Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Две задачи теории квадратичных отображений, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 3, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:01:48

Две задачи теории квадратичных отображений*

© 2012. А. В. АРУТЮНОВ

В недавней работе [1] сформулировано 14 открытых проблем нелинейного анализа и теории оптимизации. Из них две последние (тринадцатая и четырнадцатая) относятся к теории квадратичных отображений. Напомним их:

Проблема 13. *Решение системы квадратных уравнений.* Для натуральных n и k заданы квадратные симметричные матрицы Q_i , $i = 1, \dots, k$, размера $n \times n$. Они определяют на $X = \mathbb{R}^n$ квадратичные формы $q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$ и квадратичное отображение $Q: X \rightarrow \mathbb{R}^k$, задаваемое формулой $Q(x) = (q_1(x), \dots, q_k(x))$. Положим $K = \{x \in X : Q(x) = 0, x \neq 0\}$. Элементы конуса K называются нулями квадратичного отображения Q .

Проблема состоит в нахождении достаточных условий, сформулированных в терминах матриц Q_i , при которых

$$q_1(x) = \dots = q_k(x) = 0 \implies x = 0, \quad (1)$$

или, что то же самое, конус K пуст.

Проблема 14. *Минимизация максимума из конечного числа квадратичных форм.* Эта проблема заключается в нахождении достаточных условий, сформулированных в терминах матриц Q_i , при которых

$$\max\{q_1(x), \dots, q_k(x)\} > 0 \text{ для любого } x \in X, x \neq 0, \quad (2)$$

и достаточных условий, при которых

$$\max\{q_1(x), \dots, q_k(x)\} \geq 0 \text{ для любого } x \in X. \quad (3)$$

Обе сформулированные проблемы как представляют самостоятельный интерес, так и имеют многочисленные приложения (подробности см. в [1]).

При $k = 1$ ответ в проблеме 13 очевиден: (1) выполняется тогда и только тогда, когда квадратичная форма q_1 либо положительно, либо отрицательно определена. Поэтому в дальнейшем для удобства будем считать, что $k \geq 2$. Далее, если найдется такой ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^k$, что $yQ(x) > 0$ для любого $x \in X$, $x \neq 0$, то очевидно, что (1) выполняется. (Здесь и далее $yQ = \sum_{i=1}^k y^i q_i$, а верхние индексы обозначают координаты вектора.) Аналогично, если существует $y \geq 0$, такой, что $yQ(x) > 0$ для любого $x \in X$, $x \neq 0$ (соответственно существует $y \geq 0$, $y \neq 0$, такой, что $yQ(x) \geq 0$ для любого $x \in X$), то выполняется (2) (соответственно (3)). (Запись $y \geq 0$ означает, что все координаты вектора y неотрицательны.)

Для $k = 2$ приведенные достаточные условия дают решение обеих проблем, поскольку, как известно (см. [1]), при $n \geq 3$ эти достаточные условия являются также и необходимыми. Однако при $k > 2$ это уже не так, поскольку приведенные достаточные условия далеки от необходимых и, значит, являются слишком грубыми. Например, при $k = 3$ для квадратичных форм $q_1(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №12-01-00427.

$q_2(x) = 2x^1x^2$, $q_3(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots + (x^n)^2$ конус K пуст, однако указанного выше ненулевого y не существует.

В этой заметке мы приведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы $K \neq \emptyset$ (а также для того, чтобы имели место (2) или (3)). Но для этого нам потребуются некоторые результаты из теории квадратичных отображений. Приведем их (см. также [2]).

Пусть наряду с квадратичными формами q_i , $i = 1, \dots, k$, на X задана также квадратичная форма q_0 .

Предложение 1. *Предположим, что квадратичная форма q_0 положительно определена на конусе K , состоящем из нулей квадратичного отображения Q . Тогда для любого $h \in X$ существуют такие вектор $y \in \mathbb{R}^k$ и линейное подпространство $M \subseteq X$, что $h \in M$, $\text{codim } M \leq k - 1$ и квадратичная форма $q_0 + yQ$ положительно определена на M . При этом векторы y равномерно (по h) ограничены.*

Это утверждение является эквивалентной переформулировкой теоремы 2 из [2]. Отметим, что если пространство X бесконечномерно, то приведенное утверждение уже, вообще говоря, не выполняется.

