Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Ильяшенко, Многомерные костистые аттракторы, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 1–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:38:22

Многомерные костистые аттракторы*

© 2012. Ю. С. Ильяшенко

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

Исследуются аттракторы косых произведений, для которых установлена следующая дихотомия. Они либо не являются асимптотически устойчивыми, либо обладают следующими двумя неожиданными свойствами. Пересечение аттрактора с некоторым инвариантным подмногообразием не совпадает с аттрактором ограничения косого произведения на это подмногообразие, а содержит его как собственное подмножество. Кроме того, указанное пересечение является толстым на подмногообразии — имеет положительную условную меру вместе с дополнением. Такое пересечение называется костью, а сам аттрактор называется костистым. Эти аттракторы исследованы в пространстве косых произведений. Их важное свойство состоит в том, что в некотором открытом подмножестве пространства косых произведений множество отображений с такими аттракторами в определенном смысле превалентное, т. е. «большое». Кажется правдоподобным, что аттракторы с такими свойствами образуют превалентное подмножество и в открытом подмножестве пространства диффеоморфизмов.

§1. Введение

Насколько известно автору, все исследованные до 2010 г. аттракторы динамических систем на компактных многообразиях, не совпадающие со всем многообразием, при наличии инвариантного подмногообразия обладают следующими двумя свойствами:

пересечение аттрактора с инвариантным подмногообразием системы совпадает с аттрактором ограничения системы на это подмногообразие;

указанное пересечение либо имеет k -мерную лебегову меру 0, либо совпадает со всем подмногообразием; здесь k — размерность подмногообразия.

В предлагаемой работе построены аттракторы, которые не обладают ни одним из этих свойств, а размерность k произвольна. Целью этой статьи является не только доказательство сформулированных в ней результатов, но и изложение конструкции, с помощью которой они доказываются и которая, на наш взгляд заслуживает дальнейшего изучения. Основная деталь этой конструкции — два послонных отображения, аттрактор одного из которых неустранимым образом пересекает репеллер другого.

Конструкция мотивирована следующим примером, который, впрочем, устраним малым шевелением.

Обозначим через Σ^k множество двусторонних последовательностей из k символов $0, 1, \dots, k-1$.

*Работа поддержана грантами NSF 0700973, РФФИ 10-01-00739-а и РФФИ-CNRS 10-01-93115-НЦИЛ_a.

Рассмотрим косое произведение над Σ^2 со слоем окружность:

$$F: X = \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow X, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}x). \quad (1)$$

Диффеоморфизмы f_0 и f_1 в этой формуле называются послойными отображениями. Пусть f_0 и f_1 обладают следующими свойствами.

1. Оба отображения имеют число вращения 0. Все их неподвижные точки — гиперболические.

2. Отображение f_0 является северо-южным с аттрактором a_0 и репеллером r_0 .

3. Отображение f_1 имеет аттракторы a_1 , a_2 и репеллеры r_1 , r_2 . При этом $r_1 = a_0$; кроме того, на дуге $[r_0, r_2]$ (меньшей из двух дуг с концами r_0 , r_2) нет ни одного аттрактора отображений f_0 и f_1 .

4. Мультипликаторы послойных отображений в точке $a_0 = r_1$ удовлетворяют неравенству

$$f'_0(a_0)f'_1(a_0) < 1. \quad (2)$$

Теорема 1. *Косое произведение (1) с описанными выше послойными отображениями f_0 , f_1 имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

Эта теорема доказана И. Шилиным [5]. Она мотивирует рассмотрение косых произведений, аттрактор и репеллер которых (не обязательно состоящие из одной точки) пересекаются.

Необычное свойство аттрактора отображения (1) обусловлено совпадением аттрактора послойного отображения f_0 с репеллером послойного отображения f_1 . Это совпадение устраняется малым шевелением. Однако если слои многомерны, причем аттрактор отображения f_0 — многообразие, а репеллер отображения f_1 — тоже многообразие дополнительной размерности, то пересечение этих двух многообразий не устранимо малым шевелением. Исследование таких косых произведений приводит к нашему основному результату.

§2. Результат

2.1. Теорема и гипотеза. Скажем, что инвариантное множество отображения F *устойчиво по Ляпунову*, если для любой его окрестности существует другая окрестность, точки которой никогда не покидают первой окрестности под действием положительных итераций отображения F .

Инвариантное множество отображения F *асимптотически устойчиво*, если существует такая его окрестность $\mathcal{W}$, что для любой его окрестности $\mathcal{V}$ существует k_0 , такое, что

$$F^k(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V} \quad \text{для любого } k \geq k_0. \quad (3)$$

Определение 1. Рассмотрим гомеоморфизм F компактного метрического пространства X с вероятностной мерой в себя. *Аттрактором Милнора* называется минимальное замкнутое множество в X , которое содержит ω -предельные множества почти всех точек пространства X под действием F . Аттрактор Милнора обозначается через A_M .

