Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Кривошеева, А. С. Кривошеев, Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 14–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:43:31

Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости*

© 2012. О. А. Кривошеева, А. С. Кривошеев

В работе изучается проблема справедливости фундаментального принципа для инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств функций, аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости, допускающих спектральный синтез. Ранее эта проблема была решена при одном ограничении на кратность собственных значений оператора дифференцирования. В данной работе это ограничение снимается. Таким образом, приводится полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях.

§1. Введение

Пусть D — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в области D , с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D , $H^*(D)$ — пространство, сильно сопряженное к $H(D)$, называемое также пространством аналитических функционалов. Символом W будем обозначать нетривиальное замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т. е. вместе с каждой функцией φ подпространство W содержит и ее производную φ' . Поскольку W нетривиально, по теореме Хана–Банаха найдется ненулевой аналитический функционал $\mu \in H^*(D)$, который обращается в нуль на всех функциях подпространства W . Пусть

$$f(\lambda) = (\mu, \exp(\lambda z)), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

— преобразование Лапласа функционала μ . Известно (см., например, [1, §12, п. 1]), что $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа (другими словами, выполняется неравенство

$$|f(\lambda)| \leq A \exp(B|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где A и B — некоторые положительные постоянные). Множество всех экспонент полно в пространстве $H(D)$ (см., например, [1, §12, п. 1]). Поэтому функция $f(\lambda)$ отлична от тождественного нуля.

Если ξ — собственное значение оператора дифференцирования в W (т. е. собственная функция $\exp(\xi z)$ этого оператора лежит в W), то

$$f(\xi) = (\mu, \exp(\xi z)) = 0.$$

Следовательно, совокупность всех собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора дифференцирования в W является частью нулевого множества целой функции f .

*Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Это, в частности, означает, что множество $\{\lambda_k\}$ конечно или счетно. В последнем случае $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Будем считать, что последовательность $\{\lambda_k\}$ пронумерована по неубыванию модулей.

Пусть m_k — кратность собственного значения λ_k в W , т.е. присоединенные функции $z^n \exp(\lambda_k z)$ оператора дифференцирования принадлежат подпространству W для всех $n = 1, \dots, m_k - 1$, а функция $z^{m_k} \exp(\lambda_k z)$ таким свойством уже не обладает. Тогда

$$f^{(n)}(\lambda_k) = (\mu, \exp(\lambda z))|_{\lambda=\lambda_k}^{(n)} = (\mu, z^n \exp(\lambda_k z)) = 0, \quad n = 0, \dots, m_k - 1.$$

Следовательно, число m_k не превосходит кратности нуля λ_k функции $f(\lambda)$. В этом случае говорят, что кратная последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ (которую называют кратным спектром оператора дифференцирования в подпространстве W) является частью кратного нулевого множества функции f . Пусть

$$E(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$$

— множество всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W . Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если система $E(\Lambda)$ полна в нем. Примерами таких инвариантных подпространств служат пространства решений однородных уравнений свертки [3]

$$M(\varphi)(\varsigma) \equiv (\nu, \varphi(z + \varsigma)) \equiv \int \varphi(z + \varsigma) d\sigma(z) \equiv 0,$$

где ν — некоторый функционал из $H^*(D)$, а $d\sigma$ — соответствующая ему (не единственным образом) комплексная мера с компактным носителем в области D . В частности, это относится к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков, к линейным разностным и дифференциально-разностным уравнениям с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков (см., например, [1, §17, п. 1]). В случае когда подпространство W является пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, хорошо известен фундаментальный принцип Л. Эйлера, согласно которому каждая функция из W представляет собой линейную комбинацию собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W (их в этом случае конечное число). В связи с этим проблема представления функций из инвариантного подпространства $W \subset H(D)$, допускающего спектральный синтез, посредством рядов

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z) \quad (1)$$

по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования в W , сходящихся в топологии пространства $H(D)$, носит также название проблемы фундаментального принципа для инвариантных подпространств.

Ее решение тесно связано с решением интерполяционной задачи в пространствах целых функций и имеет очень богатую историю. Обзор некоторых основных результатов по проблемам фундаментального принципа и интерполяции можно найти в работе [4]. Здесь мы отметим лишь некоторые из работ, а именно

[4]–[14], в которых решалась проблема фундаментального принципа. В работе [4] при условии $m(\Lambda) = 0$, где

$$m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{|\lambda_k|},$$

найденно полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной плоскости. Целью данной работы является доказательство того, что в случае ограниченной области D условие $m(\Lambda) = 0$ необходимо для справедливости фундаментального принципа. Таким образом, результат этой работы вместе с результатом работы [4] дает полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях уже без всяких дополнительных ограничений.

§2. Замкнутость множества сумм рядов экспоненциальных мономов

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, сделаем некоторые необходимые замечания и докажем вспомогательный результат.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ положим

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln j}{|\xi_j|}, \quad N(\Lambda) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k , причем каждая из точек λ_k встречается в ней ровно m_k раз.

Пусть система

$$E(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$$

неполна в пространстве $H(D)$ и W — подпространство в $H(D)$, которое является замыканием в топологии пространства $H(D)$ линейной оболочки системы $E(\Lambda)$. Тогда оно, очевидно, нетривиально (т. е. $W \neq \{0\}, H(D)$), замкнуто в $H(D)$, инвариантно относительно оператора дифференцирования и допускает спектральный синтез. Таким образом можно получить любое нетривиальное замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство пространства $H(D)$, допускающее спектральный синтез. При этом система $E(\Lambda)$ совпадает с множеством всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W . Во введении отмечалось, что последовательность Λ является частью нулей целой функции экспоненциального типа f . Следовательно, нули функции f , а значит, и последовательность Λ имеют конечную верхнюю плотность (см., например, [15, гл. 1, теорема 2.3]), т. е. $N(\Lambda) < \infty$. Отсюда легко следует, что величина $\sigma(\Lambda)$ равна нулю.

