Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, Топологические радикалы и совместный спектральный радиус, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 61–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:40:39

Топологические радикалы и совместный спектральный радиус

© 2012. Ю. В. ТУРОВСКИЙ, В. С. ШУЛЬМАН

*Памяти наших отцов — Владимира Васильевича Туровского
и Семёна Моисеевича Шульмана, офицеров Советской армии,
участников Великой Отечественной войны*

Показано, что совместный спектральный радиус $\rho(M)$ предкомпактного множества M операторов в банаховом пространстве равен большему из двух чисел: совместного спектрального радиуса $\rho_e(M)$ образа множества M в алгебре Калкина и BW -радиуса $r(M)$. Получены также результаты этого рода, относящиеся к общим нормированным алгебрам. Доказательства основаны на теории топологических радикалов нормированных алгебр.

§1. Введение

В 1960 г. Рота и Стренг [12] ввели понятие *совместного спектрального радиуса* ρ (сокращенно ССР), полагая

$$\rho(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\|^{1/n} = \inf_n \|M^n\|^{1/n}, \quad (1.1)$$

для ограниченного множества M элементов нормированной алгебры A ; здесь норма множества понимается как точная верхняя грань норм его элементов, а произведение множеств — как множество произведений: $M_1 M_2 = \{ab : a \in M_1, b \in M_2\}$. Отображение $M \mapsto \rho(M)$ обладает многими удобными аналитическими и алгебраическими свойствами; в частности, при аналитической зависимости $\lambda \mapsto M = M(\lambda)$ отображение $\lambda \mapsto \rho(M(\lambda))$ субгармонично [16, теорема 3.5] (для конечных множеств это было доказано в [13, теорема 3.8]).

Понятие ССР нашло применение в различных областях математики: эволюционной динамике, теории вэйвлетов, разностных уравнениях и во многих других (см., например, [6]), а также в теории операторов, в частности, в теории инвариантных подпространств ([15], [21], [16]). Это стимулировало интерес к нахождению формул для вычисления ССР. Важная формула для вычисления ССР ограниченного множества матриц была найдена в 1992 г. Бергером и Вонгом [2]. Чтобы ее привести, введем, следуя [2], иную спектральную характеристику ограниченного подмножества M алгебры — его *BW-радиус* $r(M)$,

$$r(M) := \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(M), \quad \text{где } r_n(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M^n\}^{1/n}. \quad (1.2)$$

Ясно, что $r(M) \leq \rho(M)$. В [2] было доказано, что

$$\rho(M) = r(M) \quad (1.3)$$

для любого ограниченного множества матриц.

Формула Бергера–Вонга (1.3) была перенесена в [16] на предкомпактные подмножества компактных операторов в банаховом пространстве и использовалась при изучении операторных полугрупп и алгебр Ли. Чтобы убедиться в ее полезности, достаточно увидеть, как легко из нее следует (полученное в [21]) решение проблемы вольтерровой полугруппы: *всякая ли полугруппа вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство?* В самом деле, если G — полугруппа *вольтерровых* (т. е. компактных квазинильпотентных) операторов, то $r(M) = 0$ для любого конечного множества $M \subset G$. Из формулы (1.3) следует, что $\rho(M) = 0$, и тогда линейная оболочка множества M состоит из вольтерровых операторов (см., например, [13, предложение 3.5]). Значит, линейная оболочка полугруппы G — алгебра вольтерровых операторов, и по теореме Ломоносова [8] она имеет инвариантное подпространство.

Подчеркнем, что оба ограничения компактности в (1.3) существенны. В [3] приведен пример пары операторов a, b , для которых $r(\{a, b\}) = 0 \neq \rho(\{a, b\})$. Известны и примеры ограниченных множеств компактных операторов, для которых равенство (1.3) не выполнено (см., например, [11, предложение 2.16]).