Теорема 2. *В пространстве ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли со слоем «тор произвольной размерности, большей 3» существует*

открытое множество, в котором метрически типично (превалентно) множество таких отображений, аттрактор Милнора которых либо не является асимптотически устойчивым, либо обладает следующими двумя свойствами.

1. Существует инвариантный слой, пересечение с которым аттрактора Милнора содержит непустую внутренность и непустое дополнение.

2. Ограничение косого произведения на тот же слой имеет аттрактор, который является собственным подмножеством пересечения аттрактора Милнора с этим слоем.

Недавно А. Окунев модифицировал приведенную ниже конструкцию так, что упомянутая в аннотации дихотомия исчезает: остаются только системы, обладающие свойствами 1 и 2 из теоремы.

Пересечение аттрактора Милнора A_M со слоем, описанное в теореме, называется *костью*. Аттрактор, обладающий свойством 1, называется *толстым на инвариантном многообразии*.

Комментарий. По определению косого произведения (1) инвариантный слой лежит над неподвижной точкой сдвига Бернулли. В нашей конструкции это будет последовательность, состоящая из одних единиц. Слой и аттрактор замкнуты, и их пересечение тоже замкнуто. Поэтому как кость, так и ее дополнение содержат открытое множество.

В работе [6] Кудряшов исследовал аттракторы косого произведения над Σ^2 со слоем отрезок, для которых справедлива сформулированная выше теорема. Эти аттракторы были названы костистыми. Общее определение таких аттракторов дано ниже. В диссертации Кудряшова [7] доказано также, что отображения, имеющие костистые аттракторы, образуют открытое множество в пространстве диффеоморфизмов торического слоя (произведения двумерного тора на отрезок) в себя. В настоящей работе предлагается конструкция косого произведения над Σ^k со слоем *любой размерности*, для которого сформулированная выше теорема имеет место. Кажется правдоподобным, что построенные здесь аттракторы обладают рядом других интересных свойств.

Следующая гипотеза относится к обобщению теоремы 2 на множество диффеоморфизмов.

Гипотеза 1. В пространстве диффеоморфизмов тора размерности $n > 5$ существует открытое множество, в котором типично множество таких отображений, аттрактор Милнора которых либо является толстым на инвариантном подмногообразии размерности $n - 2$, либо не является асимптотически устойчивым.

2.2. Об определении аттрактора. Первоначальное определение аттрактора (см. [8] и указанную там литературу) включало в себя требование (3). Аттракторы в смысле этого определения (называемые часто *максимальными*) были автоматически асимптотически устойчивыми. Однако не у всякого диффеоморфизма есть аттрактор со свойством (3). Это относится даже к простейшему примеру диффеоморфизма окружности с единственной неподвижной точкой; она тогда неминуемо будет седлоузловой. Нужно либо считать, что в этом примере аттрактор — вся окружность (что неестественно: все траектории стремятся к седлоузлу), либо изменить определение аттрактора. Это сделано Милнором [8] и автором [1], определившими аттрактор Милнора и минимальный и статистический аттракторы соответственно. В отличие от максимальных,

эти аттракторы существуют у любого диффеоморфизма компактного риманова многообразия. Однако они не обязательно устойчивы по Ляпунову. Простейшим примером является обсуждавшийся выше диффеоморфизм окружности с одним седлоузлом. Кроме того, максимальные аттракторы часто весьма избыточны — содержат большие подмножества, которые, с точки зрения численных экспериментов, являются лишними, т. е. ненаблюдаемыми. Минимальный, статистический и милноровский аттракторы менее избыточны. В этой статье мы рассматриваем аттракторы Милнора.

2.3. Костистые аттракторы. Компонентой аттрактора Милнора A_M называется подмножество $K \subset A_M$, обладающее следующими свойствами: (а) некоторая окрестность множества K не содержит точек из A_M , не принадлежащих K ; (б) множество K не содержит собственного подмножества, обладающего свойством (а).

По определению костистый аттрактор гомеоморфизма F — это аттрактор Милнора отображения F или его компонента K , обладающие следующим свойством. Ограничение отображения F на костистый аттрактор топологически эквивалентно косому произведению — отображению вида

$$F: (b, x) \mapsto (h(b), f_b(x)) \quad (4)$$

Здесь $h: B \rightarrow B$ — гомеоморфизм метрического пространства с мерой, а

$$K = \bigsqcup_{b \in B} K_b, \quad f_b(K_b) = K_{h(b)}; \quad (5)$$

множество B называется базой, а множества K_b — слоями. При этом не все слои K_b гомеоморфны друг другу. Более того, *среди них есть слои разных размерностей*. Слои максимальной размерности называются *костями*, а сам аттрактор — *костистым* или *костлявым*.

