Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Доси, Теорема о биполяре для квантовых конусов, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 84–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3084>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:48:06

и

$\text{codim } M \leq s$ и существует $y \in \mathbb{R}^k$, $y \geq 0$, $y \neq 0$,
такой, что $yQ(x) \geq 0$ для любого $x \in M$

соответственно.

Из предложения 3 и того, что если выполняется (4), то условия (1) и (b) эквивалентны, получаем следующее утверждение:

Условие (2) эквивалентно тому, что $\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}^{++}} M = X$.

Применяя это утверждение к возмущенным квадратичным формам $q_{i,\varepsilon}(x) = q_i(x) + \varepsilon|x|^2$, где $\varepsilon > 0$ – параметр возмущения, и осуществляя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, с помощью теоремы 4.4 из [3, с. 29] получаем такое утверждение:

Условие (3) эквивалентно тому, что $\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}^{+}} M = X$.

Я приношу искреннюю благодарность профессору Р. С. Исмагилову за плодотворные обсуждения и ценные предложения по этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.-B. Hiriart-Urruty, SIAM Review, **49:2** (2007), 255–273. [2] А. В. Арутюнов, Матем. заметки, **84:2** (2008), 163–174. [3] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997.

Российский университет дружбы народов
e-mail: arutun@orc.ru

Поступило в редакцию
28 сентября 2010 г.

УДК 517.98

Теорема о биполяре для квантовых конусов

© 2012. А. Доси

Одним из фундаментальных результатов квантового функционального анализа является операторная (или квантовая) теорема о биполяре, доказанная Эффросом и Уэбстером в [5], в которой утверждается, что двойная квантовая поляр для абсолютно матрично выпуклого множества на линейном пространстве V совпадает со своим слабым замыканием относительно фиксированной дуальной пары (V, W) . Известная теорема Руана ([7, 2.3.5], [10]) об абстрактной характеристизации операторных (или квантовых нормированных) пространств легко выводится из операторной теоремы о биполяре. С другой стороны, как показано в [6], результат Руана вместе с некоторыми фактами из теории двойственности для операторных пространств позволяет получить другое доказательство операторной теоремы о биполяре. Это ее доказательство на языке операторных пространств. Таким образом, и теорема Руана, и операторная теорема о биполяре имеют единый источник (в теории C^* -алгебр); в определенном смысле они эквивалентны. Другой подход к теореме Руана был предложен Полсеном в [13]. Это иная точка зрения на предмет, использующая структуры $*$ -линейного пространства и матричного порядка, которая приводит к концепции операторной системы. Каждое абстрактное операторное пространство вложено в абстрактную операторную систему с точностью до матричной изометрии. Эта

система, в свою очередь, вложена в $\mathcal{B}(H)$ с точностью до изоморфизма относительно матричного порядка; этот результат об абстрактной характеристизации операторных систем принадлежит Чои и Эффросу [1].

Локально выпуклая версия операторной системы в ее конкретной форме введена в [2]. Такие системы определяются как унитарные эрмитовы подпространства мультиноммированной C^* -алгебры $C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D})$ всех некоммутативных непрерывных функций на квантовой области $\mathcal{E}$. Унитарное самосопряженное подпространство $V \subseteq C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D})$ называется *квантовой* (или *локально операторной*) *системой*. Приложения к квантовым проблемам моментов рассмотрены в [3], [4]. Ключевую роль в теории квантовых систем играет понятие локально матричной положительности. С помощью этого понятия локально выпуклая версия теоремы об инъективности Чои–Эффроса [1] доказана в [2] для квантовых систем. Таким образом, «конкретная» локально матричная положительность корректно определена и играет существенную роль в различных нетривиальных результатах о квантовых системах. Поэтому нам нужно выяснить, что стоит за этой конкретной локально матричной положительностью, а именно, как это понятие может быть описано в абстрактной форме.

В данной заметке мы исследуем свойства двойственности квантовых конусов как подходящий язык, чтобы обрисовать локально матричную положительность в общей форме. Двойственность квантовых конусов представляет самостоятельный интерес и оказывается одним из фундаментальных разделов теории квантовых пространств. В качестве главного результата мы предлагаем теорему о биполяре для квантовых конусов. Теорема о биполяре для квантовых конусов основана на классической теореме о строгой отделимости [11, 10.4.8] и представляется простой и естественной. Привлекая конструкцию Полсена $\mathcal{P}_V$, мы можем вывести операторную теорему о биполяре из теоремы о биполяре для квантовых конусов. Это новое прямое доказательство операторной теоремы о биполяре (в частности, теоремы Руана), использующее методы самой теории квантовых пространств.