Мы получим вариант формулы Бергера–Вонга, свободный от ограничения компактности операторов. А именно, будет показано, что для любого предкомпактного множества $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho_e(M)\}, \quad (1.4)$$

где $\rho_e(M) := \rho(\pi(M))$ есть ССР образа множества M в алгебре Калкина $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ при каноническом эндоморфизме π (здесь, разумеется, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ — алгебра всех ограниченных операторов и идеал всех компактных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$). Мы назвали (1.4) *обобщенной формулой Бергера–Вонга* (обобщенной BW-формулой) в [17], где она была доказана для операторов в произвольном рефлексивном банаховом пространстве, но вскоре выяснилось, что есть несколько видов формул, обобщающих формулу (1.3), и нужно уточнять значение термина. Отметим, что из (1.4) следует справедливость (1.3) для предкомпактных семейств операторов вида $\lambda 1 + K$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K — компактный оператор, что было основой данного в [16] доказательства того, что всякая алгебра Ли вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство.

В этой работе большую роль играет теория топологических радикалов нормированных алгебр, основы которой были заложены в работе Диксона [5] и которая получила дальнейшее развитие в [18], [20]. Удобство одновременного использования алгебраического и операторного подходов объясняется тем, что первый позволяет вести редукцию по идеалам и факторалгебрам (где работают радикалы), а второй — по инвариантным подпространствам и факторпространствам. Результаты работы также отражают чередование этих подходов. Мы сначала получаем *смешанную BW-формулу*, выражающую ССР семейства элементов нормированной алгебры через спектральные характеристики ассоциированного семейства операторов двустороннего умножения. Из нее мы выводим формулу (1.4), которую теперь называем *операторной BW-формулой*.

В свою очередь, (1.4) используется для получения варианта формулы вычисления ССР, пригодного для произвольных нормированных алгебр. Это *алгебраическая BW-формула с гипокompактным радикалом* (определение и свойства

этого радикала см. в разд. 3.2)

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)), r(M)\}. \quad (1.5)$$

Заметим, что $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \supset \mathcal{K}(\mathcal{X})$ при $A = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ и включение может быть строгим; например, при $\mathcal{X} = l^1$ и в ряде других примеров все слабо компактные операторы входят в $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ (см. разд. 4.3). Таким образом, (1.5) не только обобщает операторную BW-формулу (1.4), но и усиливает ее.

Формулы (1.4) и (1.5) были анонсированы в [14], но публикация доказательства долгое время откладывалась по ряду причин. Лишь в 2008 г. авторы поместили доказательство упомянутых формул в электронный архив [19], а несколько месяцев спустя Моррис, также в электронном препринте [9], нашел другое доказательство формулы (1.4), основанное на мультипликативной эргодической теории.

Далее мы рассматриваем перспективы получения «оптимальной» формулы для вычисления ССР. Оказалось, что это можно сделать в рамках теории радикалов. Мы покажем, что существует наибольший из радикалов, которыми можно заменить $\mathcal{R}_{\text{hc}}$ в (1.5); мы обозначаем его $\mathcal{R}_{\text{bw}}$. Мы строим также новый радикал $\mathcal{R}_{\text{sq}}^a$, мажорируемый радикалом $\mathcal{R}_{\text{bw}}$. Как следствие, сочетание радикала $\mathcal{R}_{\text{sq}}^a$ с гипокompактным радикалом позволяет получить более сильную алгебраическую BW-формулу, чем (1.5). В конце работы мы указываем приложение полученных формул к вопросу о непрерывности ССР.

§2. Некоторые вспомогательные результаты

Алгебры, рассматриваемые в работе, предполагаются комплексными, ассоциативными и нормированными. Мы обозначаем через A^1 алгебру, получаемую из алгебры A присоединением единицы; при этом мы полагаем $A^1 = A$, если A унитарна. Термин *идеал* означает двусторонний идеал, *оператор* — ограниченный линейный оператор в комплексном нормированном пространстве, *фактор* алгебры — факторалгебра алгебры по ее замкнутому идеалу. Если J — замкнутый идеал в A , то q_J — это стандартный эпиморфизм алгебры A на A/J ; вместо $q_J(a)$ удобнее иногда писать a/J . Точно так же, образ множества $M \subset A$ относительно q_J обозначается либо через $q_J(M)$, либо, более коротко, через M/J .

