Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, Об отсутствии глобальных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 51–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:30:03

Об отсутствии глобальных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза*

© 2012. С. И. ПОХОЖАЕВ

В статье устанавливаются условия на начальные данные, при которых задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза не допускает глобального по $t > 0$ решения.

Доказательство полученных результатов основано на методе нелинейной емкости [7].

В заключение приводится пример.

Введение

Уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ) посвящена обширная литература. Условно можно выделить два направления исследования КдФ. Первое — это «алгебраическое» направление, второе — «аналитическое».

Первое направление, см., например, [1]–[2] и приведенную там литературу, использует алгебраические, топологические и дифференциально-операторные методы для детального исследования «частных» решений типа солитонов, их структуры, взаимодействия и асимптотики.

Второе направление, см., например, [3]–[5] и указанную там литературу, рассматривает общие вопросы, как-то: локальную и глобальную разрешимость задачи Коши в соответствующих функциональных пространствах H^s с $s \geq -3/4$, начально-краевые задачи в пространственно-ограниченных или полугораниченных областях.

Основные результаты, полученные для уравнения КдФ, относятся к случаю решений, быстро убывающих на бесконечности. Это обусловлено, в основном, используемой техникой.

О решениях, возрастающих на бесконечности, известно мало. Тем не менее эти сингулярные решения представляют интерес как с точки зрения физики, так и математики для описания явлений blow-up, разрушающихся за конечное время.

Настоящая статья посвящена задаче Коши для уравнения КдФ в классе растущих функций. При этом рассматриваются вопросы как об отсутствии решения в фиксированной полосе $t \in (0, T)$, так и об отсутствии глобального по $t > 0$ решения. Анализ этих вопросов проводится на основании концепции нелинейной емкости. Идея этого подхода иллюстрируется на простейшем примере обыкновенного дифференциального уравнения в §2.

Задача Коши для уравнения КдФ рассматривается в §3. Следующий параграф посвящен конструктивному построению «почти оптимизирующей» функции в методе нелинейной емкости.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00348а и 11-01-12018 офи-м-2011.

В заключительном §5 приводится пример конкретной задачи Коши для уравнения КдФ. На этом примере, допускающем явное решение, разрушающееся за конечное время, демонстрируется применение предложенного подхода.

§1. О методе нелинейной емкости

Этот метод основан на концепции нелинейной емкости, порожденной нелинейной задачей. Эта концепция для анализа «blow-up» решений нелинейных уравнений была предложена в работе автора [7] и развита в дальнейшем в совместных работах с Э. Митидиери (см., например, [6], а также последующие совместные работы).

Поясним идею этого подхода на простейшем примере обыкновенного дифференциального уравнения.

С этой целью приведем следующий

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Решением этой задачи является функция

$$x(t) = \frac{1}{T_0 - t} \quad \text{с } T_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Таким образом, решение при $x_0 > 0$ существует только при $t \in (0, T_0)$ и разрушается при $t = T_0$.

Рассмотрим теперь эту задачу с позиции метода нелинейной емкости. С этой целью умножим уравнение на пробную функцию $\varphi \in C^1$ и проинтегрируем по частям. Тогда получим

$$\int_0^T x^2 \varphi dt = \int_0^T \frac{dx}{dt} \varphi dt = \varphi x \Big|_0^T - \int_0^T x \varphi_t dt. \quad (1.2)$$

Возьмем теперь пробную функцию $\varphi \in C^1$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi \geq 0 \text{ на } [0, T], \quad \varphi(0) = 1 \text{ и } \varphi(T) = 0.$$

Тогда в силу неравенств Гёльдера и Юнга имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T x \varphi_t dt \right| &= \left| \int_0^T x \sqrt{\varphi} \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi}} dt \right| \leq \left(\int_0^T x^2 \varphi dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \frac{\varphi_t^2}{\varphi} dt \right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^T x^2 \varphi dt + \frac{1}{4} \int_0^T \frac{\varphi_t^2}{\varphi} dt. \end{aligned}$$

На основании этого неравенства из (1.2) следует, что

$$0 \leq E_T(\varphi, x_0), \quad \text{где } E_T(\varphi, x_0) = \frac{1}{4} \int_0^T \frac{\varphi_t^2}{\varphi} dt - x_0. \quad (1.3)$$