1. Квантовые пространства. Линейное пространство всех матриц конечного размера $x = [x_{ij}]$ над линейным пространством V обозначается через $M(V)$, и мы полагаем $M = M(\mathbb{C})$. Это пространство M является нормированным пространством, отождествляемым с пространством операторов конечного ранга на гильбертовом пространстве ℓ_2 , пополнением которого является C^* -алгебра компактных операторов [12, 6.3.2]. Если $v, w \in M(V)$, то имеется *прямая сумма* $v \oplus w \in M(V)$. Если $a \in M$, $v \in M(V)$ и $b \in M$ с согласованными размерами, то имеется *матричное произведение* $avb = [\sum_{k,l} a_{ik} v_{kl} b_{lj}]_{i,j} \in M(V)$. Линейное отображение $\varphi: V \rightarrow W$ имеет каноническое линейное расширение $\varphi^{(\infty)}: M(V) \rightarrow M(W)$, $\varphi([x_{ij}]) = [\varphi(x_{ij})]$. Под *квантовым множеством* $\mathfrak{B}$ на V мы понимаем семейство $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_n)$ подмножеств $\mathfrak{b}_n \subseteq M_n(V)$ ($M_n(V)$ — пространство $(n \times n)$ -матриц над V), $n \geq 1$. Квантовое множество $\mathfrak{B}$ в $M(V)$ называется *матрично выпуклым* [9], если $\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ и $a^* \mathfrak{B} a \subseteq \mathfrak{B}$, $a \in M$, $a^* a = I$. Матрично выпуклое множество называется *абсолютно матрично выпуклым*, если $a \mathfrak{B} b \subseteq \mathfrak{B}$ для всех сжатий $a, b \in M$. Функционал Минковского для поглощающего (в $M(V)$) абсолютно матрично выпуклого множества называется *матричной полунормой* на V . Полиноммированная (или локально выпуклая) топология, определенная отделяющим семейством матричных полунорм, называется *квантовой топологией*, а линейное пространство V , наделенное квантовой топологией, называется *квантовым пространством*. Квантовое

пространство, в котором квантовая топология определена матричной нормой, называется *квантовым нормированным* (или *абстрактным операторным*) *пространством* (см. [10]). Подпространства C^* -алгебры $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H являются (конкретными) операторными пространствами. Таким образом, квантовая топология $\mathfrak{t}$ на V — это полинормированная топология в $M(V)$ с базой фильтра окрестностей, состоящей из абсолютно матрично выпуклых множеств. В частности, она индуцирует полинормированную топологию $\mathfrak{t}|V$ в V . Обратно, каждая полинормированная топология t в V является сужением некоторой квантовой топологии $\mathfrak{t}$ в $M(V)$, называемой ее *квантованием*, т.е. $t = \mathfrak{t}|V$. Все эти квантования оцениваются квантованиями $\min t$ и $\max t$ [5]. Пусть (V, W) является дуальной парой с двойственностью $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$. Данное спаривание определяет *квантовое* (или *матричное*) *спаривание* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : M(V) \times M(W) \rightarrow M$, $\langle\langle v, w \rangle\rangle = [\langle v_{ij}, w_{st} \rangle]_{(i,s),(j,t)}$. Семейство $\{p_w : w \in M(W)\}$ с $p_w(v) = \|\langle\langle v, w \rangle\rangle\|$ матричных полунорм определяет *слабую квантовую топологию* $\mathfrak{s}(V, W)$ на V , которая является единственным квантованием слабой топологии $\sigma(V, W)$ (см. [6]). Итак, $\min \sigma(V, W) = \max \sigma(V, W) = \mathfrak{s}(V, W)$. Для данного квантового множества $\mathfrak{B}$ в $M(V)$ определим его *абсолютную матричную полярю* $\mathfrak{B}^\odot = \{w \in M(W) : \sup \|\langle\langle \mathfrak{B}, w \rangle\rangle\| \leq 1\}$ в $M(W)$. Легко проверить, что $\mathfrak{B}^\odot$ является $\mathfrak{s}(W, V)$ -замкнутым абсолютно матрично выпуклым множеством в $M(W)$ (см. [5]). Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V'$ между квантовыми пространствами называется *матрично непрерывным*, если $\varphi^{(\infty)} : M(V) \rightarrow M(V')$ является непрерывным линейным отображением соответствующих полинормированных пространств. Для квантовых нормированных пространств мы имеем дело с *матричным ограниченным линейным отображением*. Напомним, что линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V'$ квантовых нормированных пространств называется *матричной изометрией*, если $\|\varphi^{(\infty)}(v)\|_{M(V')} = \|v\|_{M(V)}$ для всех $v \in M(V)$.