Замкнутая линейная оболочка множества M в нормированном пространстве $\mathcal{Y}$ обозначается через $\text{span } M$ или, если требуется уточнение, через $\text{span}_{\mathcal{Y}} M$, замыкание — через $\overline{M}$ или $\overline{M}^{\mathcal{Y}}$, замкнутый единичный шар в $\mathcal{Y}$ — через $\mathcal{Y}_{\odot}$.

Говоря об основных конструкциях работы, отметим иные характеристики BW-радиуса $r(M)$ ограниченного подмножества M алгебры A . Поскольку $\rho(a^n) = \rho(a)^n$, ясно, что $r_n(M) = r_1(M^n)^{1/n} \leq r_{nm}(M)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$, где $r_n(M)$ определен в (1.2), откуда следует, что

$$r(M) = \sup_n r_n(M) = \sup_n r_{nm}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{\mathbf{n}(k)}(M) \quad (2.1)$$

для любого фиксированного m и некоторой фиксированной последовательности $\mathbf{n}(k)$: например, можно взять $\mathbf{n}(k) = (p_1 \cdots p_k)^k$, где p_i пробегает ряд всех простых чисел.

Переход от алгебраической ситуации к операторной удобно осуществлять через рассмотрение операторов умножения. Как обычно, символами L_a и R_a мы

обозначаем операторы левого и правого умножения на элемент a в алгебре A : $L_a x = ax$, $R_a x = xa$. Далее, для $M \subset A$ полагаем $L_M = \{L_a : a \in M\}$ и $R_M = \{R_a : a \in M\}$. Нетрудно проверить, что если M ограничено, то $r(L_M) = r(R_M) = r(M)$ и $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$. Важно, что $r(M)$ и $\rho(M)$ находят отражение в свойствах семейства операторов $L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$.

Лемма 2.1. Пусть M — ограниченное подмножество нормированной алгебры A . Тогда $\rho(M^m) = \rho(M)^m$ и $r(M^m) = r(M)^m$ для любого $m \in \mathbb{N}$, $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$ и $r(M)^2 = r(L_M R_M)$.

Доказательство. Учитывая (1.1), (2.1) и то, что $(M^m)^n = M^{mn}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, получим

$$\begin{aligned}\rho(M^m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^{mn}\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|M^{mn}\|^{1/mn})^m = \rho(M)^m, \\ r(M^m) &= \sup_n r_n(M^m) = \sup_n r_1(M^{mn})^{1/n} = \sup_n r_{nm}(M)^m = r(M)^m.\end{aligned}$$

Так как $\|(L_M R_M)^n\| \leq \|M^n\| \|N^n\|$, то $\rho(L_M R_M) \leq \rho(M)^2$. Чтобы доказать обратное неравенство, заметим, что $\|M^3\| \leq \|L_M R_M\| \|M\|$. Меняя здесь M на M^n , извлекая корни и переходя к пределу в обеих частях неравенства, получим $\rho(M)^3 = \rho(M^3) \leq \rho(L_M R_M) \rho(M)$.

Так как L_M коммутирует с R_M , то $\rho(L_a R_b) \leq \rho(L_a) \rho(R_b) \leq \rho(a) \rho(b)$ для любых $a, b \in M^n$. Учитывая (1.2), беря точные верхние грани, извлекая корни и переходя к верхнему пределу, получим $r(L_M R_M) \leq r(M)^2$.