При помощи функции $f(\lambda)$ всегда можно построить (см., например, [4], [15]) последовательность целых функций $\{f_{k,n}\}$, элементы которой являются преобразованиями Лапласа соответствующих элементов последовательности функционалов $\{\mu_{k,n}\} \subset H^*(D)$, биортогональной к системе функций $E(\Lambda)$, т. е. вы-

полнены равенства

$$(\mu_{k,n}, z^p \exp(\lambda_j z)) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, n = p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $W(D, \Lambda)$ — пространство сумм рядов вида (1), которые сходятся в топологии пространства $H(D)$. Существование биортогональной последовательности обеспечивает единственность представления элемента $g \in W(D, \Lambda)$ рядом (1), поскольку в этом случае коэффициенты ряда однозначно определяются по формуле

$$d_{k,n} = (\mu_{k,n}, g), \quad k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Из определений множеств $W(D, \Lambda)$ и W сразу следует вложение $W(D, \Lambda) \subset W$. С другой стороны, любая конечная линейная комбинация элементов системы $E(\Lambda)$ представляет собой ряд (1), в котором отлично от нуля лишь конечное число коэффициентов. Поэтому $E(\Lambda) \subset W(D, \Lambda)$. Таким образом, верны также вложения

$$\overline{E(\Lambda)} \subset \overline{W(D, \Lambda)} \subset \overline{W}.$$

Первое и последнее из этих множеств совпадают с W . Следовательно, мы имеем равенство $\overline{W(D, \Lambda)} = W$.

Проблема фундаментального принципа состоит в том, чтобы выяснить условия, когда W совпадает с пространством функций $W(D, \Lambda)$. В силу последнего равенства эта проблема равносильна проблеме замкнутости множества сумм $W(D, \Lambda)$ в пространстве $H(D)$.

Мы хотим показать, что равенство $m(\Lambda) = 0$ является необходимым условием замкнутости подпространства $W(D, \Lambda)$ в пространстве $H(D)$ в случае ограниченной выпуклой области D . Но прежде сделаем еще одно наблюдение.

Пусть $t > 0$ и D_t — область, полученная из D при помощи преобразования гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом t , т. е.

$$D_t = \{z' = tz : z \in D\}.$$

Положим

$$\Lambda(t) = \{t^{-1}\lambda_k, m_k\}.$$

Очевидно, что при любом $t > 0$ из равенств $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ следуют равенства $\sigma(\Lambda(t)) = m(\Lambda(t)) = 0$ и наоборот. Кроме того, нетрудно показать, что имеет место следующий результат.

Лемма 1. *Подпространства $W(D, \Lambda)$ и $W(D_t, \Lambda(t))$ замкнуты или незамкнуты соответственно в $H(D)$ и в $H(D_t)$ одновременно.*

Символами $B(z, r)$ и $S(z, r)$ будем обозначать соответственно открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r , а символом $\mathbb{S}$ — окружность $S(0, 1)$. Пусть

$$H_M(\lambda) = \sup_{z \in M} \operatorname{Re}(z\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

— опорная функция множества $M \subset \mathbb{C}$ (точнее говоря, комплексно-сопряженно-го к M множества). Она является выпуклой, положительно однородной порядка один и полунепрерывной снизу. Если M ограничено, то функция $H_M(\lambda)$ непрерывна в комплексной плоскости (см. [16]).

Сформулируем и докажем, наконец, основной результат параграфа — необходимое условие замкнутости подпространства $W(D, \Lambda)$.

Теорема 1. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что система $E(\Lambda)$ неполна в пространстве $H(D)$. Предположим, что $W(D, \Lambda)$ — замкнутое подпространство в $H(D)$. Тогда $m(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. $m(\Lambda) > 0$. Отметим, что случай, когда $m(\Lambda) = \infty$, невозможен, так как $m(\Lambda)$, очевидно, не превосходит $N(\Lambda)$, а последняя величина, как уже отмечалось выше, конечна. Тогда, согласно нашему предположению, найдутся положительное число τ и подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}, m_{k_j}\}$, такие, что последовательность $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , когда $j \rightarrow \infty$. Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ также сходится к некоторой точке ξ окружности $\mathbb{S}$. Рассмотрим по отдельности три возможные ситуации: начало координат лежит во внешности области D , в самой области D и на ее границе.

1) Пусть $0 \notin \overline{D}$. Поскольку D — ограниченная область, согласно лемме 1 (делая, если необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки a окружности $\mathbb{S}$ (очевидно, она является неединственной) круг $B(a, 1)$ содержит замыкание области D . Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (2)$$

где $m(j) = m_{k_j} - 1$, $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и K — некоторый выпуклый компакт из области D . Покажем, что при подходящем выборе компакта K этот ряд сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, заметим, что в силу включения $\overline{D} \subset B(a, 1)$ найдется радиус $r \in (0, 1)$, такой, что круг $B(a, r)$ все еще содержит область D . Поэтому для каждого $z \in D$ верна оценка

$$\begin{aligned} |c_j (z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq c_j r^{m(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \leq r^{m(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z) - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq r^{m(j)} \exp(H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались определением опорной функции области D . Так как $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , когда $j \rightarrow \infty$, то для некоторого номера j_0 имеем

$$m(j) \geq \tau |\lambda_{k_j}|/2, \quad j \geq j_0.$$

Следовательно, из предыдущего получаем

$$\begin{aligned} |c_j (z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \exp(m(j) \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq \exp(-\beta |\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), \quad j \geq j_0, \end{aligned}$$