Под *инволюцией* на линейном пространстве X мы понимаем линейное отображение сопряжения $x \mapsto x^*$ на X , такое, что $x^{**} = x$ для всех $x \in X$. Линейное пространство, наделенное инволюцией, называется **-линейным пространством*. Элемент $x \in X$ называется *эрмитовым*, если $x^* = x$. Множество всех эрмитовых элементов обозначается через X_h , оно является вещественным линейным подпространством в X . Инволюция на X естественным образом расширяется до инволюции на матричном пространстве $M(X)$. Таким образом, $M(X)$ превращается в **-линейное пространство*. Если X является **-линейным пространством* и (X, Y) — такая дуальная пара, что инволюция на X является $\sigma(X, Y)$ -непрерывной, то Y обладает канонической инволюцией $y \mapsto y^*$, $\langle x, y^* \rangle = \langle x^*, y \rangle^*$. В этом случае будем говорить, что (X, Y) является *дуальной *-парой*.

Пусть (J, n) — упорядоченная пара, состоящая из множества J и фиксированного отображения $n : J \rightarrow \mathbb{N}$. Для каждого $w \in J$ существует *атомная алгебра* $M_{n(w)}$ всех квадратных комплексных матриц порядка $n(w)$. В частности, имеется L^∞ -алгебра фон Неймана $M_{(J,n)} = \bigoplus_{w \in J}^\infty M_{n(w)}$, которая является прямой L^∞ -суммой атомных алгебр. Отметим, что $M_{(J,n)}$ является унитарной **-подалгеброй* в прямом произведении $D_{(J,n)} = \prod_{w \in J} M_{n(w)}$ атомных алгебр. Поэтому каждый элемент $v \in M_{(J,n)}$ можно записать как семейство $v = (v_w)_{w \in J}$ с $v_w \in M_{n(w)}$ и $\|v\| = \sup_{w \in J} \|v_w\| < \infty$.

2. Квантовые конусы. Фиксируем $*$ -линейное пространство X . Квантовое подмножество $\mathfrak{C}$ в $M(X)_h$ называется *квантовым конусом на X* , если $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$ и $a^* \mathfrak{C} a \subseteq \mathfrak{C}$ для всех $a \in M$. Квантовый конус $\mathfrak{C}$ называется *квантовым $*$ -конусом*, если $M(X)_h = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$. Квантовый конус $\mathfrak{C}$ на X называется *отделимым квантовым конусом на X* , если $\mathfrak{C} \cap -\mathfrak{C} = \{0\}$. Любая C^* -алгебра A обладает отделимым квантовым $*$ -конусом $M(A)_+$, совпадающим с множеством всех положительных элементов в $M(A)$. Далее, пусть (J, n) — упорядоченная пара, где n — отображение $J \rightarrow \mathbb{N}$. Если K — подмножество в J , то мы имеем квантовый $*$ -конус $\mathfrak{C}_K = \{x \in M(D_{(J,n)})_h : x_w \geq 0, w \in K\}$ на $D_{(J,n)}$. Отметим, что $\mathfrak{C}_J = M(D_{(J,n)})_+$ является отделимым квантовым $*$ -конусом.