Так как $\rho(a)^2 = \rho(L_a R_a)$, то $\sup_{a \in M^n} \rho(a)^2 \leq \sup_{b, c \in M^n} \rho(L_b R_c)$. Снова извлекая корни и переходя к верхнему пределу, получим $r(M)^2 \leq r(L_M R_M)$. $\square$

Запишем определение существенного ССР ρ_e в более подробной форме:

$$\rho_e(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\})^{1/n} = \inf_n (\sup\{\|T\|_e : T \in M^n\})^{1/n},$$

где $\|T\|_e = \|\pi(T)\|$ — существенная норма оператора T . Характеристикой оператора, близкой к $\|T\|_e$, является хаусдорфова мера некомпактности $\|T\|_\chi$ образа единичного шара $\mathcal{X}_\odot$ при отображении T (напомним, что это — точная нижняя грань множества тех $\varepsilon > 0$, для которых $T\mathcal{X}_\odot$ имеет конечную ε -сеть, и что $\|T\|_\chi \leq \|T\|_e$). Преимущество полунормы $\|T\|_\chi$ объясняется тем, что она хорошо согласована с сужением оператора на инвариантное подпространство и с его индуцированным действием в факторпространстве (см., например, [17, лемма 2.5]):

$$\|T|_{\mathcal{Y}}\|_\chi \leq 2\|T\|_\chi \quad \text{и} \quad \|T|_{(\mathcal{X}/\mathcal{Y})}\|_\chi \leq \|T\|_\chi. \quad (2.2)$$

Важный технический результат был получен в [16, следствие 6.5]:

Лемма 2.2. $\|L_M R_M\|_\chi \leq 16\|M\|_\chi \|M\|$ для любого предкомпактного множества M операторов.

Доказано [9], что соответствующий хаусдорфов ССР ρ_χ , определенный равенством

$$\rho_\chi(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{\|T\|_\chi : T \in M^n\})^{1/n} = \inf_n (\sup\{\|T\|_\chi : T \in M^n\})^{1/n},$$

совпадает с ρ_e на предкомпактных множествах операторов. Однако мы будем использовать далее лишь очевидное неравенство

$$\rho_\chi(M) \leq \rho_e(M) \quad (2.3)$$

для любого предкомпактного множества операторов M . Из него следует, что для доказательства (1.4) достаточно установить равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho_\chi(M)\}. \quad (2.4)$$

Важный случай выполнения этого равенства доказан в [16, предложение 9.6]:

Лемма 2.3. *Если $\rho(M) = 1$ для предкомпактного множества M операторов и полугруппа, порожденная M , ограничена, то для M выполнено (2.4).*

Для любого ограниченного множества M элементов нормированной алгебры A положим $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$. Легко видеть, учитывая (2.2), что для любого замкнутого идеала J алгебры A

$$\rho^\chi(M/J) \leq \rho^\chi(M). \quad (2.5)$$

Элемент $a \in A$ называется *компактным*, если оператор $W_a := L_a R_a$ компактен в A . Будем говорить, что множество $M \subset A$ *состоит из совместно компактных элементов* в A , если все операторы из $L_M R_M$ компактны в A . Нам понадобится следующее обобщение основного результата работы [21].

Лемма 2.4. *Если G — полугруппа квазинильпотентных элементов нормированной алгебры A , которая состоит из совместно компактных элементов в A , то $\text{span } G$ состоит из квазинильпотентных элементов.*

Доказательство. Ясно, что $L_G R_G$ — полугруппа вольтерровых операторов в A . В силу [21, теорема 4] $\text{span } L_G R_G$ также состоит из вольтерровых операторов. Так как $L_b R_c \in \text{span } L_G R_G$ для любых $b, c \in \text{span } G$, то $L_{\text{span } G} R_{\text{span } G}$ также состоит из квазинильпотентных операторов, и, значит, $\text{span } G$ состоит из квазинильпотентных элементов. $\square$

§3. Топологические радикалы

Топологический радикал (ТР) на классе всех нормированных алгебр — это отображение P , сопоставляющее каждой алгебре A ее замкнутый идеал $P(A)$ и удовлетворяющее следующим условиям:

(R1) $f(P(A)) \subset P(B)$ для любого непрерывного открытого эпиморфизма $f: A \rightarrow B$;

(R2) $P(A/P(A)) = 0$;

(R3) $P(P(A)) = P(A)$;

(R4) для любого идеала J алгебры A $P(J)$ — идеал алгебры A , содержащийся в $P(A)$.