Теперь для получения оптимальной оценки, естественно, следует рассмотреть вариационную задачу

$$\min_{\varphi} E_T(\varphi, x_0)$$

в указанном классе пробных функций φ . Решением этой задачи является, очевидно,

$$\varphi_0(t) = \left(\frac{T-t}{T} \right)^2$$

с

$$\min_{\varphi} E_T(\varphi, x_0) = E_T(\varphi_0, x_0) = \frac{1}{T} - x_0. \quad (1.4)$$

Эта величина и есть нелинейная емкость, индуцированная задачей (1.1).

Заметим, что в случае оператора Лапласа $-\Delta u$, следуя общему определению нелинейной емкости [7], мы получим классическую емкость.

Подставляя в (1.3) функцию $\varphi = \varphi_0$, мы получаем для задачи (1.1) следующую оценку:

$$0 \leq \frac{1}{T} - x_0 \quad (1.5)$$

при любом $T > 0$. Отсюда следует, что при $T > 1/x_0 > 0$ задача не имеет решения в силу получаемого противоречия. Отметим, что это значение $1/x_0$ совпадает с точным значением для $T_0 = 1/x_0$.

Аналогичные рассуждения лежат в основе анализа решений уравнения КдФ.

§2. Уравнение КдФ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 & \text{в } Q_T = (0, T) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0(x) & \text{при } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}$ есть ограниченная или неограниченная область.

Для области Ω введем граничный функционал $B(u, \varphi)|_{\partial\Omega}$, определяемый соотношением

$$B(u, \varphi) = u_{xx}\varphi - u_x\varphi_x + u\varphi_{xx} + \frac{1}{2}u^2\varphi. \quad (2.2)$$

Тогда для $\Omega = (a, b)$

$$B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} = B(u, \varphi)|_{x=b} - B(u, \varphi)|_{x=a}.$$

При этом в случае неограниченной области $B(u, \varphi)|_{\partial\Omega}$ есть разность соответствующих пределов при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$.

Отметим, что в общем случае эта предельная разность зависит от выбора этого предельного перехода и определяется выбором соответствующего функционального пространства решений.

Умножим теперь уравнение КдФ на пробную функцию

$$\varphi \in C_{t,x}^{0,2}(\overline{Q}_T) \cap C_{t,x}^{1,3}(Q_T). \quad (2.3)$$

Тогда получим

$$\frac{1}{2} \iint_{Q_T} u^2 \varphi_x dt dx = - \iint_{Q_T} u L\varphi dt dx + \int_0^T B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} dt + \int_{\Omega} u\varphi \Big|_0^T dx. \quad (2.4)$$

Здесь $L\varphi = \varphi_t + \varphi_{xxx}$.

Рассмотрим теперь пробную функцию φ из указанного класса, которая удовлетворяет условиям

$$\varphi_x \geq 0 \quad \text{в } Q_T \quad \text{и} \quad \varphi(T, x) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Тогда в силу неравенств Гёльдера и Юнга имеем

$$\begin{aligned} \left| \iint_{Q_T} u L \varphi \, dt \, dx \right| &= \left| \iint_{Q_T} u \sqrt{\varphi_x} \frac{L \varphi}{\sqrt{\varphi_x}} \, dt \, dx \right| \\ &\leq \left(\iint_{Q_T} u^2 \varphi_x \, dt \, dx \right)^{1/2} \left(\iint_{Q_T} \frac{(L \varphi)^2}{\varphi_x} \, dt \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{Q_T} u^2 \varphi_x \, dt \, dx + \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \frac{(L \varphi)^2}{\varphi_x} \, dt \, dx. \end{aligned}$$

На основании этого неравенства из (2.4) следует, что

$$0 \leq E_T(\varphi, u|_{\partial\Omega}, u_0), \quad (2.6)$$

где

$$E_T(\varphi, u|_{\partial\Omega}, u_0) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \frac{(L \varphi)^2}{\varphi_x} \, dt \, dx + \int_0^T B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} \, dt - \int_{\Omega} u_0 \varphi(0, x) \, dx \quad (2.7)$$

для функций φ , удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.5) и граничным условиям, «сопряженным» граничным условиям для решения u .