Из формул (4), (5) следует, что отображение F переставляет слои.

Существуют примеры костистых аттракторов, для которых сумма размерностей костей и базы равна размерности фазового пространства. Однако во всех известных примерах костистых аттракторов мера этих аттракторов равна нулю.

Проблема 1. *Существует ли открытое множество в пространстве диффеоморфизмов, каждое отображение из которого имеет толстый аттрактор — аттрактор Милнора положительной меры, дополнение к которому пусто (и, тем самым, открыто и тоже имеет положительную меру)?*

§3. Построение костистых аттракторов

Здесь перечислены свойства косых произведений, достаточные для появления костистых аттракторов. Примеры косых произведений с такими свойствами приведены в §5.

Пусть M — замкнутое k -мерное многообразие, а Σ^k , как и выше, — множество двусторонних последовательностей из k символов. Положим $X = \Sigma^{k+3} \times M$,

$$F: X \rightarrow X, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}x). \quad (6)$$

Здесь f_{ω_0} пробегает множество диффеоморфизмов $f_0, f_1, \dots, f_{k+2}$. Эти диффеоморфизмы называются *послойными отображениями*. Предположим, что они обладают следующими свойствами.

1. Дiffeоморфизм f_0 имеет глобально притягивающую поверхность A_0 , нормально гиперболическую по Хиршу–Пью–Шубу с показателем больше r . Это значит, что орбиты с начальными условиями, близкими к A_0 , экспоненциально приближаются к A_0 ; при этом показатель экспоненты (показатель приближения орбит к A_0) более чем в r раз превосходит аналогично определяемый показатель сближения орбит на A_0 ; обычно ниже $r = 1$. Более подробный вариант этих определений (упрощенный по сравнению с оригиналом) может быть найден в [1]. Для нас важно только то, что отображение f_0 обладает свойством, сформулированным ниже в замечании 1.

Пусть A_0 является глобальным аттрактором для f_0 : все точки из M , кроме точек стратифицированного вложенного подмногообразия, стремятся к A_0 под действием f_0 .

2. Дiffeоморфизм f_1 имеет гиперболический аттрактор и отталкивающую инвариантную поверхность R_1 (в дальнейшем часто диффеоморфную тору); бассейн отталкивания R_1 (совпадающий по определению с бассейном притяжения поверхности R_1 для f_1^{-1}) обозначим через $\mathcal{R}$. Это открытое подмножество многообразия M . Бассейн $\mathcal{R}$ в слое над последовательностью (1) из одних единиц будет костью в аттракторе Милнора отображения F .

Предположим, что R_1 — нормально гиперболическое инвариантное подмногообразие для f_0 с показателем, большим r .

Замечание 1. Из требования на показатели следует, что при малом возмущении отображений f_0 и f_1 возмущенные отображения имеют инвариантные притягивающее и отталкивающее многообразия, близкие к A_0 и R_1 и гладкости C^r .

3. Пусть ограничения $f_0|_{A_0}$ и $f_1|_{R_1}$ — диффеоморфизмы Аносова.

Сделаем теперь предположения о «взаимодействии» отображений f_j . Скажем, что отображение f имеет *выталкивающую область* W , если $\overline{W} \subset f(W)$.

4. Все посылонные отображения $f_0, f_1, \dots, f_{k+2}$ имеют общую выталкивающую область W .

Чтобы сформулировать свойство 5, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 (лемма Хатчинсона [4]). *Рассмотрим k -мерное многообразие M , область $\Omega \subset M$, число $q < 1$ и отображения $g_1, \dots, g_{k+1}$ со следующими свойствами:*

$$g_l(\Omega) \subset \Omega, \quad (7)$$

$$\text{Lip } g_l|_{\Omega} \leq q; \quad (8)$$

существует область Ω_1 , принадлежащая Ω вместе с замыканием, такая, что

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} g_i(\Omega_1). \quad (9)$$

Тогда для любой области U , имеющей непустое пересечение с Ω_1 , существует такое отображение g из полугруппы $G^+(g_1, \dots, g_{k+1})$, что

$$g(\Omega) \subset U. \quad (10)$$

Сформулируем теперь последние два требования на косое произведение (6).

5. Послойные отображения $f_2, \dots, f_{k+2}$ имеют общую поглощающую область Ω , причем каждая точка многообразия M принадлежит бассейну притяжения области Ω под действием одного из отображений $f_2, \dots, f_{k+2}$. Эти отображения в области Ω удовлетворяют условиям леммы Хатчинсона, наложенным на $g_1, \dots, g_{k+1}$ соответственно, причем $\Omega_1 \cap A_0 \neq \emptyset$.