По сравнению с определением ТР в [5] мы требуем открытости эпиморфизма в (R1) и не требуем замкнутости идеала в (R4). Алгебра называется *P -радикальной*, если $A = P(A)$. Можно показать (см. [18, следствие 2.8 и теорема 2.9(i)]), что замыкания P -радикальных идеалов и факторы P -радикальных алгебр P -радикальны и что класс всех P -радикальных алгебр устойчив относительно расширений (если J замкнут, A/J и J P -радикальны, то A P -радикальна). Более общий результат сформулирован в лемме 3.1.

Назовем занумерованное ординалами семейство $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ идеалов алгебры A , содержащихся и замкнутых в некотором идеале J алгебры A , *возрастающей трансфинитной цепочкой* идеалов, если $J_\alpha \subset J_\beta$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha < \beta} J_\alpha}^J$.

для любого предельного ординала $\beta \leq \gamma$, и убывающей трансфинитной цепочки, если $J_\beta \subset J_\alpha$ при $\alpha < \beta$ и $J_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} J_\alpha$ для любого предельного ординала $\beta \leq \gamma$. Следующий результат выводится из [18, теоремы 2.9(i) и 2.10(i)].

Лемма 3.1. Пусть P — топологический радикал. Если в возрастающей трансфинитной цепочке $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ замкнутых идеалов нормированной алгебры A первый идеал J_0 и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ P -радикальны, то и ее последний элемент J_γ P -радикален.

Мы, в основном, будем иметь дело со специальными классами радикалов, обладающих особенно удобными свойствами. Топологический радикал P называется наследственным (сокращенно НТР), если выполняется условие

(R5) $P(J) = J \cap P(A)$ для любого идеала J алгебры A ,

и равномерным (см. [18]), если все подалгебры произвольной P -радикальной алгебры P -радикальны. Легко видеть, что равномерные радикалы наследственны и что (R5) влечет за собой (R3) и (R4). Поэтому НТР можно определять условиями (R1), (R2) и (R5), чем мы будем пользоваться в дальнейшем.

Имеет смысл также рассматривать ТР в классе всех банаховых алгебр, сужая действие вышеперечисленных аксиом. Так, при этом в (R4) под идеалом понимается замкнутый идеал, а требование открытости эпиморфизма в (R1) излишне (т. е. выполняется автоматически в силу теоремы Банаха).

Если P есть НТР в классе банаховых алгебр (с, возможно, более широкой областью определения), то, согласно [18, теорема 2.21], отображение P^r , определенное равенством $P^r(A) := A \cap P(\hat{A})$, где $\hat{A}$ — пополнение нормированной алгебры, является НТР в классе нормированных алгебр. Поскольку $P^r(A) = P(A)$ для банаховых алгебр, регулярная процедура $P \mapsto P^r$ расширяет действие P с банаховых алгебр на нормированные алгебры, причем $P^{rr} = P^r$. Топологический радикал P в классе нормированных алгебр называется регулярным (см. [18]), если $P = P^r$.

Потребность в регуляризации иллюстрируется следующим примером: радикал Джекобсона является НТР в классе банаховых алгебр (обозначаем его через Rad), но не является ТР в классе нормированных алгебр [5, пример 10.1]. Поэтому вместо Rad мы рассматриваем регулярный радикал Джекобсона Rad^r . Ясно, что он равномерен. Другие примеры ТР мы рассмотрим ниже.

В классе всех (топологических) радикалов введем частичный порядок, полагая $P_1 \leq P_2$, если $P_1(A) \subset P_2(A)$ для любой нормированной алгебры.

Лемма 3.2. (a) Любое семейство радикалов $\{P_i : i \in \Lambda\}$ имеет точную верхнюю грань $\bigvee_i P_i$ и точную нижнюю грань $\bigwedge_i P_i$ в классе всех ТР.