Сформулируем теперь лемму 2 из [2]:

Предложение 2. *Пусть квадратичное отображение Q сюръективно (т. е. $Q(X) = \mathbb{R}^k$) и*

$$n \geq k^2. \quad (4)$$

Тогда множество его нулей K непусто.

Отметим, что, как было показано в [2, с. 173], оценку (4) можно ослабить. Например, при $k = 2$, если отображение Q сюръективно и $n \geq 3$, то $K \neq \emptyset$. Однако совсем опустить предположение (4) нельзя, так как при $k = 2$, $n = 2$ квадратичное отображение $Q(x) = ((x^1)^2 - (x^2)^2, 2x^1x^2)$ сюръективно, но множество его нулей пусто.

Для целых неотрицательных s введем в рассмотрение множества $\mathcal{M}_s$, элементами которых являются такие линейные подпространства $M \subseteq X$, что $\text{codim } M \leq s$ и существует $y \in \mathbb{R}^k$, такой, что $yQ(x) > 0$ для любого $x \in M \setminus \{0\}$.

Эти множества $\mathcal{M}_s$ определяются квадратичным отображением Q и являются его важным инвариантом. Отметим, что если $M \in \mathcal{M}_0$, то $M = X$ и, значит, для некоторого $y \in \mathbb{R}^k$ квадратичная форма yQ положительно определена.

Теорема 1. *Пусть множество нулей квадратичного отображения Q пусто и*

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}} M \neq X. \quad (5)$$

Тогда отображение Q сюръективно.

Отметим, что если $\mathcal{M}_{k-2} = \emptyset$, то (5) выполняется автоматически.

Заметим, что если $Q(X) \neq \mathbb{R}^k$, то в $\mathbb{R}^k$ существует такой базис $\{y_i\}$, $i = 1, \dots, k$, что для квадратичных форм $\bar{q}_i(x) = \langle y_i, Q(x) \rangle$

$$\bar{q}_1(x) \geq 0 \text{ для любого } x, \text{ такого, что } \bar{q}_i(x) = 0, i = 2, \dots, k.$$

Но поскольку по условию $K = \emptyset$, мы отсюда заключаем, что квадратичная форма $\bar{q}_1$ положительна на общих нулях квадратичных форм $\bar{q}_2, \dots, \bar{q}_k$. Применяя теперь предложение 1, получаем противоречие с (5), которое завершает доказательство теоремы 1.

Следующая теорема дает достаточные условия непустоты конуса K , даже если оценка (4) нарушается.

Теорема 2. Пусть

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-1}} M \neq X. \quad (6)$$

Тогда множество нулей квадратичного отображения Q непусто.

Действительно, пусть $K = \emptyset$. Тогда $q_0(x) > 0$ для любого $x \neq 0$, такого, что $q_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, k$, где $q_0(x) = -|x|^2$. Применяя к квадратичной форме q_0 и формам q_i предложение 1, получаем противоречие с (6), что завершает доказательство теоремы 2.

Теоремы 1, 2 и предложение 2 дают следующие необходимые условия отсутствия нулей квадратичного отображения Q :

Пусть конус K пуст. Тогда

$$(a) \bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-1}} M = X.$$

Если же, кроме того, выполняется (4), то

$$(b) \bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}} M = X.$$

При $k = 2$ и $n \geq 4$ из (b) вытекает упомянутое выше необходимое (очевидно, и достаточное) условие пустоты конуса K : $y^1 q_1(x) + y^2 q_2(x) > 0$ для любого $x \neq 0$ и для некоторых y^1, y^2 . При $k = 2$ и $n = 3$ это же утверждение вытекает из рассуждений, приведенных после предложения 2, и теоремы 1.

Условие (b) (и, аналогично, условие (a)) является достаточным для того, чтобы выполнялось (1), так как если $Q(x) = 0$ для некоторого x , то в силу условия (b) $x \in M$ для некоторого $M \in \mathcal{M}_{k-2}$ и, значит, существует $y \in \mathbb{R}^k$, такой, что $\langle y, Q(\xi) \rangle > 0$ для любого $\xi \in M \setminus \{0\}$, а следовательно, $x = 0$.