6. Пусть

$$\dim A_0 + \dim R_1 = \dim M. \quad (11)$$

Поверхности A_0 и R_1 трансверсально пересекаются по множеству, содержащему точку p с плотной на R_1 будущей орбитой ограничения $f_1|_{R_1}$ и с плотной на A_0 прошлой орбитой ограничения $f_0|_{A_0}$.

Обозначим через P равновероятную меру Бернулли на Σ^{k+3} . Пусть m — мера Лебега на слое и $\mu = P \times m$ — мера на X . Метрика на X — прямое произведение метрик в базе и на слое. Эти определения позволяют говорить об аттракторе Милнора отображения (6).

Теорема 3. *Если косое произведение удовлетворяет требованиям 1–6 этого параграфа, то его аттрактор Милнора либо не является асимптотически устойчивым, либо обладает свойствами 1 и 2 из теоремы 2.*

Предложение 1. *Множество косых произведений с описанными свойствами метрически типично в некотором открытом подмножестве пространства $(\text{Diff}^1 \mathbb{T}^m)^{k+3}$ при $m \geq 4$.*

Это предложение доказано в §5.

Вместе теорема 3 и предложение 1 влекут за собой теорему 2.

§4. Охота за костью

В этом параграфе доказана теорема 3. Если аттрактор Милнора отображения, описанного в этой теореме, не является асимптотически устойчивым, то теорема доказана. Осталось рассмотреть случай, когда этот аттрактор асимптотически устойчив.

4.1. План доказательства. Теорема 3 доказывается в четыре шага, которым соответствуют следующие леммы, установленные ниже. В разд. 4.1–4.4 предполагаются выполненными условия §3.

Лемма 2. *Поверхность $\{(0)\} \times A_0$ принадлежит $A_M(F)$ — аттрактору Милнора отображения F .*

Лемма 3. *Пусть $\omega^{01} = 0^-|1^+$. Тогда либо аттрактор Милнора $A_M(F)$ отображения F не является асимптотически устойчивым, либо поверхность $\{\omega^{01}\} \times A_0$ принадлежит $A_M(F)$.*

Лемма 4. *Пусть $p = A_0 \cap R_1$ — точка пересечения из условия 6; пусть $P = ((1), p)$. Тогда*

$$\omega(P) \subset A_M(F).$$

Из теории Хирша–Пью–Шуба следует, что в некоторой окрестности многообразия R_1 отображение f_1 имеет инвариантное слоение $\mathcal{W}^u$, растягивающееся

под действием f_1 , каждый слой которого трансверсально пересекает поверхность R_1 по одной точке. Это слоение продолжается с помощью положительных итераций отображения f_1 на весь бассейн отталкивания репеллерной поверхности R_1 . Продолженное слоение также обозначается через $\mathcal{W}^u$, а его слой, проходящий через точку Q , через W_Q^u .

Лемма 5. Пусть P — та же точка, что и в лемме 4. Тогда вместе с каждой точкой $T \in \omega(P)$ аттрактор $A_M(F)$ содержит слой W_T^u .

Теорема 3 следует из лемм 2–5, поскольку бассейн отталкивания $\mathcal{R}$ репеллерной поверхности R_1 равен объединению растягивающихся слоев:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{Q \in R_1} W_Q^u.$$

Этот бассейн является открытым множеством. По лемме 5 множество $\{(1)\} \times \mathcal{R}$ принадлежит аттрактору Милнора отображения F . С другой стороны, дополнение к аттрактору Милнора на инвариантном слое $\{(1)\} \times M$ содержит выталкивающую область $\{(1)\} \times W$. Поэтому пересечение аттрактора Милнора с инвариантным слоем $\{(1)\} \times M$ имеет непустую внутренность и его (открытое) дополнение на слое непусто. Заметим, что ограничение отображения F на рассматриваемый слой — это отображение f_1 . Его аттрактор — гиперболическое множество (см. свойство 2 §3). По теореме Боуэна [3] оно имеет k -мерную меру нуль и не может содержать открытое подмножество слоя — бассейн отталкивания поверхности $\mathcal{R}$. Поэтому пересечение аттрактора с этим слоем не совпадает с аттрактором ограничения отображения на слой. Это доказывает теорему 3.

Перейдем к доказательству лемм.

4.2. Притягивающая поверхность в слое как часть аттрактора Милнора.

Доказательство леммы 2. Пусть $p \in \{(0)\} \times (A_0 \cap \Omega_1)$ — произвольная точка, имеющая плотную в A_0 прошлую орбиту действия f_0 . Возьмем произвольную окрестность точки p вида

$$\mathcal{V}_p = C_{w^0(m)} \times V_p;$$

здесь V_p — окрестность точки p в слое M , C_w — цилиндр, соответствующий слову w , $w^0(m) = \underbrace{0 \dots 0}_m | \underbrace{0 \dots 0}_{m+1}$, знак $|$ стоит слева от нулевой позиции рядом

с ней. Здесь и ниже курсивными буквами обозначаются окрестности в слое M , а рукописными — в фазовом пространстве X . Нижний индекс указывает множество, окрестность которого берется.