Пусть теперь V — произвольное линейное пространство. Если V^* — сопряженное к нему пространство, то введем следующее $*$ -линейное пространство: $\mathcal{P}_V = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & u \\ v^* & \mu \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, u, v \in V \right\}$ с инволюцией $\begin{bmatrix} \lambda & u \\ v^* & \mu \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda^* & v \\ u^* & \mu^* \end{bmatrix}$. Отметим, что $\mathcal{P}_V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus V \oplus V^*$ является линейным пространством. С точностью до канонического перемешивания мы имеем $M(\mathcal{P}_V) = \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ y^* & b \end{bmatrix} : a, b \in M, x, y \in M(V) \right\}$, где $y^* = [y_{ji}^*] \in M(V^*)$, тогда как $y = [y_{ij}] \in M(V)$. Если (V, W) является дуальной парой, то дуальной парой является и $(\mathcal{P}_V, \mathcal{P}_W)$ с канонической двойственностью $\mathcal{P}_V \times \mathcal{P}_W \rightarrow \mathbb{C}$, $\left\langle \begin{bmatrix} \lambda & u \\ v^* & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & z \\ w^* & \beta \end{bmatrix} \right\rangle = \lambda \alpha^* + \mu \beta^* + \langle u, z \rangle + \langle v, w \rangle^*$, где $u, v \in V$ и $z, w \in W$. Само пространство V вложено в $\mathcal{P}_V$ посредством канонического линейного отображения $\iota_V : V \rightarrow \mathcal{P}_V$, $\iota_V(x) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Если $\mathfrak{B} \subseteq M(V)$ — квантовое множество, то определим новое квантовое множество $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ на пространстве $\mathcal{P}_V$, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & v \\ v^* & b \end{bmatrix} \in M(\mathcal{P}_V)_h : (a + \varepsilon I)^{-1/2} v (b + \varepsilon I)^{-1/2} \in \mathfrak{B}, a, b \in M_+, \varepsilon > 0, v \in M(V) \right\}$. Отметим, что $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ является квантовым $(*)$ -конусом на $\mathcal{P}_V$, если $\mathfrak{B}$ — (поглощающее) абсолютно матрично выпуклое множество.

Лемма 1. Пусть (V, W) — дуальная пара, и пусть $\mathfrak{B}$ — абсолютно матрично выпуклое множество на V . Тогда $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^- = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^-$, где $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^-$ есть $\mathfrak{s}(\mathcal{P}_V, \mathcal{P}_W)$ -замыкание квантового множества $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{B}^-$ есть $\mathfrak{s}(V, W)$ -замыкание квантового множества $\mathfrak{B}$. В частности, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ является отделимым квантовым конусом, если и только если им является $\mathfrak{B}$ в том смысле, что $\bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon \mathfrak{B} = \{0\}$.

3. Квантовая поляра. Пусть теперь (X, Y) — дуальная $*$ -пара. Если $\mathfrak{C}$ является квантовым множеством на X , то определим его *квантовую поляру* $\mathfrak{C}^{\square} = \{y \in M(Y)_h : \langle \mathfrak{C}, y \rangle \geq 0\}$ в $M(Y)$. Легко проверить, что $\mathfrak{C}^{\square}$ является квантовым конусом в $M(Y)$.

Предложение 2. Пусть (V, W) — дуальная пара, и пусть $\mathfrak{B}$ является абсолютно матрично выпуклым множеством на V . Тогда $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^{\square} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\square}}$.

Теперь приведем теорему о биполяре для слабо замкнутого квантового $*$ -конуса.

Теорема 3. Пусть (X, Y) — дуальная $*$ -пара, и пусть $\mathfrak{C}$ является слабо замкнутым квантовым $*$ -конусом на X . Тогда $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{\square\square}$.

Следствие 4. Пусть (V, W) — дуальная пара, и пусть $\mathfrak{B}$ является абсолютно матрично выпуклым множеством на X . Тогда $\mathfrak{B}^- = \mathfrak{B}^{\odot\odot}$. ($\mathfrak{B}^-$ есть $\mathfrak{s}(V, W)$ -замыкание квантового множества $\mathfrak{B}$.)