где $\beta = -2^{-1}\tau \ln r > 0$. Выберем теперь компакт K из области D , настолько большой, т.е. настолько «близкий» к самой области D , что выполнена оценка

$$H_D(\lambda) \leq H_K(\lambda) + 2^{-1}\beta |\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

(в силу ограниченности области D такой компакт найдется). Отсюда и из предыдущего неравенства получаем

$$|c_j (z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \exp(-2^{-1}\beta |\lambda_{k_j}|), \quad j \geq j_0.$$

Тогда с учетом сделанного в начале параграфа замечания о том, что в условиях теоремы верно равенство $\sigma(\Lambda) = 0$, для всех $z \in D$ имеем

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-2^{-1} \beta |\lambda_{k_j}|) < \infty.$$

Это означает, что ряд (2) сходится равномерно во всей области D . Поэтому функция

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z) \quad (3)$$

аналитична в D . По условию подпространство $W(D, \Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Следовательно, функция $g(z)$ как предел элементов подпространства $W(D, \Lambda)$ (частичных сумм ряда (2)) принадлежит $W(D, \Lambda)$. Поэтому, согласно определению $W(D, \Lambda)$, имеет место представление

$$g(z) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad z \in D, \quad (4)$$

причем последний ряд сходится в топологии пространства $H(D)$.

Пусть $\{\mu_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$ — биортогональная к семейству $E(\Lambda)$ последовательность функционалов из сопряженного пространства $H^*(D)$, о существовании которой говорилось выше. Тогда в силу линейности и непрерывности этих функционалов из (4) получаем

$$\mu_{k_j,0}(g) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} \mu_{k_j,0}(z^n \exp(\lambda_k z)) = d_{k_j,0}, \quad j = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, в силу представления (3) имеем

$$\mu_{k_j,0}(g(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mu_{k_j,0}((z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)) = (-1)^{m(j)} c_j a^{m(j)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поэтому $|d_{k_j,0}| = |c_j a^{m(j)}| = c_j$, $j = 1, 2, \dots$, так как точка a лежит на окружности $\mathbb{S}$. Поскольку K — компакт в D , существует точка $z_0 \in D$, такая, что

$$\operatorname{Re}(z_0 \xi) > H_K(\xi).$$

Тогда из сходимости последовательности $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ к точке ξ и непрерывности и однородности опорной функции компакта для всех достаточно больших номеров j следует соотношение

$$\operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_j}) > H_K(\lambda_{k_j}).$$

Отсюда для этих же j с учетом определения коэффициентов c_j получаем

$$|d_{k_j,0} \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = |c_j \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z_0) - H_K(\lambda_{k_j})) > 1.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (4) в точке z_0 . Таким образом, предположение о том, что $m(\Lambda) \neq 0$, неверно. Следовательно, в этом случае теорема доказана.

2) Пусть теперь $0 \in D$. Через T обозначим пересечение опорной прямой области D в направлении ξ с границей этой области, т. е.

$$T = \{z : \operatorname{Re}(z\xi) = H_D(\xi)\} \cap \partial D.$$

В силу ограниченности области D множество T непусто и является точкой или отрезком. Как и выше (делая, если это необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки a окружности $\mathbb{S}$ круг $B(a, 1)$ содержит множество T и, кроме того, область D лежит в круге $B(0, 1)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (5)$$

где $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$, $j = 1, 2, \dots$, K — некоторый выпуклый компакт в D и $\{n(j)\}$ — последовательность натуральных чисел. Покажем, что при подходящем выборе K и чисел $n(j)$, $j = 1, 2, \dots$, этот ряд сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, заметим, что T — компакт, а потому лежит в круге $B(a, 1)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$, такое, что множество

$$T(\varepsilon) = \{z : \operatorname{Re}(z\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon\} \cap D$$

компактно и лежит в $B(a, 1)$. Другими словами, $T(\varepsilon)$ содержится в круге $B(a, r)$ при некотором r из интервала $(e^{-1}, 1)$.

Поскольку последовательность $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , когда $j \rightarrow \infty$, для каждого j , начиная с некоторого номера j_0 , мы можем выбрать натуральное число $n(j)$, которое не превосходит $m(j)$ и, кроме этого, удовлетворяет неравенствам

$$\gamma|\lambda_{k_j}| \leq n(j) \leq \varepsilon|\lambda_{k_j}|/2, \quad (6)$$

где $\gamma = \min\{\varepsilon/4, \tau/2\}$. Выберем теперь компакт K из области D , настолько большой, что выполнена оценка

$$H_D(\lambda) \leq H_K(\lambda) - 2^{-1}\gamma|\lambda| \ln r, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (7)$$

(это можно сделать, так как $\ln r < 0$). Учитывая вложение $T(\varepsilon) \subset B(a, r)$, определение коэффициентов c_j и опорной функции области D , из (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} |c_j (z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \exp(n(j) \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq \exp(\gamma|\lambda_{k_j}| \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq \exp(2^{-1}\gamma|\lambda_{k_j}| \ln r), \quad j \geq j_0, z \in T(\varepsilon). \end{aligned} \quad (8)$$