Предложение 2. Почти все точки множества $X \setminus (\Sigma^{k+3} \times W)$ попадают в окрестность $\mathcal{V}_p$ под действием положительных итераций отображения F хотя бы один раз.

Из этого предложения легко следует аналогичное утверждение, в котором «хотя бы один раз» заменено на «бесконечно много раз». Действительно, в силу предложения 2 множество точек, не попадающих в $\mathcal{V}_p$ под действием положительных итераций отображения F ни разу, имеет меру нуль. Множество точек, не попадающих в $\mathcal{V}_p$ после k итераций отображения F , является образом этого множества под действием F^{-k} и также имеет меру нуль. Дополнение ко всем

этим множествам состоит из точек, посещающих $\mathcal{V}_p$ бесконечно много раз, и имеет полную меру.

В силу произвольности окрестности $\mathcal{V}_p$ отсюда следует, что $p \in A_M(F)$.

В силу инвариантности аттрактора Милнора

$$\text{orb}_F((0), p) = \{(0)\} \times \text{orb}_{f_0} p \subset A_M(F).$$

Плотность орбиты $\text{orb}_{f_0} p$ в A_0 и замкнутость аттрактора Милнора влекут за собой теперь лемму 2. $\square$

Доказательство предложения 2. Докажем, что в условиях 1–6 §3 выполнено следующее условие.

7. Пусть Ω и Ω_1 те же, что в условии 5 §3. Для каждой области U , для которой $U \cap \Omega_1 \cap A_0 \neq \emptyset$, и каждой точки $x \in M$ существует слово $w = w(x)$, такое, что

$$f_w(x) \in U.$$

Здесь

$$f_w = f_{\omega_{k-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_0},$$

если $w = \omega_0 \dots \omega_{k-1}$. Выведем предложение 2 из условия 7.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество $X \setminus \Sigma^{k+3} \times W$ и через $\mathcal{B}(U)$ множество точек из $\mathcal{A}$, которые под действием положительных итераций отображения F попадают в область U хотя бы один раз. Предложение 2 принимает следующий вид:

Предложение 3. Пусть $\mathcal{V}_p$ — та же окрестность, что и в начале раздела. Тогда почти все точки множества $\mathcal{A}$ принадлежат множеству $\mathcal{B}(\mathcal{V}_p)$.

Доказательство. Положим $C(x) = (\{x\} \times \Sigma^{k+3}) \setminus \mathcal{B}(\mathcal{V}_p)$. Мы докажем, что

$$P(C(x)) = 0, \quad (12)$$

где P — упомянутая выше мера Бернулли на Σ^{k+3} .

Пусть m то же, что в определении окрестности $\mathcal{V}_p$. Выберем $m' \geq m$ так, что $U \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, где $U = f_0^{-m'}(V_p)$ и окрестность V_p та же, что в начале раздела. Это можно сделать, потому что прошлая орбита точки p под действием f_0 плотна в A_0 .

Множество $M \setminus W$ компактно. Следовательно, существует такое N_0 , что для каждого $x \in M \setminus W$ слово $w = w(x)$ из свойства 7, соответствующее точке x и области U , имеет длину не больше N_0 . Для этого слова $f_w(x) \in U$. Обозначим через $\tilde{w}(x)$ и $\hat{w}(x)$ слова, полученные из $w(x)$ дописыванием справа $2m' + 1$ нулей и m' нулей соответственно. Положим $|\hat{w}(x)| = K$, $|\tilde{w}(x)| = L$. Имеем $f_{\hat{w}(x)}(x) \in V_p$. Для любой последовательности $\omega \in \Sigma^2$ пусть

$$\omega|_a^b = \omega_a \dots \omega_b$$

— подслово последовательности ω от позиции a до позиции b . Положим $N = 2m' + 1 + N_0$, $N \geq L$. Для любого ω , такого, что $\omega|_0^{L-1} = \tilde{w}(x)$, получаем

$$F^K(\omega, x) \in \mathcal{V}_p.$$

Таким образом, мера множества тех точек горизонтального слоя $\{x\} \times \Sigma^{k+3}$, которые не принадлежат $C(x)$, не меньше, чем 2^{-N} , а доля точек, которые могут принадлежать $C(x)$, не превышает $\nu = \nu(N) = (2^N - 1)/2^N$.

Индукцией по l докажем, что эта доля на самом деле не превышает ν^l для любого l , т. е. равна нулю. Для каждого слова w' длины N , которое не содержит подслово $\tilde{w}(x)$, начиная с нулевой позиции, рассмотрим $y = f_{w'}(x)$ и слово $\tilde{w}(y)$. Пусть $K = |\tilde{w}(y)| < N$ и $\omega|_0^{N+K-1} = w'\tilde{w}(y)$. Тогда

$$F^{N+K}(\omega, x) \in \mathcal{V}_p.$$

Следовательно, доля тех точек, которые могут принадлежать $C(x)$, не превышает ν^2 .