Доказательство. Можно предположить, что $\mathfrak{B}$ является слабо замкнутым поглощающим и абсолютно матрично выпуклым множеством. Рассмотрим дуальную $*$ -пару $(\mathcal{P}_V, \mathcal{P}_W)$. По лемме 1 квантовый $*$ -конус $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ является $\mathfrak{s}(\mathcal{P}_V, \mathcal{P}_W)$ -замкнутым. Более того, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^{\square} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot}}$ благодаря предложению 2. Так как $\mathfrak{B}^{\odot}$ является $\mathfrak{s}(W, V)$ -замкнутым квантовым множеством на W , то $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot}}^{\square} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot\odot}}$ снова благодаря предложению 2. Используя теорему 3 (примененную к случаю $X = \mathcal{P}_V$ и $Y = \mathcal{P}_W$), мы заключаем, что $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^{\square\square} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot}}^{\square} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot\odot}}$. Наконец, пусть $v \in \mathfrak{B}^{\odot\odot}$. Тогда $\begin{bmatrix} I & v \\ v^* & I \end{bmatrix} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}^{\odot\odot}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$. Отсюда следует, что $(1 + \varepsilon)^{-1}v \in \mathfrak{B}$ для всех $\varepsilon > 0$. Но $v = \mathfrak{s}(V, W)\text{-}\lim_{\varepsilon} (1 + \varepsilon)^{-1}v$, т. е. $v \in \mathfrak{B}^- = \mathfrak{B}$. Поэтому $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{\odot\odot}$, что доказывает утверждение. $\square$

Теперь приведем теорему о представлении для квантового конуса.

Следствие 5. Пусть (X, Y) — дуальная $*$ -пара, и пусть $\mathfrak{C}$ — слабо замкнутый квантовый $*$ -конус на X . Тогда существуют упорядоченная пара (J, n) и $*$ -линейное отображение $\varphi: X \rightarrow D_{(J, n)}$, такие, что $\varphi^{(\infty)}(\mathfrak{C}) = \varphi^{(\infty)}(M(X)_h) \cap M(D_{(J, n)})_+$.

Доказательство. Пусть $J = \mathfrak{C}^{\square}$, причем $n: \mathfrak{C}^{\square} \rightarrow \mathbb{N}$, $n(y) = m$, где $y \in M_m(Y)$. Мы имеем корректно определенное $*$ -линейное отображение $\varphi: X \rightarrow D_{(J, n)}$, $\varphi(x) = (\langle\langle x, y \rangle\rangle)_{y \in J}$. Легко проверить, что $\varphi^{(\infty)}(x) = (\langle\langle x, y \rangle\rangle)_{y \in J}$, $x \in M(X)$. Если $x \in \mathfrak{C}$, то $\langle\langle x, y \rangle\rangle \geq 0$, $y \in J$, при $J = \mathfrak{C}^{\square}$. Таким образом, $\varphi^{(\infty)}(x) \in M(D_{(J, n)})_+$. Обратно, если $\varphi^{(\infty)}(x) \in M(D_{(J, n)})_+$ для некоторого элемента $x \in M(X)_h$, то $\langle\langle x, y \rangle\rangle \geq 0$ для всех $y \in \mathfrak{C}^{\square}$. Это означает, что $x \in \mathfrak{C}^{\square\square}$. По теореме 3 $x \in \mathfrak{C}$. Таким образом, $\varphi^{(\infty)}(\mathfrak{C}) = \varphi^{(\infty)}(M(X)_h) \cap M(D_{(J, n)})_+$. $\square$

Следствие 6 (теорема Руана). Пусть V — квантовое нормированное пространство. Тогда $V \subseteq M_{(J, n)}$ с точностью до матричной изометрии для некоторой упорядоченной пары (J, n) .

