*

© 2012. Т. А. Суслина

Задачам усреднения в пределе малого периода (гомогенизации) посвящена обширная литература; укажем книги [1]–[3].

1. Операторные оценки погрешности в теории усреднений. В работах Бирмана и Суслиной [4], [5] развит теоретико-операторный подход, с помощью которого получены операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для широкого класса матричных эллиптических дифференциальных операторов (ДО).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-357.2012.1).

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решетки Γ . Для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ положим $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В [4], [5] рассматривались матричные эллиптические ДО вида $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Здесь $g(\mathbf{x})$ есть $(m \times m)$ -матрица-функция с комплексными элементами, ограниченная, равномерно положительно определенная и Γ -периодическая. Оператор $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ есть $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка, b_l — постоянные матрицы с комплексными элементами. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geq n$ и $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Это равносильно выполнению неравенств $\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n$ при $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ с некоторыми положительными постоянными α_0, α_1 . Примеры — скалярный эллиптический оператор $A_\varepsilon = -\text{div } g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$, оператор теории упругости. Подробнее о примерах ДО данного типа см. [4].

В работах [4], [5] изучалось уравнение $A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ «усредненного» уравнения $A^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$. Здесь $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной эффективной матрицей g^0 (см. ниже п. 2). В [4] получена оценка $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)}$. В операторных терминах это означает, что

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon. \quad (1)$$

В [5] была найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (что соответствует приближению решения в H^1 -норме):

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Оценки вида (1), (2), называемые *операторными оценками погрешности*, точны по порядку. Метод работ [4], [5] основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым. В [6], [7] рассматривались скалярный эллиптический оператор $-\text{div } g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) и система теории упругости. Были получены оценки вида (1), (2) для соответствующих задач в $\mathbb{R}^d$, а также изучались задачи в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. При этом аппроксимация решений в классе $H^1(\mathcal{O})$ выводилась из соответствующего результата в $\mathbb{R}^d$. За счет влияния границы оценки в ограниченной области ухудшаются и получается погрешность $O(\varepsilon^{1/2})$. Оценка вида $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ получается загрублением из аппроксимации решения в $H^1(\mathcal{O})$.

Ближкие результаты для оператора $-\text{div } g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [8], [9] с помощью «unfolding»-метода.

2. Задача Дирихле в ограниченной области. Эффективный оператор. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с краевым условием Дирихле. Здесь $g(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{D})$

удовлетворяют условиям п. 1. Строго говоря, $A_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор, порожденный замкнутой и положительно определенной квадратичной формой $\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Здесь $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ по норме пространства $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Изучается поведение обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ задачи Дирихле

$$A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F} \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon = A_{D,\varepsilon}^{-1} \mathbf{F}$.

Опишем эффективный оператор A_D^0 . Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ есть $(n \times m)$ -матрица-функция, являющаяся (слабым) Γ -периодическим решением задачи $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0$, $\int_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Эффективная матрица g^0 размера $m \times m$ строится по следующему правилу: $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) d\mathbf{x}$. Оказывается, что она положительна. Эффективный оператор A_D^0 задается выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Обратный оператор $(A_D^0)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Через $\mathbf{u}_0$ обозначим решение «усредненной» задачи Дирихле

$$A^0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{F} \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \quad (4)$$

Тогда $\mathbf{u}_0 = (A_D^0)^{-1} \mathbf{F}$. Выясняется, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи (3) сходится к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Наша цель — получить оценку для $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2}$.

3. Оценки погрешности по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме. Мы опираемся на результаты недавней работы [10] (краткое сообщение [11]), в которой получена аппроксимация решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ при учете корректора первого порядка. Корректор включает в себя вспомогательный сглаживающий оператор S_ε . Этот оператор действует в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (5)$$

и называется *сглаживающим оператором по Стеклову*. Отметим следующее свойство оператора (5) (см. [7]).

Лемма 1. Пусть $f(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, такая, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, причем

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)} \leq |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения $P_\mathcal{O}: H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и положим $\tilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O} \mathbf{u}_0$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Введем корректор $K(\varepsilon) = R_\mathcal{O} \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (A_D^0)^{-1}$. Используя лемму 1 и учитывая, что Λ — периодическая функция класса $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, легко видеть, что $K(\varepsilon)$ является непрерывным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Первым приближением к $\mathbf{u}_\varepsilon$ является функция

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 = (A_D^0)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K(\varepsilon) \mathbf{F}. \quad (6)$$

В [10], [11] установлена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (7)$$

доказательство которой основано на применении оценок (1), (2) для задачи в $\mathbb{R}^d$ и на приемах, предложенных в [6], [7].

4. Основной результат. Довольно грубым следствием неравенства (7) является оценка $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}$. Возникает естественный вопрос об улучшении этой оценки. В работе [7] для оператора $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) была получена оценка для $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}$ порядка $\varepsilon^{d/(2d-2)}$ при $d \geq 3$ и порядка $\varepsilon|\log \varepsilon|$ при $d = 2$. В доказательстве существенно использовался принцип максимума, специфический для скалярных эллиптических уравнений. В статье [9] для того же скалярного эллиптического оператора получена точная по порядку оценка погрешности $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C\varepsilon$.