Неравенство (2.6) непосредственно влечет за собой следующее общее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть граничные условия и начальная функция $u_0 \in L^1(\Omega)$ таковы, что существует функция φ_0 из указанного класса, такая, что

$$B(u, \varphi_0)|_{\partial\Omega} \in L^1(0, T)$$

и выполнено неравенство

$$E_T(\varphi_0, u|_{\partial\Omega}, u_0) < 0. \quad (2.8)$$

Тогда не существует решения задачи (2.1) с этими данными в Q_T .

Для доказательства достаточно заметить, что, предположив противное, мы получаем противоречие в силу неравенств (2.6) и (2.8).

Теперь для получения оптимального результата достаточно рассмотреть вариационную задачу

$$\inf \{ E_T(\varphi, u|_{\partial\Omega}, u_0) \mid \varphi \in K \}, \quad (2.9)$$

где K есть множество пробных функций с соответствующими свойствами.

Замечание 2.1. Отметим, что класс K пробных функций φ определяется не только условиями (2.3) и (2.5), но и соответствующими граничными условиями, «сопряженными» с заданными граничными условиями для решения u задачи (2.1) так, что граничный функционал $B(u, \varphi)|_{\partial\Omega}$ при заданных граничных условиях для искомого решения u оказывается определенным или, по крайней мере, имеет определенную верхнюю оценку. Некоторые приложения этого подхода к начально-краевым задачам для уравнения КдФ можно найти в статьях автора [8]–[9].

Замечание 2.2. В этой вариационной задаче главным функционалом является

$$E_T(\varphi) := \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \frac{(L \varphi)^2}{\varphi_x} \, dt \, dx. \quad (2.10)$$

Критические точки этого функционала порождают решения уравнения КдФ по формуле

$$q = -L\varphi/\varphi_x,$$

т. е.

$$q_t + q_{xxx} + qq_x = 0.$$

Этот факт следует непосредственно из уравнения Эйлера для функционала $E_T(\varphi)$.

Отсюда естественным образом возникает следующее определение.

Определение 2.3. Функционал $E_T(\varphi)$ называется *функционалом Кортеве-га-де Фриза*.

§3. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши (2.1), где $x \in \mathbb{R}$. Анализ этой задачи определяется поведением граничных слагаемых, т. е. свойствами

$$B_-(u, \varphi) = \lim_{a \rightarrow -\infty} B(u, \varphi)|_{x=a},$$

$$B_+(u, \varphi) = \lim_{b \rightarrow +\infty} B(u, \varphi)|_{x=b}.$$

Ясно, что это поведение зависит от выбора функции φ и соответствующего функционального пространства решений.

Относительно функции $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}_+^2)$ предположим, что

$$\begin{cases} \varphi_x \geq 0 & \text{в } (0, T) \times \mathbb{R}, \\ (L\varphi)^2/\varphi_x \in L^1((0, T) \times \mathbb{R}). \end{cases} \quad (3.1)$$

При так выбранной функции φ функциональное пространство $W_\varphi(0, T)$ решений задачи Коши (2.1) с $u_0\varphi|_{t=0} \in L^1(\mathbb{R})$ определим следующим образом. Это пространство обобщенных решений $u \in L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}))$ задачи (2.1), таких, что $u^2\varphi_x \in L^1((0, T) \times \mathbb{R})$ и существуют пределы

$$B_-(u, \varphi) \in L^1(0, T), \quad B_+(u, \varphi) \in L^1(0, T).$$

Для задачи Коши (2.1) с $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ определим в $W_\varphi(0, T)$ функционал

$$E_T(\varphi, u_0) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{(L\varphi)^2}{\varphi_x} dt dx + \int_0^T [B_+(u, \varphi) - B_-(u, \varphi)] dt - \int_{\mathbb{R}} u_0 \varphi(0, x) dx$$

с функцией $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}_+^2)$, удовлетворяющей условиям (3.1).

На основании теоремы 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Пусть существует функция φ из указанного класса функций, такая, что $u_0\varphi_x \in L^1(\mathbb{R})$ и

$$E_T(\varphi, u_0) < 0. \quad (3.2)$$

Тогда не существует решения $u \in W_\varphi(0, T)$ задачи Коши (2.1).