Это завершает шаг индукции от 1 к 2. Шаг индукции для произвольного l проводится аналогично. Это доказывает соотношение (12).

Предложение 3 следует теперь из теоремы Фубини. $\square$

В доказательстве предложения 3 использован метод, изобретенный Кудряшовым [6].

Из предложения 3 непосредственно следует предложение 2.

Доказательство условия 7. По условию 5 §3 для каждого $x \in M$ существует слово $w^0 = w^0(x)$, такое, что $f_{w^0}(x) \in \Omega$. По лемме Хатчинсона для любого $y \in \Omega$ существует слово $w^1 = w^1(y)$, такое, что $f_{w^1}(y) \in U$. Возьмем это слово для $y = f_{w^0}(x)$. Слово $w^0(x)w^1(y)$ является искомым. $\square$

Отметим, что в доказательстве предложения 3 мы установили не только равенство (12), но и неравенство $\dim_H C(x) < 2$.

4.3. Неустойчивое многообразие притягивающей поверхности.

Доказательство леммы 3. Предположим, как и выше, что аттрактор $A_M(F)$ асимптотически устойчив. Как сказано выше, это значит, что существует такая его окрестность $\mathcal{W}$, что для любой его окрестности $\mathcal{V}$ существует k_0 , такое, что $F^k(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$ для любого $k \geq k_0$.

Предположим теперь, что существует точка $Q = (\omega^{01}, q) \in \{\omega^{01}\} \times A_0$, не принадлежащая $A_M(F)$. Тогда существуют окрестности $\mathcal{V}_{A_M(F)}$ и $\mathcal{V}_Q$, такие, что $\mathcal{V}_{A_M(F)} \cap \mathcal{V}_Q = \emptyset$. Пусть $\mathcal{W}$ — та же окрестность, что и выше. Возьмем такое k_0 , что $F^k(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}_{A_M(F)}$ для любого $k \geq k_0$. Область $\mathcal{W}$ является одновременно окрестностью поверхности $\{(0)\} \times A_0$ по лемме 2. Пусть $m \geq k_0$ таково, что $C_{w^0(m-1)} \times A_0 \subset \mathcal{W}$. Тогда

$$F^{-m}(Q) = (\sigma^{-m}\omega^{01}, f_0^{-m}q) \in C_{w^0(m-1)} \times A_0 \subset \mathcal{W}.$$

Следовательно,

$$F^m(\mathcal{W}) \cap \mathcal{V}_Q \ni Q \neq \emptyset.$$

Но $F^m(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}_{A_M(F)}$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

4.4. Кость.

Доказательство леммы 4. Как и выше, мы предполагаем, что аттрактор Милнора рассматриваемого косога произведения асимптотически устойчив. Лемма следует из инвариантности и замкнутости аттрактора Милнора. Пусть $p = A_0 \cap R_1$, $P = ((1), p)$ те же, что и в лемме. Положим $Q = (\omega^{01}, p)$. По лемме 3 $Q \in A_M(F)$. В силу инвариантности тем же свойством обладает орбита точки Q , а в силу замкнутости — ее ω -предельное множество. Орбиты точек P и Q под действием F асимптотически сближаются, потому что левые сдвиги

последовательности ω^{01} стремятся к (1):

$$F^n(Q) = (\sigma^n \omega^{01}, f_1^n(p)), \quad F^n(P) = ((1), f_1^n(p)), \quad \text{dist}(F^n(P), F^n(Q)) \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\omega(P) = \omega(Q) \subset A_M(F)$. Лемма 4 доказана. $\square$

Доказательство леммы 5. Это доказательство использует тот факт, что не только точка $Q = (\omega^{01}, p)$ принадлежит аттрактору Милнора, но и вся поверхность $\omega^{01} \times A_0$ обладает этим свойством.

Рассмотрим множество образов

$$F^n(\omega^{01} \times A_0) = (\sigma^n \omega^{01} \times f_1^n(A_0)).$$

Поверхность $f_1^n(A_0)$ проходит через точку $f_1^n(p) \in R_1$. Точки на репеллерной поверхности разбегаются со скоростью, меньшей, чем скорость отталкивания от R_1 . Поэтому для достаточно малой окрестности V_{R_1} репеллерной поверхности в M пересечения $f_1^n(A_0) \cap V_{R_1}$ приближаются к слоям $W_{f_1^n(p)}^u$. Это доказывается из тех же соображений, что и хорошо известная Λ -лемма, и мы опускаем подробности.