Так как последовательность $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к точке ξ при $j \rightarrow \infty$, то, увеличивая при необходимости номер j_0 , можно считать, что для $j \geq j_0$ верна оценка

$$|\operatorname{Re}(z(\xi - \lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|))| \leq \varepsilon/8 \quad \text{для любого } z, |z| \leq 1.$$

В частности, эта оценка имеет место для всех $z \in D \subset B(0, 1)$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}(z\lambda_{k_j}) \leq |\lambda_{k_j}| \operatorname{Re}(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, \quad z \in D. \quad (9)$$

Кроме того, используя непрерывность опорной функции ограниченной области, можно также считать, что

$$|\lambda_{k_j}| H_D(\xi) \leq H_D(\lambda_{k_j}) + 16^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}|, \quad j \geq j_0. \quad (10)$$

Пусть теперь $z \in D \setminus T(\varepsilon)$. Тогда, учитывая определение коэффициентов c_j , вложение $D \subset B(0, 1)$ (в силу которого $|z - a| \leq 2$, $z \in D$) и неравенство (9), имеем

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \exp(n(j) \ln |z - a| + \operatorname{Re}(z \lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq \exp(n(j) \ln 2 + |\lambda_{k_j}| \operatorname{Re}(z \xi) + 16^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \\ &\leq \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}| \operatorname{Re}(z \xi) + 16^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})). \end{aligned}$$

Отсюда и из определения множества $T(\varepsilon)$ для всех $z \in D \setminus T(\varepsilon)$ получаем

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \\ \leq \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}| (H_D(\xi) - \varepsilon) + 16^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})), \quad z \in D \setminus T(\varepsilon). \end{aligned}$$

Это вместе с (10) дает нам неравенство

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \\ \leq \exp(n(j) - \varepsilon |\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) + 8^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})), \quad j \geq j_0, \quad z \in D \setminus T(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (6), (7) и неравенств $0 > \ln r > -1$ (которые выполнены в силу выбора числа r) получаем

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \exp\left(\frac{\varepsilon |\lambda_{k_j}|}{2} - \varepsilon |\lambda_{k_j}| + 8^{-1} \varepsilon |\lambda_{k_j}| - 2^{-1} \gamma |\lambda_{k_j}| \ln r\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{-3\varepsilon |\lambda_{k_j}|}{8} - \frac{\gamma |\lambda_{k_j}| \ln r}{2}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{-3\varepsilon |\lambda_{k_j}|}{8} + \frac{\gamma |\lambda_{k_j}|}{2}\right), \quad z \in D \setminus T(\varepsilon), \quad j \geq j_0. \end{aligned}$$

Вспоминая теперь определение числа γ , окончательно имеем

$$|c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \exp(-\varepsilon |\lambda_{k_j}|/4), \quad z \in D \setminus T(\varepsilon), \quad j \geq j_0.$$

Отсюда и из (8) для всех $z \in D$ и $j \geq j_0$ получаем неравенство

$$|c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \exp(-\rho |\lambda_{k_j}|),$$

где

$$\rho = \min\{\varepsilon/4, -(\gamma \ln r)/2\}.$$

Таким образом, как и в случае 1), ряд (5) сходится равномерно в области D (а значит, и в топологии пространства $H(D)$) к некоторой функции g , аналитической в D . Все дальнейшие рассуждения практически дословно (нужно лишь заменить числа $m(j)$ на $n(j)$) повторяют соответствующие рассуждения в случае 1).

Следовательно, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в случае 2).

3) Пусть, наконец, $0 \in \partial D$. В этом случае некоторая опорная прямая области D , которую мы обозначим символом l , проходит через начало координат (если

таких прямых несколько, то в качестве l выберем любую из них). Через a обозначим одну из точек пересечения прямой l и окружности $\mathbb{S}$. Тогда $-a$ является другой точкой их пересечения. Прямая l делит плоскость на две полуплоскости. Область D целиком лежит в одной из этих полуплоскостей. Точку окружности $\mathbb{S}$, которая принадлежит той же полуплоскости, что и D , и лежит на прямой l' , перпендикулярной к l и проходящей через начало координат, обозначим через b . Прямая l делит круг $B(0, 1/2)$ на два полукруга. Делая преобразование гомотетии с центром в нуле, можно считать, что область D лежит в одном из этих полукругов, который обозначим через B' (в том, который лежит по ту же сторону от прямой l , что и точка b).

Поскольку последовательность $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к числу τ , отличному от нуля, переходя к подпоследовательности, можно также считать, что выполнены неравенства

$$2\tau|\lambda_{k_j}| \geq m(j) \geq 2\nu(j) \geq 4\nu|\lambda_{k_j}|,$$

где $\nu > 0$ и $\nu(j)$, $j = 1, 2, \dots$, — любые натуральные числа, удовлетворяющие этим неравенствам. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)(z(z^2 - a^2)(z - b))^{\nu(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (11)$$

где

$$c_j = \exp\left(-\sup_{z \in D}(\nu(j) \ln |z| + \operatorname{Re}(z\lambda_{k_j}))\right).$$

Покажем, что при подходящем выборе числа $\delta > 0$ ряд (11) сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, оценим модуль многочлена $p(z) = (z^2 - a^2)(z - b)$ на границе полукруга B' . Пусть $z \in [-a, a]$ и $x = |z|$. Рассмотрим систему координат, образованную прямыми l и l' . Меняя, если это необходимо, местами точки a и $-a$, можно считать, что в этой системе координат точки a и b имеют соответственно координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда легко убеждаемся, что

$$|p(z)| = (1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}, \quad z \in [-a, a].$$