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2.1 для области $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ и перейти в неравенстве (2.8) к пределу при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$.

Замечание 3.1. Эта теорема содержит достаточные условия, обеспечивающие отсутствие решения задачи Коши (2.1) в указанном классе при $t \in (0, T)$ с фиксированным $T > 0$.

Для того чтобы рассмотреть вопрос об отсутствии глобального, т. е. при всех $t > 0$, решения задачи Коши (2.1), необходимо расширить класс функций. С этой целью введем класс функций $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}_+^2)$, таких, что

$$\begin{cases} \varphi_x \geq 0 & \text{в } \mathbb{R}_+^2, \\ (L\varphi)^2/\varphi_x \in L^1(\mathbb{R}_+^2). \end{cases} \quad (3.3)$$

При так выбранной функции φ пространство W_φ решений задачи Коши (2.1) с $u_0\varphi|_{t=0} \in L^1(\mathbb{R})$ определим следующим образом. Это пространство обобщенных решений $u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+^2)$ задачи (2.1), таких, что $u^2\varphi_x \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$ и существуют пределы

$$B_-(u, \varphi) \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad B_+(u, \varphi) \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Далее, для задачи Коши (2.1) с $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ и $u_0\varphi|_{t=0} \in L^1(\mathbb{R})$ определим в W_φ функционал

$$E(\varphi, u_0) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(L\varphi)^2}{\varphi_x} dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} [B_+(u, \varphi) - B_-(u, \varphi)] dt - \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0, x) dx.$$

Тогда теорема 3.1 влечет за собой следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Пусть существует функция $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}_+^2)$, удовлетворяющая условию (3.3), такая, что $u_0\varphi_x \in L^1(\mathbb{R})$ и

$$E(\varphi, u_0) < 0. \quad (3.4)$$

Тогда не существует решения $u \in W_\varphi$ задачи Коши (2.1) с $\Omega = \mathbb{R}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 3.1 и перейти к пределу при $T \rightarrow \infty$.

Таким образом, доказательство этой теоремы получается из теоремы 2.1 на основании независимого предельного перехода по $T \rightarrow +\infty$ и $|\Omega| = b - a \rightarrow +\infty$.

Более общей теоремой об отсутствии глобального решения задачи Коши (2.1) является следующая теорема. Для доказательства этой теоремы, основанного на теореме 2.1, используется согласованный предельный переход по $T \rightarrow +\infty$ и $|\Omega| \rightarrow +\infty$. А именно, $T = |\Omega|^3 \rightarrow +\infty$.

С этой целью введем «коэффициент анизотропии» $\lambda > 0$ и положим

$$a = -\lambda R, \quad b = R, \quad T = R^3,$$

где $R > 0$.

Положим

$$E_{\lambda,R}(\varphi, u_0) := \frac{1}{2} \iint_{Q_R} \frac{(L\varphi)^2}{\varphi_x} dt dx + \int_0^T [B_R^+(u, \varphi) - B_{\lambda R}^-(u, \varphi)] dt - \int_{-\lambda R}^R u_0\varphi(0, x) dx. \quad (3.5)$$

Здесь функция $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}_+^2)$ удовлетворяет условию (3.3),

$$B_R^+(u, \varphi) = B(u, \varphi)|_{x=R}, \quad B_{\lambda R}^-(u, \varphi) = B(u, \varphi)|_{x=-\lambda R},$$

$Q_R = (0, T) \times \Omega_R$ с $T = R^3$ и $\Omega_R = (-\lambda R, R)$.

Теорема 3.3. Пусть $u_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Пусть при некотором $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} E_{\lambda R}(\varphi, u_0) < 0.$$

Тогда не существует решения $u \in W_\varphi$ задачи Коши (2.1).

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2.1 и перейти к пределу в неравенстве (2.8) с $a = -\lambda R$, $b = R$ и $T = R^3$ при $R \rightarrow +\infty$.