Доказательство. Рассмотрим единичный шар $\text{ball } M(V)$ в $M(V)$ и возьмем его абсолютную матричную полярю $\mathfrak{B} = (\text{ball } M(V))^{\odot}$ в $M(V^*)$, где V^* — пространство всех ограниченных линейных функционалов на V . Мы имеем корректно определенное отображение $n: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{N}$, $n(w) = n$, если $w \in \mathfrak{b}_n$. Поэтому $(\mathfrak{B}, n)$ является упорядоченной парой. Более того, мы имеем корректно определенное сжатие $\Phi: V \rightarrow M_{(\mathfrak{B}, n)}$, $\Phi(x) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{B}} \langle\langle x, w \rangle\rangle$. Если $v \in \text{ball } M(V)$, то $\Phi^{(\infty)}(v) = [\Phi(v_{ij})] = [\bigoplus_{w \in \mathfrak{B}} \langle\langle v_{ij}, w \rangle\rangle] = \bigoplus_{w \in \mathfrak{B}} \langle\langle v, w \rangle\rangle$ и $\|\Phi^{(\infty)}(v)\| = \sup \|\langle\langle v, \mathfrak{B} \rangle\rangle\| \leq 1$ для $\mathfrak{B} = (\text{ball } M(V))^{\odot}$. Поэтому Φ является матричным сжатием. Если Φ не является матричной изометрией, то существует такой элемент $v \in M(V)$, $\|v\| = 1$, что $\|\Phi^{(\infty)}(v)\| \leq \alpha < 1$. Отсюда следует, что $\sup_{u \in \alpha^{-1}\mathfrak{B}} \|\langle\langle v, u \rangle\rangle\| \leq 1$, т. е. $v \in (\alpha^{-1}\mathfrak{B})^{\odot}$. Но $(\alpha^{-1}\mathfrak{B})^{\odot} = \alpha\mathfrak{B}^{\odot}$ и $\text{ball } M(V)$ является $\mathfrak{s}(V, V^*)$ -замкнутым. Мы заключаем, что $\text{ball } M(V) = \mathfrak{B}^{\odot}$ в силу следствия 4. Значит, $v \in \alpha \text{ball } M(V)$ или $\|v\| \leq \alpha < 1$; возникает противоречие. Таким образом, $V \subseteq M_{(\mathfrak{B}, n)}$ с точностью до матричной изометрии. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. D. Choi, E. G. Effros, J. Funct. Anal., **24**:2 (1977), 156–209. [2] A. A. Dosiev, J. Funct. Anal., **255**:7 (2008), 1724–1760. [3] A. A. Dosiev, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **344**:10 (2007), 627–630. [4] A. A. Dosi, Trans. Amer. Math. Soc., **363**:2 (2011), 801–856. [5] A. A. Dosi, J. Math. Phys., **51**:6 (2010), 1–43. [6] A. A. Dosi, Inter. J. Math., **22**:4 (2011), 1–7. [7] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 2000. [8] E. G. Effros, C. Webster, in: *Operator Algebras and Applications* (Samos 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 495, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 163–207. [9] E. G. Effros, S. Winkler, J. Funct. Anal., **144**:1 (1997), 117–152. [10] А. Я. Хелемский, *Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении*, МЦНМО, М., 2009. [11] С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, изд-во Ин-та математики им. С. П. Соболева, Новосибирск, 1995. [12] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990. [13] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies Advanced Math., vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Middle East Technical University
Northern Cyprus Campus, Turkey
e-mail: dosiev@yahoo.com, dosiev@metu.edu.tr

Поступило в редакцию
30 ноября 2010 г.

УДК 517.983.23

Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$

© 2012. К. В. СТОРОЖУК*

Пусть X — банахово пространство, $T: X \rightarrow X$ — линейный оператор, такой, что $\|T^n\| \leq C < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0\}$. Оператор T называется *асимптотически конечномерным*, если $\text{codim } X_0 < \infty$.

Пусть существует компакт $K \subset X$, такой, что орбиты элементов единичного шара B_X в том или ином смысле приближаются к K . Какие условия на «тот или иной смысл» гарантируют асимптотическую конечномерность оператора T ? Такие же вопросы можно поставить и для однопараметрических полугрупп операторов. Перечислим некоторые условия и результаты.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) = 0$ для любого $x \in B_X$. Тогда T асимптотически конечномерен и даже *расщепляем*, т. е. $X = X_0 \oplus L$, где L — конечномерное T -инвариантное подпространство. Для марковских полугрупп в L_1 этот результат доказан в [1], в [2] он установлен для положительных операторов в банаховых решетках, а для произвольного X в [3] и [4].

2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт «притягивает, но, быть может, не сильно»). Тогда T асимптотически конечномерен [5].

3. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) = 0$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт K «притягивает лишь иногда»). T и в этом случае асимптотически конечномерен [6].

4. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1$ для любого $x \in B_X$ (т. е. компакт K «притягивает лишь иногда и не сильно»). В [7, 1.3.33] поставлен следующий вопрос:

*Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6613.2010.1).