Теперь, возвращаясь к проблеме 13, получаем следующий результат: Условие (1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (a). Таким образом, условия (1) и (a) эквивалентны. Если справедливо неравенство (4), то условие (1) эквивалентно условию (b).

Пусть выполняется (4). Тогда в силу предложения 2 условие, что квадратичное отображение Q не является сюръективным (т.е. $Q(X) \neq \mathbb{R}^k$), необходимо для выполнения (1), но, очевидно, не является для этого достаточным. Пример дает произвольная квадратичная форма, которая неотрицательно определена, но не является положительно определенной. Тем не менее для квадратичных отображений общего положения условия $Q(X) \neq \mathbb{R}^k$ и (1) уже оказываются эквивалентными.

Перейдем к проблеме 14. Следующее очевидное утверждение сводит (2) к исследованной выше проблеме 13.

Для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, k$, определим квадратичные формы $\tilde{q}_i(x, \xi)$ формулами $\tilde{q}_i(x, \xi) = q_i(x) + |\xi_i|^2$, $i = 1, \dots, k$.

Предложение 3. Условие (2) эквивалентно тому, что

$$\{(x, \xi) : (x, \xi) \neq 0, \tilde{q}_i(x, \xi) = 0, i = 1, \dots, k\} = \emptyset.$$

Для целых неотрицательных s введем в рассмотрение множества $\mathcal{M}_s^{++}$ и $\mathcal{M}_s^+$, элементами которых являются такие линейные подпространства $M \subseteq X$, что

$$\text{codim } M \leq s \text{ и существует } y \in \mathbb{R}^k, y \geq 0,$$

$$\text{такой, что } yQ(x) > 0 \text{ для любого } x \in M \setminus \{0\}$$

и

$\text{codim } M \leq s$ и существует $y \in \mathbb{R}^k$, $y \geq 0$, $y \neq 0$,
такой, что $yQ(x) \geq 0$ для любого $x \in M$

соответственно.

Из предложения 3 и того, что если выполняется (4), то условия (1) и (b) эквивалентны, получаем следующее утверждение:

Условие (2) эквивалентно тому, что $\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}^{++}} M = X$.

Применяя это утверждение к возмущенным квадратичным формам $q_{i,\varepsilon}(x) = q_i(x) + \varepsilon|x|^2$, где $\varepsilon > 0$ – параметр возмущения, и осуществляя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, с помощью теоремы 4.4 из [3, с. 29] получаем такое утверждение:

Условие (3) эквивалентно тому, что $\bigcup_{M \in \mathcal{M}_{k-2}^+} M = X$.

Я приношу искреннюю благодарность профессору Р. С. Исмагилову за плодотворные обсуждения и ценные предложения по этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.-B. Hiriart-Urruty, SIAM Review, **49:2** (2007), 255–273. [2] А. В. Арутюнов, Матем. заметки, **84:2** (2008), 163–174. [3] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997.

Российский университет дружбы народов
e-mail: arutun@orc.ru

Поступило в редакцию
28 сентября 2010 г.

УДК 517.98

Теорема о биполяре для квантовых конусов

© 2012. А. Доси

Одним из фундаментальных результатов квантового функционального анализа является операторная (или квантовая) теорема о биполяре, доказанная Эффросом и Уэбстером в [5], в которой утверждается, что двойная квантовая поляр для абсолютно матрично выпуклого множества на линейном пространстве V совпадает со своим слабым замыканием относительно фиксированной дуальной пары (V, W) . Известная теорема Руана ([7, 2.3.5], [10]) об абстрактной характеристизации операторных (или квантовых нормированных) пространств легко выводится из операторной теоремы о биполяре. С другой стороны, как показано в [6], результат Руана вместе с некоторыми фактами из теории двойственности для операторных пространств позволяет получить другое доказательство операторной теоремы о биполяре. Это ее доказательство на языке операторных пространств. Таким образом, и теорема Руана, и операторная теорема о биполяре имеют единый источник (в теории C^* -алгебр); в определенном смысле они эквивалентны. Другой подход к теореме Руана был предложен Полсеном в [13]. Это иная точка зрения на предмет, использующая структуры $*$ -линейного пространства и матричного порядка, которая приводит к концепции операторной системы. Каждое абстрактное операторное пространство вложено в абстрактную операторную систему с точностью до матричной изометрии. Эта