§4. Конструктивный анализ неравенства (2.8)

К сожалению, вариационная задача (2.9) в общем случае не допускает явного решения. Поэтому для нахождения функции в теореме 2.1 воспользуемся методом разделения переменных. А именно, будем искать функцию $\varphi_0(t, x)$ в виде

$$\varphi_0(t, x) = \zeta(t)\psi(x), \quad (4.1)$$

где $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $\psi \in C^3(\mathbb{R})$ удовлетворяют соответственно условиям

$$\zeta(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \zeta(0) = 1, \quad \zeta(T) = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \psi_x(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \psi^2/\psi_x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), & \psi^2_{xxx}/\psi_x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.3)$$

При таком выборе функции φ находим, что

$$\iint_{Q_T} \frac{(L\varphi)^2}{\varphi_x} dt dx = \int_0^T \frac{\zeta'^2}{\zeta} dt \int_\Omega \frac{\psi^2}{\psi_x} dx + 2 \int_0^T \zeta' dt \int_\Omega \frac{\psi \psi_{xxx}}{\psi_x} dx + \int_0^T \zeta dt \int_\Omega \frac{\psi^2_{xxx}}{\psi_x} dx. \quad (4.4)$$

Определяющим слагаемым в правой части этого равенства является выражение

$$\int_0^T \frac{\zeta'^2}{\zeta} dt \cdot \int_\Omega \frac{\psi^2}{\psi_x} dx.$$

Для минимизации этого выражения рассмотрим

$$\min \left\{ \int_0^T \frac{\zeta'^2}{\zeta} dt \mid \zeta \in C^1(0, T), \zeta(0) = 1, \zeta(T) = 0 \right\} = \frac{4}{T},$$

где минимайзером является функция

$$\zeta = \zeta_0(t) = \left(\frac{T-t}{T} \right)^2. \quad (4.5)$$

Далее, для функционала $\int_\Omega (\psi^2/\psi_x) dx$ имеем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx} \frac{\psi^2}{\psi_x^2} + 2 \frac{\psi}{\psi_x} = 0,$$

откуда находим, что

$$\psi = \frac{A}{C-x}$$

с постоянными A и C . Полагая $A = 1$, получаем

$$\psi_0 = \frac{1}{C-x} \quad (4.6)$$

с $\psi_{0x} = 1/(C-x)^2 > 0$.

Условия (4.3) влекут за собой следующее условие относительно постоянной C :

$$C-x \neq 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (4.7)$$

Таким образом, в случае $\Omega = (a, b)$ имеем две возможности:

$$\text{либо } C < a, \quad (4.7_-)$$

$$\text{либо } C > b. \quad (4.7_+)$$

Замечание 4.1. Отметим, что в зависимости от выбора этой постоянной C мы получаем разные условия на начальную функцию, порождающие blow-up — разрушения решения задачи (2.1) за конечное время.

Для выбранных функций $\zeta = \zeta_0$ и $\psi = \psi_0$ находим в случае $\Omega = (a, b)$, что

$$\iint_{Q_T} \frac{(L\varphi)^2}{\varphi_x} dt dx = \left[\frac{4}{T} x - 6 \frac{1}{(C-x)^2} + \frac{12}{5} T \frac{1}{(C-x)^5} \right]_a^b. \quad (4.8)$$

Далее получаем, что

$$\int_0^T B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} dt = \int_0^T \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \left[\frac{u_{xx}}{C-x} - \frac{u_x}{(C-x)^2} + \frac{2u}{(C-x)^3} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(C-x)} \right]_a^b dt \quad (4.9)$$

и

$$\int_a^b u_0 \varphi \Big|_{t=0} dx = \int_a^b u_0 \frac{1}{C-x} dx, \quad C \notin [a, b]. \quad (4.10)$$

Тогда для определяющего функционала $E_T(u_0; a, b) := E_T(\varphi, u|_{\partial\Omega}, u_0)$ имеем

$$\begin{aligned} E_T(u_0; a, b) &= \left[\frac{2}{T} x - \frac{3}{(C-x)^2} + \frac{6}{5} T \frac{1}{(C-x)^5} \right]_a^b \\ &+ \int_0^T \left(\frac{T-t}{T} \right)^2 \left[\frac{u_{xx}}{C-x} - \frac{u_x}{(C-x)^2} + \frac{2u}{(C-x)^3} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(C-x)} \right]_a^b dt \\ &- \int_a^b u_0 \frac{dx}{C-x}, \quad C \notin [a, b]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отсюда на основании теоремы 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Пусть существуют последовательности $a_n \rightarrow -\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$, $|C_n| \rightarrow +\infty$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_T(u_0; a_n, b_n) < 0. \quad (4.12)$$

Тогда задача Коши (2.1) не имеет решения при $t > T$.