Непосредственно проверяем, что функция, стоящая в правой части этого равенства, строго убывает на отрезке $[0, 1]$ и равна единице при $x = 0$. Следовательно, верны соотношения

$$|p(z)| < 1, \quad z \in [-a, a] \setminus \{0\}, \quad |p(0)| = 1. \quad (12)$$

Пусть теперь z принадлежит той части границы полукруга B' , которая является полуокружностью. Через x обозначим расстояние от точки z до прямой l' , а через y — расстояние от точки z до прямой l . Другими словами, (x, y) — это координаты точки z в указанной выше системе координат. Тогда прямым подсчетом получаем

$$|p(z)| = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} \sqrt{(1 - y)^2 + x^2}.$$

Раскрывая под радикалами скобки и замечая, что $x^2 + y^2 = 1/4$ (так как точка z лежит на окружности $S(0, 1/2)$), имеем

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \sqrt{5/4 - 2x} \sqrt{5/4 + 2x} \sqrt{5/4 - 2y} \\ &= \sqrt{25/16 - 4x^2} \sqrt{5/4 - 2y} = \sqrt{9/16 + 4y^2} \sqrt{5/4 - 2y}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что последняя функция строго убывает при $y \in [0, 1/2]$, причем на концах этого отрезка она принимает значения, строго меньшие единицы. Таким образом, на всей рассматриваемой полуокружности верна оценка $|p(z)| < 1$. Следовательно, с учетом (12) получаем

$$|p(z)| < 1, \quad z \in \partial B' \setminus \{0\}, \quad |p(0)| = 1.$$

Отсюда и из принципа максимума модуля для аналитических функций следует оценка

$$|p(z)| < 1, \quad z \in \overline{B'} \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Фиксируем какую-нибудь точку z_0 области D . Тогда с учетом определения чисел c_j , $j = 1, 2, \dots$, верны неравенства

$$\begin{aligned} c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) &\leq \exp(-\nu(j) \ln |z_0| - \operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_j})) |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \\ &= \exp(\nu(j)(\ln |z| - \ln |z_0|) + \operatorname{Re}(z \lambda_{k_j}) - \operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_j})), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|$, $j = 1, 2, \dots$, получаем отсюда для всех z из круга $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) &\leq \exp(\nu|\lambda_{k_j}| \ln r + \tau|\lambda_{k_j}| |\ln |z_0|| + (|z| + |z_0|)|\lambda_{k_j}|) \\ &\leq \exp(\nu|\lambda_{k_j}| \ln r + \tau|\lambda_{k_j}| |\ln |z_0|| + (1 + |z_0|)|\lambda_{k_j}|), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Выберем $r_0 \in (0, 1)$ настолько маленьким, что выполнено неравенство

$$\nu \ln r_0 + \tau |\ln |z_0|| + (1 + |z_0|) < -1.$$

Тогда из предыдущего получаем, что

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \leq \exp(-|\lambda_{k_j}|), \quad |z| < r_0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Так как область D лежит в полукруге B' , а $\overline{D} \setminus B(0, r_0)$ является компактом, то, согласно (13),

$$\max_{z \in \overline{D} \setminus B(0, r_0)} |p(z)| < 1.$$

Следовательно, с учетом того, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j)$, $j = 1, 2, \dots$, найдется $\varepsilon \in (0, 1)$, для которого имеет место оценка

$$|p(z)|^{\nu(j)} \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|), \quad z \in \overline{D} \setminus B(0, r_0), \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Выберем теперь в качестве δ какое-нибудь число из интервала $(0, \varepsilon/2)$. Тогда из (13) и (14) следует неравенство

$$\begin{aligned} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|) |z|^{\nu(j)} |p(z)|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \\ \leq \exp(-|\lambda_{k_j}|) \exp(\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2) \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \end{aligned}$$

где $z \in \overline{D} \cap B(0, r_0)$, $j = 1, 2, \dots$. Кроме того, в силу (15) и определения чисел c_j получаем

$$\begin{aligned} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)|z|^{\nu(j)}|p(z)|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z)) \\ \leq \exp\left(-\sup_{z \in D}(\nu(j) \ln|z| + \operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z))\right) \exp(\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2 - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + \operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z))|z|^{\nu(j)} \\ = \exp\left(-\sup_{z \in D}(\nu(j) \ln|z| + \operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z)) + \operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z) + \nu(j) \ln|z| - \varepsilon|\lambda_{k_j}|/2\right) \\ \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \quad z \in \overline{D} \cap B(0, r_0), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Объединяя эту и предыдущую оценку, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)|z|^{\nu(j)}|p(z)|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j}z)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \quad z \in \overline{D}.$$

Так же, как и выше, по лемме 1 из работы [17] получаем, что последний ряд сходится. Таким образом, ряд (11) сходится равномерно во всей области D . Следовательно, его сумма $g(z)$ является функцией, аналитической в D .

С другой стороны, как и в случае 1), имеет место представление (4) (здесь мы учитываем неравенство $m_{k_j} - 1 = m(j) \geq 4\nu(j)$). При этом, как нетрудно убедиться,

$$|d_{k_j, \nu(j)}| = |m_{k_j, \nu(j)}(g)| = |\exp(\delta|\lambda_{k_j}|)c_j(a^2b)^{\nu(j)}| = c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|) \quad (16)$$

для всех $j = 1, 2, \dots$.