Нам удалось получить *точную по порядку операторную оценку погрешности* в задаче (3) для описанного выше класса матричных эллиптических операторов A_ε . Основной результат — следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3), $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_2\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*, \quad (8)$$

или, в операторных терминах, $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_2\varepsilon$. Постоянная ε_* зависит от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , а C_2 зависит лишь от m , d , α_0 , α_1 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

5. Схема доказательства теоремы 2. Рассмотрим «поправку» $\mathbf{w}_\varepsilon$ — обобщенное решение задачи $A_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon = 0$ в $\mathcal{O}$, $\mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\partial\mathcal{O}}$. В [10] на основе оценок (1), (2) для задачи в $\mathbb{R}^d$ показано, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (9)$$

Из леммы 1 с учетом того, что матрица $\Lambda \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ периодична, имеем

$$\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_4\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}. \quad (10)$$

Тогда, загрубляя оценку (9), получаем, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq (C_3 + C_4)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (11)$$

Итак, вопрос сводится к получению оценки для «поправки» $\mathbf{w}_\varepsilon$ в L_2 .

Пусть $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$ есть ε -окрестность границы $\partial\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^d$. Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, такую, что $\operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$, причем $0 \leq \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1$, $\theta_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 1$ и $\varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon| \leq \operatorname{const}$. Нам понадобится еще одна срезка $\tilde{\theta}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, такая, что $\operatorname{supp} \tilde{\theta}_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon}$, $0 \leq \tilde{\theta}_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1$, $\tilde{\theta}_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$ и $\varepsilon|\nabla\tilde{\theta}_\varepsilon| \leq \operatorname{const}$. Положим $\phi_\varepsilon = \varepsilon\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)$. В [10] показано, что

$$\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq C_5\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (12)$$

Аналогичная оценка верна и при замене θ_ε на $\tilde{\theta}_\varepsilon$:

$$\|\varepsilon\tilde{\theta}_\varepsilon\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq \tilde{C}_5\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (13)$$

Из (7) и (13) с учетом (6) следует, что при $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon(1 - \tilde{\theta}_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leq (C_1 + \tilde{C}_5)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}.$$

В операторных терминах это означает, что при $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1} - \varepsilon(1 - \tilde{\theta}_\varepsilon)K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \rightarrow H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq (C_1 + \tilde{C}_5)\varepsilon^{1/2}. \quad (14)$$

Оператор под знаком нормы в (14) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Из соображений двойственности получается аппроксимация оператора $A_{D,\varepsilon}^{-1}$ как непрерывного оператора из $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1} - \varepsilon((1 - \tilde{\theta}_\varepsilon)K(\varepsilon))^*\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq (C_1 + \tilde{C}_5)\varepsilon^{1/2} \quad (15)$$

при $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Функция $\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon$ является решением задачи Дирихле

$$A_\varepsilon(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon) = \mathbf{F}_\varepsilon \text{ в } \mathcal{O}, \quad (\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \quad (16)$$

Здесь правая часть $\mathbf{F}_\varepsilon = -A_\varepsilon\phi_\varepsilon$ принадлежит $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем

$$\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq C_6\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq C_6C_5\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad (17)$$

где мы учли (12). Применим аппроксимацию (15) к задаче (16). Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon - (A_D^0)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon - \varepsilon((1 - \tilde{\theta}_\varepsilon)K(\varepsilon))^*\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \\ \leq (C_1 + \tilde{C}_5)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $1 - \tilde{\theta}_\varepsilon = 0$ в $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$ и $\text{supp } \mathbf{F}_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$, то последний член под знаком нормы в (18) обращается в нуль. Тогда (17) и (18) влекут за собой

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon - (A_D^0)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq C_7\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (19)$$

где $C_7 = (C_1 + \tilde{C}_5)C_6C_5$. Далее, аналогично (10) выполнена оценка

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq C_4\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \quad (20)$$

Остается оценить L_2 -норму функции $(A_D^0)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{F}_\varepsilon = -A_\varepsilon\phi_\varepsilon$. Справедлива оценка

$$\|(A_D^0)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq C_8\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (21)$$

Лемму 3 можно доказать, используя теорию эллиптических краевых задач и оценку вида

$$\int_{B_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall u \in H^1(\mathcal{O}), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

где $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{O}) \leq \varepsilon\}$.

Теперь из (19)–(21) вытекает оценка

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leq (C_4 + C_7 + C_8)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* = \varepsilon_0/2.$$

Отсюда и из (11) получаем оценку (8).

Подробное изложение описанных результатов можно найти в [12].

Автор искренне благодарен А. И. Назарову за плодотворные стимулирующие обсуждения.

Когда настоящая работа уже была завершена, автору стало известно о только что появившейся статье [13], в которой получены близкие результаты для эллиптических систем с вещественными гёльдеровскими коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978. [2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984. [3] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108. [5] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1–130. [6] В. В. Жиков, *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 597–601. [7] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524. [8] G. Griso, *Asymptot. Anal.*, **40**:3–4 (2004), 269–286. [9] G. Griso, *Anal. Appl.*, **4**:1 (2006), 61–79. [10] М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, <http://arxiv.org/abs/1201.2140>. [11] М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2, 92–96. [12] Т. А. Суслина, <http://arxiv.org/abs/1201.2286>; submitted to *Mathematika*. [13] C. E. Kenig, F. Lin, Z. Shen, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **203**:3 (2012), 1009–1036.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: suslina@list.ru

Поступило в редакцию
16 января 2012 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 22.06.2012. Подписано к печати 23.07.2012. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,6 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 198 экз. Заказ 348.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6