Для доказательства достаточно в неравенстве (2.8) с указанной функцией φ_0 и $\Omega = (a_n, b_n)$ перейти к соответствующему пределу при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 4.2. Ясно, что существование соответствующих предельных граничных интегралов определяется функциональным пространством рассматриваемых решений.

§5. Пример

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 & \text{в } Q_T, \\ u|_{t=0} = Ax & \text{при } t = 0, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.1)$$

с постоянной $A \neq 0$. Ясно, что решением этой задачи является функция

$$u(t, x) = \frac{x}{t - T_0}$$

с $T_0 = -1/A$. Таким образом, при $A < 0$ это решение разрушается при $t = T_0 > 0$.

Проведем теперь анализ этой задачи Коши на основании теоремы 2.1. С этой целью рассмотрим последовательность областей $\Omega_n = (a_n, b_n)$ с

$$b_n \rightarrow +\infty, \quad a_n = -\lambda b_n \text{ с } \lambda = 3 \text{ и } C_n = k b_n \text{ с } k = 2. \quad (5.2)$$

Замечание 5.1. Выбор параметров λ и k определяется соответствующей областью D в плоскости этих параметров, обеспечивающей предельное неравенство (4.12).

Мы ограничимся фиксированной точкой $(3, 2) \in D$.

Вычислим определяющий функционал $E_T(u_0; a_n, b_n)$ (см. (4.11)) с параметрами a_n , b_n и C_n , определенными соотношениями (5.2).

Тогда

$$\begin{aligned} E_T(u_0; a_n, b_n) &= \frac{8}{T} b_n - \frac{72}{25} \frac{1}{b_n^2} + \frac{6}{5} \left(1 - \frac{1}{5^5}\right) \frac{T}{b_n^5} \\ &\quad - \int_0^T \left(\frac{T-t}{T}\right)^2 \frac{1}{(t-T_0)^2} \left[\frac{2}{5} b_n + (T_0 - t) \left(1 + \frac{11}{5^3}\right) \frac{1}{b_n^2} \right] dt - (4 - 2 \ln 5) \frac{b_n}{T_0}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 следует, что задача Коши (5.1) не имеет решения при $T > T_0$.

В самом деле, при любом $T > T_0$ и

$$b_n^3 > (T - T_0) \left(\frac{5}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{5^2} \right)$$

имеем $E_T(u_0; a_n, b_n) = -\infty$ в силу расходимости интеграла

$$- \int_0^T \left(\frac{T-t}{T}\right)^2 \frac{1}{(t-T_0)^2} \left[\frac{2}{5} b_n + (T_0 - t) \left(1 + \frac{11}{5^3}\right) \frac{1}{b_n^2} \right] dt = -\infty$$

при $T > T_0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М., 1988.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] A. V. Faminskii, *Global well-posedness of two initial-boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation*, Differential Integral Equations, **20**:6 (2007), 601–642.
- [4] Z. Guo, *Global well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}(\mathbb{R})$* , J. Math. Pures Appl. (9), **91**:6 (2009), 583–597.
- [5] J. Holmer, *The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Comm. Partial Differential Equations, **31**:7–9 (2006), 1151–1190.
- [6] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Труды МИРАН, **234** (2001), 3–383.

- [7] С. И. Похожаев, *Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами*, Докл. РАН, **357**:5 (1997), 592–594.
- [8] С. И. Похожаев, *Об одном классе начально-краевых задач для уравнений типа Кортевега–де Фриза*, Дифференциальные уравнения, **48**:3 (2012), 368–374.
- [9] С. И. Похожаев, *Об отсутствии глобальных решений некоторых начально-краевых задач для уравнения Кортевега–де Фриза*, Дифференциальные уравнения, **47**:4 (2011), 493–498.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
7 сентября 2011 г.