Поскольку D ограничена, для каждого $j = 1, 2, \dots$ найдется точка $z_j \in \overline{D}$, такая, что

$$|z_j|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(z_j \lambda_{k_j})) = \sup_{z \in D}(|z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(z \lambda_{k_j}))) = c_j^{-1}.$$

Выберем подпоследовательность натуральных чисел $j(1), j(2), \dots$ так, что последовательность $\{z_{j(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $\tilde{z} \in \overline{D}$. В силу неравенства (14) точки z_j , $j = 1, 2, \dots$, а вместе с ними и точка $\tilde{z}$ не попадают в круг $B(0, r_0)$.

Фиксируем $\delta' \in (0, \delta/4)$, удовлетворяющее условию

$$\tau \ln(1 + 4\delta'/r_0) \leq \delta/2.$$

Пусть $z' \in D \cap B(\tilde{z}, \delta')$. Очевидно, можно считать, что $|z'| \geq r_0/2$. Поскольку последовательность $\{z_{j(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к $\tilde{z}$, для всех номеров p , начиная с некоторого p_0 , выполнено неравенство

$$|z' - z_{j(p)}| \leq 2\delta', \quad p \geq p_0.$$

Тогда, учитывая еще неравенства $|z'| \geq r_0/2$, $\nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|$, $j = 1, 2, \dots$, выбор

точек z_j и числа δ' имеем

$$\begin{aligned}
 c_{j(p)}^{-1} &= |z_{j(p)}|^{\nu(j(p))} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_{j(p)}} z_{j(p)})) \\
 &= |(z_{j(p)} - z') + z'|^{\nu(j(p))} \exp(\operatorname{Re}((z_{j(p)} - z' + z') \lambda_{k_{j(p)}})) \\
 &\leq \exp(\nu(j(p)) \ln |z_{j(p)} - z' + z'| + \operatorname{Re}((z_{j(p)} - z' + z') \lambda_{k_{j(p)}})) \\
 &\leq \exp\left(\nu(j(p)) \left(\ln |z'| + \ln \left(1 + \frac{|z_{j(p)} - z'|}{|z'|} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re}(z' \lambda_{k_{j(p)}}) + |z_{j(p)} - z'| |\lambda_{k_{j(p)}}| \right) \\
 &\leq \exp\left(\nu(j(p)) \left(\ln |z'| + \ln \left(1 + \frac{2\delta'}{|z'|} \right) \right) + \operatorname{Re}(\lambda_{k_{j(p)}} z') + 2\delta' |\lambda_{k_{j(p)}}| \right) \\
 &\leq \exp\left(\nu(j(p)) \left(\ln |z'| + \ln \left(1 + \frac{4\delta'}{r_0} \right) \right) + \operatorname{Re}(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta' |\lambda_{k_{j(p)}}|}{2} \right) \\
 &\leq \exp\left(\nu(j(p)) \left(\ln |z'| + \frac{\delta}{2\tau} \right) + \operatorname{Re}(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta' |\lambda_{k_{j(p)}}|}{2} \right) \\
 &\leq \exp\left(\nu(j(p)) \ln |z'| + \frac{\delta |\lambda_{k_{j(p)}}|}{2} + \operatorname{Re}(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta' |\lambda_{k_{j(p)}}|}{2} \right) \\
 &= |z'|^{\nu(j(p))} \exp(\operatorname{Re}(z' \lambda_{k_{j(p)}}) + \delta |\lambda_{k_{j(p)}}|), \quad p \geq p_0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (16) получаем

$$\begin{aligned}
 |d_{k_{j(p)}, \nu(j(p))}(z')^{\nu(j(p))} \exp(z' \lambda_{k_{j(p)}})| \\
 = |c_{j(p)}(z')^{\nu(j(p))} \exp(\delta |\lambda_{k_{j(p)}}|) \exp(\lambda_{k_{j(p)}} z')| \geq 1, \quad p \geq p_0.
 \end{aligned}$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (4) в точке $z' \in D$.

Таким образом, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в этом случае. Теорема полностью доказана.

Замечание. При разборе первого случая мы показали, что в области $D - a$ (сдвиг области D) функция $g'(w) = g(w + a)$, где $w = z - a$ и $g(z)$ определена по формуле (3), разлагается в ряд по системе $\{w^n \exp(\lambda_k w)\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$. В то же время функция $g(z)$ в области D не разлагается в ряд по системе $\{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$. Это означает, что в случае, когда $m(\Lambda) > 0$, эта система не сохраняет свойство базисности при сдвигах. Более того, можно показать, что условие $m(\Lambda) = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы указанная система сохраняла свойство базисности при любом сдвиге.

§ 3. Фундаментальный принцип

В этом заключительном параграфе мы сформулируем и докажем справедливость фундаментального принципа для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. Как отмечалось во введении, этот результат уже был получен ранее в работе [4] при одном ограничении на кратность показателей ряда (1): $m(\Lambda) = 0$. Здесь это ограничение устраняется.

Прежде чем привести указанный результат, введем еще некоторые обозначения. Для выпуклой области D через $K(D)$ обозначим последовательность

$\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ выпуклых компактов из области D , которая строго исчерпывает ее, т. е. $K_p \subset \text{int } K_{p+1}$, $p = 1, 2, \dots$ (здесь символом int обозначена внутренность множества), и $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$.

Пусть $d = \{d_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$ — последовательность комплексных чисел. Для каждого $p = 1, 2, \dots$ введем банахово пространство

$$Q_p = \left\{ d = \{d_{k,n}\} : \|d\|_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty \right\},$$

где $K_p \in K(D)$. Пусть $Q(D) = \bigcap_p Q_p$. В пространстве $Q(D)$ определим метрику

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{\|d - d'\|_p}{1 + \|d - d'\|_p}.$$

С этой метрикой $Q(D)$ становится, очевидно, пространством Фреше. Отметим, что если область D' содержит D , то множество $Q(D')$ является подмножеством в $Q(D)$.