Отметим, что $\omega(P)$ плотно в $\{(1)\} \times R_1$. Поэтому

$$\{(1)\} \times R_1 \subset A_M(F). \quad (13)$$

Лемма 5 следует теперь из (13). Вместе с ней доказана теорема 2. $\square$

§5. Метрическая типичность

Здесь доказана локальная метрическая типичность (превалентность) множества косых произведений, удовлетворяющих условиям 1–6 §3. Сначала мы строим набор $f_0^0, \dots, f_{k+2}^0$, удовлетворяющий условиям 1–5 §3, но не условию 6: аттракторная и репеллерная поверхности первых двух отображений имеют дополнительные размерности, но одна из них принадлежит другой. Искомые наборы получаются из построенного с помощью подходящих возмущений.

5.1. Описание первых двух послыльных отображений вспомогательного набора. Здесь построены отображения f_0^0, f_1^0 , имеющие нормально гиперболические аттракторную и репеллерную поверхности и общую выталкивающую область.

Пусть $k \geq 4$ произвольно и $M = \mathbb{T}^k$. Разобьем k на два слагаемых: $k = l + m$, $2 \leq l \leq m$, и представим $\mathbb{T}^k$ в виде $\mathbb{T}^l \times \mathbb{T}^m = \mathbb{T}^l \times \mathbb{T}^{m-l} \times \mathbb{T}^l$.

Начнем с построения отображения f_0^0 . Пусть $G^0: \mathbb{T}^l \rightarrow \mathbb{T}^l$ — отображение Морса–Смейла, все неблуждающие точки которого неподвижны. Этим свойством обладают все рассматриваемые ниже отображения Морса–Смейла. Пусть a — притягивающая неподвижная точка отображения G^0 , а r — отталкивающая. Пусть $A_l: \mathbb{T}^l \rightarrow \mathbb{T}^l$ — гиперболический автоморфизм тора. В соответствии с этим обозначением $A_m: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ — гиперболический автоморфизм тора $\mathbb{T}^m$. Положим

$$f_0^0 = G^0 \times A_m.$$

Отображение f_0^0 имеет глобально притягивающую поверхность $A_0 = \{a\} \times \mathbb{T}^m$; ограничение этого отображения на поверхность A_0 — гиперболический диффеоморфизм. Нормальная гиперболичность поверхности A_0 обеспечивается выбором достаточно сильного сжатия у отображения G^0 вблизи точки a .

Перейдем к построению отображения f_1^0 .

Пусть $\tilde{G}^0: \mathbb{T}^l \rightarrow \mathbb{T}^l$ — отображение Морса–Смейла, для которого обе точки a и r отталкивающие. Пусть $\tilde{G}^1: \mathbb{T}^{m-l} \rightarrow \mathbb{T}^{m-l}$ — отображение Морса–Смейла и $\tilde{r} \in \mathbb{T}^{m-l}$ — его репеллер. Тогда $G^1 = \tilde{G}^0 \times \tilde{G}^1: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ — снова отображение Морса–Смейла с репеллером $(a, \tilde{r}) \in \mathbb{T}^l \times \mathbb{T}^{m-l}$. Положим

$$f_1^0 = G^1 \times A_l.$$

Отображение f_1^0 имеет отталкивающую поверхность $R_1 = \{(a, \tilde{r})\} \times \mathbb{T}^l \subset A_0$. Ограничение этого отображения на поверхность R_1 — гиперболический диффеоморфизм. Нормальная гиперболичность поверхности R_1 обеспечивается выбором достаточно сильного растяжения у отображения G^1 вблизи его отталкивающих точек.

Отображения f_0^0 и f_1^0 имеют общую выталкивающую область W . Действительно, оба отображения G^0 и $\tilde{G}^0$ имеют общую отталкивающую точку r . Следовательно, они имеют общую выталкивающую окрестность $V \subset \mathbb{T}^l$ этой точки. Область $W = V \times \mathbb{T}^m$ является искомой.

Бассейн отталкивания $\mathcal{R}_1$ отталкивающей поверхности R_1 отображения f_1^0 — открытое множество, дополнение к которому само содержит открытое множество W . Аттрактор отображения f_1^0 гиперболический.

Требования 1–4 §3 выполнены. Требование 6 нарушено; его выполнение будет достигнуто ниже малым возмущением отображения f_0^0 .

Требование 5 относится к отображениям $f_2, \dots, f_{k+2}$, к построению которых мы и переходим.

5.2. Описание остальных послойных отображений. Пусть $g_2^0: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ — отображение Морса–Смейла с глобально притягивающей неподвижной точкой b . Более подробно, все точки тора $\mathbb{T}^k$ притягиваются к b под действием g_2^0 , за исключением точек, принадлежащих некоторому стратифицированному многообразию S размерности $k - 1$. Предположим, что в некоторой координатной окрестности точки b диффеоморфизм g_2^0 является скалярным сжатием с коэффициентом, близким к 1. Рассмотрим диффеоморфизмы $h_j: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$, близкие к тождественному, со следующими свойствами.