Пусть T — множество в комплексной плоскости и Θ — замкнутое подмножество единичной окружности с центром в начале координат. Положим

$$T(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z\xi) < H_T(\xi) \text{ для любого } \xi \in \Theta\}.$$

Нетрудно заметить, что $T(\Theta)$ является выпуклой областью. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех возможных пределов подпоследовательностей $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ является замкнутым подмножеством единичной окружности. Нам понадобится следующий результат из работы [17], который служит аналогом теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов.

Теорема 2. Пусть последовательность Λ такова, что $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1) ограничен на множестве $T \subset \mathbb{C}$. Кроме того, если начало координат является изолированной точкой множества T , то ограничена также последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$. Тогда $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$, где $D = T(\Theta(\Lambda))$, и для каждого $p = 1, 2, \dots$ найдется постоянная $C_p > 0$ (не зависящая от последовательности d), такая, что

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n \exp(z\lambda_k)| \leq C_p \|d\|_{p+2}.$$

В частности, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D .

Пусть $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее индикатором (верхним индикатором) называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Символом $\underline{h}_f$ обозначим нижний индикатор функции f ,

$$\underline{h}_f(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{B(\lambda, \delta)} \frac{\ln |f(tz)|}{t} dx dy, \quad z = x + iy.$$

Из определений индикаторов вытекает неравенство

$$\underline{h}_f(\lambda) \leq h_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Говорят, что функция f имеет (вполне) регулярный рост, если верно равенство [21, гл. 4, определение 4.1]

$$\underline{h}_f = h_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется (см. [22, гл. 2, §1]) правильно распределенным множеством при порядке один, если существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{m_k}{\lambda_k}$$

и Λ имеет угловую плотность при порядке один, т. е. для всех открытых углов T с вершиной в начале координат (за исключением, быть может, счетного их числа) существует $\lim_{r \rightarrow \infty} n(T, r)/r$, где $n(T, r)$ — число точек λ_k , попавших в сектор $T \cap B(0, r)$, с учетом их кратностей m_k . Согласно известному результату Б. Я. Левина (см. [22, гл. 3, §3, теорема 4]), правильная распределенность последовательности при порядке один равносильна тому, что она совпадает (с учетом кратности) с нулевым множеством целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть правильной, если она является частью правильно распределенной последовательности при порядке один, т. е. если Λ является частью нулевого множества (с учетом кратностей m_k) целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста. Пусть Λ — правильная последовательность. Через $F(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа и вполне регулярного роста, для каждой из которых Λ является частью ее нулевого множества.

Следуя работам [4], [14], для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ введем величину, характеризующую меру сгущения точек λ_j вокруг λ_k . Положим $S_{\Lambda} = 0$, если Λ состоит из конечного числа элементов, и

$$S_{\Lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |q_{\Lambda}^k(\delta)|}{|\lambda_k|}$$

в противном случае. Здесь

$$q_{\Lambda}^k(\delta) = \prod_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), k \neq j} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{3\delta|\lambda_j|} \right)^{m_j}.$$

Величина S_{Λ} схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна–Леонтьева последовательности Λ (см. [2]) и играет ту же роль, что и последний, при исследовании особых точек суммы ряда (1) (см. [18]).

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что система $E(\Lambda)$ неполна в пространстве $H(D)$. На пространстве $Q(D)$ определим оператор L следующим образом. Последовательности $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$ (возможно, не каждой) поставим в соответствие сумму $g_d(z)$ ряда (1), сходящегося в топологии пространства $H(D)$. Таким образом, оператор L действует из пространства $Q(D)$ в пространство $W(D, \Lambda)$. При этом область его определения не обязана совпадать с $Q(D)$. Пусть W — замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$ со спектром Λ , допускающее

спектральный синтез. Другими словами, подпространство W совпадает с замыканием в $H(D)$ линейной оболочки системы $E(\Lambda)$. Следовательно, оно содержит подпространство $W(D, \Lambda)$. Таким образом, оператор L действует из пространства $Q(D)$ в W . Неполнота системы $E(\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ равносильна тому, что W является нетривиальным подпространством в $H(D)$.

Теорема 3. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, а W — нетривиальное замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$ со спектром Λ , допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Оператор L является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(D)$ и W .

2. Каждая функция из W представляется рядом (1), равномерно сходящимся на компактах из области D .

3. $S_\Lambda = 0$, Λ — правильная последовательность и существует функция $f \in F(\Lambda)$, такая, что

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если верно утверждение 1, то оператор

$$L: Q(D) \rightarrow W$$

сюръективен. Согласно определению последнего, это означает, что каждая функция из W представляется рядом (1), равномерно сходящимся на компактах из области D , т. е. выполнено 2.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть верно утверждение 2. Тогда, согласно определению подпространства $W(D, \Lambda)$, оно содержит W . Выше отмечалось, что в условиях теоремы имеет место и обратное вложение $W(D, \Lambda) \subset W$. Таким образом, подпространства $W(D, \Lambda)$ и W совпадают. В частности, это означает, что $W(D, \Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Кроме того, W нетривиально, а потому система $E(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Тогда по теореме 1 верно равенство $m(\Lambda) = 0$. В начале предыдущего параграфа мы отмечали, что неполнота системы $E(\Lambda)$ влечет за собой также равенство $\sigma(\Lambda) = 0$.