1. В той же координатной окрестности точки b отображения h_j — переносы и точки $h_j(b)$ не лежат ни в какой гиперплоскости.

$$2. \bigcap_2^{k+2} h_j(S) = \emptyset.$$

Положим

$$f_j = h_j \circ g_2^0 \circ h_j^{-1}.$$

Заметим, что множество $\mathbb{T}^k \setminus h_j(S)$ является бассейном притяжения точки $h_j(b)$ под действием f_j ; обозначим его через $\mathcal{A}_j$. Свойство 2 гарантирует, что любая точка $x \in \mathbb{T}^k$ принадлежит хотя бы одному бассейну притяжения $\mathcal{A}_j$.

Обозначим через Ω симплекс все в той же координатной окрестности с вершинами $h_j(b)$. В качестве области Ω_1 выберем симплекс с тем же центром тяжести, что Ω , получаемый из Ω сжатием с коэффициентом, близким к единице. Так построенные отображения $f_2^0, \dots, f_{k+2}^0$ удовлетворяют условию 5 §3.

Отметим, что условия 1–5 §3 сохраняются при C^1 -малых шевелениях. Рассмотрим окрестность построенного набора $f_0^0, \dots, f_{k+2}^0$ в пространстве C^1 . Для типичного набора из этой окрестности аттракторная поверхность отображения

f_0 , близкая к A_0 , трансверсально пересекает репеллерную поверхность отображения f_1 , близкую к R_1 . Множество тех наборов, для которых это пересечение содержит точку с плотной на A_0 прошлой орбитой отображения f_0 и с плотной на R_1 будущей орбитой отображения f_1 , метрически типично, поскольку почти все точки на A_0 и R_1 обладают требуемым свойством.

Это заканчивает доказательство теоремы 2.

§ 6. Проблемы

Рассмотрим косое произведение, удовлетворяющее условиям § 3, за исключением условия 6, которое видоизменяется следующим образом:

6'. Поверхности A_0 и R_1 трансверсально пересекаются по конечному множеству, состоящему из периодических точек отображения f_1 .

Проблема 2. Пусть отображение F (см. (6)) удовлетворяет условиям 1–5 § 3 и условию 6'. Пусть $Q = A_0 \cap R_1 \subset \text{Per } f_1$ — конечное множество. Верно ли, что пересечение аттрактора Милнора $A_M(F)$ со слоем $\{(1)\} \times M$ имеет вид

$$A_M(F) \cap \{(1)\} \times M = \bigcup_{q \in Q} W_q^u, \quad (14)$$

где W_q^u — сильно неустойчивое многообразие точки q , определенное в разд. 4.1?

Если соотношение (14) верно, то аттрактор $A_M(F)$ будет неустойчив по Ляпунову в силу гиперболичности отображения $f_1|_{R_1}$. С другой стороны, отображения со свойствами 1–5, 6' плотны в пространстве косых произведений вида (6). Это дало бы пример множества, плотного в некотором открытом подмножестве пространства косых произведений над сдвигом Бернулли и такого, что любое отображение из этого множества имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.

Подобное явление ранее не наблюдалось. Отметим, что остаточное множество в открытом подмножестве пространства диффеоморфизмов, состоящее из отображений, аттрактор Милнора которых устойчив по Ляпунову, но не асимптотически устойчив, построено в [2].

В заключение сформулируем следующую проблему.

Проблема 3. Существует ли открытое множество в пространстве диффеоморфизмов какого-либо замкнутого многообразия, состоящее из отображений, аттракторы Милнора которых неустойчивы по Ляпунову?

Благодарности. Автор благодарен рецензентам за многочисленные полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций*, в кн.: Динамические системы-5, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, ВИНТИ, М., 1986, 5–218.
- [2] C. Bonatti, M. Li, D. Yang, *On the Existence of Attractors*, preprint #568 of Institut Mathématique de Bourgogne, 2009.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.

- [4] J. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., **30**:5 (1981), 713–747.
- [5] Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, *Условно неустойчивые аттракторы*, Труды МИРАН, 2012, 91–100.
- [6] Ю. Г. Кудряшов, *Костистые аттракторы*, Функци. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 73–76.
- [7] Yu. Kudryashov, *Des orbites périodiques et des attracteurs des systèmes dynamiques*, These, Defended Lyon, ENS, 2010.
- [8] J. Milnor, *On the concept of attractors*, Comm. Math. Phys., **99**:2 (1985), 177–196.

Корнельский университет, США
Московский государственный университет
Независимый московский университет
Математический институт им. Стеклова
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: yulijis@gmail.com

Поступило в редакцию
6 сентября 2011 г.