В силу утверждения 2 каждая функция $g \in W$ представляется в области D рядом (1), сходящимся в топологии пространства $H(D)$. Тогда по теореме 2 последовательность $d = \{d_{k,n}\}$ коэффициентов этого представления является элементом пространства $Q(D)$ (и даже более узкого пространства $Q(D(\Theta(\Lambda)))$). Следовательно, оператор $L: Q(D) \rightarrow W$ сюръективен. Он также и инъективен. Действительно, в начале §2 было замечено, что неполнота системы $E(\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ влечет за собой существование последовательности функционалов $\{\mu_{k,n}\} \subset H^*(D)$, биортогональной к системе функций $E(\Lambda)$. Поэтому коэффициенты разложения функции $g \in W$ в ряд (1), равномерно сходящийся на компактах из области D , определяются однозначно по формуле

$$d_{k,n} = (\mu_{k,n}, g), \quad k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots, m_k.$$

Отметим, что W как замкнутое подпространство пространства Фреше $H(D)$ (см., например, [1]) само является пространством Фреше. Топология в W задается при помощи системы полуноrm

$$\|g\|_p = \sup_{z \in K_p} |g(z)|, \quad p = 1, 2, \dots,$$

где $\{K_p\}_{p=1}^{\infty} = K(D)$. Используя теорему 2 для каждой функции $g \in W$ и каждого $p = 1, 2, \dots$, получаем

$$\|g\|_p = \sup_{z \in K_p} |g(z)| \leq \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n \exp(z\lambda_k)| \leq C_p \|d\|_{p+2},$$

где $\{d_{k,n}\}$ — последовательность коэффициентов разложения функции g в ряд (1), а постоянная $C_p > 0$ зависит от номера p , но не зависит от $d = \{d_{k,n}\}$, а значит, и от g .

Таким образом, оператор $L: Q(D) \rightarrow W$ является взаимно однозначным линейным и непрерывным отображением пространств Фреше. Тогда по теореме об открытом отображении (см. [20, приложение 1, теорема 2]) для пространств Фреше оператор L осуществляет изоморфизм линейных топологических пространств $Q(D)$ и W . Это дает нам утверждение 1.

$2 \Rightarrow 3$. Если верно утверждение 2, то, как и выше, $m(\Lambda) = 0$. Тогда по теореме 5.2 из [4] верно также следующее утверждение: $S_{\Lambda} = 0$ и существует целая функция экспоненциального типа f , которая обращается в нуль в каждой точке λ_k с кратностью, не меньшей чем m_k , имеет регулярный рост и ее верхний индикатор равен H_D , т.е. имеют место тождества $\underline{h}_f \equiv h_f \equiv H_D$. Первое тождество здесь означает, что функция f имеет регулярный рост. Таким образом, Λ — правильная последовательность, $F \in f(\Lambda)$ и

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тем самым мы показали, что утверждение 3 верно.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть верно утверждение 3. Тогда $S_{\Lambda} = 0$ и, согласно определению правильной последовательности, существует целая функция экспоненциального типа f , которая обращается в нуль в каждой точке λ_k с кратностью, не меньшей чем m_k , имеет регулярный рост (т.е. $\underline{h}_f \equiv h_f$) и выполнено равенство

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда по теореме 5.2 из [4] любая функция $g \in W$ представляется рядом (1), который сходится в каждой точке области D . Согласно же теореме 2 этот ряд будет сходиться также в топологии пространства $H(D)$. Это дает нам утверждение 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [3] И. Ф. Красичков-Терновский, *Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях*, ДАН СССР, **197**:1 (1971), 29–31.
- [4] А. С. Кривошеев, *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях*, Изв. РАН. Сер. матем., **68**:2 (2004), 71–136.
- [5] G. Valiron, *Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **46**:1 (1929), 25–53.
- [6] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodique*, Ann. Math., **48**:4 (1947), 857–929.

- [7] А. О. Гельфонд, *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций*, Труды МИАН СССР, т. 38, Изд-во АН СССР, М., 1951, 42–67.
- [8] D. G. Dickson, *Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients*, Mem. Amer. Math. Soc., **1957**:23 (1957), 1–72.
- [9] Б. Я. Левин, *О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа к теории целых функций*, Матем. сб., **8**:3 (1940), 437–454.
- [10] Ю. Ф. Коробейник, *Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **44**:5 (1980), 1066–1114.
- [11] Ю. Ф. Коробейник, *Представляющие системы*, УМН, **36**:1 (1981), 73–126.
- [12] А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник, *Интерполяционная задача в пространствах целых функций заданного уточненного порядка*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **40**:5 (1976), 1102–1127.
- [13] А. В. Братищев, *Базисы Кете, целые функции и их приложения*, Дисс. д.ф.-м.н., Ростов-на-Дону, 1995.
- [14] А. С. Кривошеев, *Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств*, Докл. РАН, **389**:4 (2003), 457–460.
- [15] А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.
- [16] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, Наука, М., 1985.
- [17] О. А. Кривошеева, *Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях*, Вестник УГАТУ. Матем., **9**:3(21) (2007), 96–103.
- [18] О. А. Кривошеева, *Особые точки суммы ряда экспонент на границе области сходимости*, Уфимский матем. ж., **1**:4 (2009), 78–109.
- [19] В. В. Напалков, О. А. Кривошеева, *Теоремы Абеля и Коши–Адамара для рядов экспоненциальных мономов*, Докл. РАН, **432**:5 (2010), 594–596.
- [20] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.
- [21] П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989.
- [22] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

Башкирский государственный университет
e-mail: kriolesya2006@yandex.ru
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: shaig@anrb.ru

Поступило в редакцию
24 декабря 2010 г.