(b) Пусть $P = \bigvee \{P_i : i \in \Lambda\}$. В любой алгебре A существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$, такая, что $J_0 = 0$, $J_\gamma = P(A)$ и каждый фактор $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ является P_i -радикальным для некоторого i .

(c) Если все P_i наследственны, то радикал $\bigwedge \{P_i : i \in \Lambda\}$ является наследственным и сопоставляет каждой алгебре A идеал $\bigcap_i P_i(A)$.

Доказательство. (a) Положим $H(A) = \overline{\sum_i P_i(A)}$ и $V(A) = \bigcap_i P_i(A)$ (это корректно, так как можно считать Λ , если необходимо, множеством классов эквивалентности совпадающих на алгебре радикалов). Отображения V и H являются верхним и нижним ТР (см. [5]), т. е. удовлетворяют всем аксиомам ТР, кроме, быть может, (R3) и (R2) соответственно.

Действительно, ясно, что условия (R1) и (R4) выполнены для В и Н. Так как $P_i(A)$ — идеал в $H(A)$, то

$$P_i(A) = P_i(P_i(A)) \subset P_i(H(A)) \subset H(H(A)),$$

откуда $H(A) \subset H(H(A))$, т.е. (R3) выполнено для Н. Покажем теперь, что условие (R2) выполнено для В. Пусть $I = B(A)$ и $J = q_I^{-1}(B(A/I))$. Так как $I \subset P_i(A)$ для любого i , то задан эпиморфизм $p_i: A/I \rightarrow A/P_i(A)$, который является непрерывным и открытым. Тогда

$$(p_i \circ q_I)(J) = p_i(B(A/I)) \subset p_i(P_i(A/I)) \subset P_i(A/P_i(A)) = 0.$$

Следовательно, $J \subset P_i(A)$ для любого i , откуда $J \subset I$ и $B(A/I) = 0$.

Свяжем с Н и В трансфинитные цепочки замкнутых идеалов алгебры A , возрастающую $(H^{(\alpha)}(A))$ и убывающую $(B^\alpha(A))$, определенные рекуррентно: $H^{(\alpha+1)}(A)$ — прообраз $H(A/H^{(\alpha)}(A))$ в A и $B^{\alpha+1}(A) = B(B^\alpha(A))$ при начальных условиях $H^{(0)} = 0$ и $B^0 = A$. Отображения B^α и $H^{(\alpha)}$ — соответственно верхний и нижний ТР. По существу, это установлено в [5, теоремы 6.6 и 6.10]: аргументы из [5] непосредственно переносятся с банаховых алгебр на нормированные, и только один момент требует пояснений — это условие (R4) в случае незамкнутого идеала J . Для B^α оно легко доказывается индукцией; проверим его для $H^{(\alpha)}$. Если по предположению индукции $I = H^{(\alpha)}(J)$ — идеал в A , содержащийся в $K = H^{(\alpha)}(\bar{J})$, то отображение $x/I \mapsto q_{\bar{I}}(x)$ осуществляет изоморфизм между J/I и идеалом $q_{\bar{I}}(J)$ алгебры $A/\bar{I}$. Тогда

$$H^{(\alpha+1)}(J) = \{x \in J : q_{\bar{I}}(x) \in H(q_{\bar{I}}(J))\} \quad (3.1)$$

— идеал в A . Так как $q_{\bar{I}}(J)$ — идеал в $\bar{J}/\bar{I}$, то $H(q_{\bar{I}}(J)) \subset H(\bar{J}/\bar{I})$. Так как $p(H(\bar{J}/\bar{I})) \subset H(\bar{J}/K)$ для стандартного эпиморфизма $p: \bar{J}/\bar{I} \rightarrow \bar{J}/K$, то $H(\bar{J}/\bar{I}) \subset q_{\bar{I}}(H^{(\alpha+1)}(\bar{J}))$ и тогда $H^{(\alpha+1)}(J) \subset H^{(\alpha+1)}(\bar{J})$ в силу (3.1); шаг же индукции для предельного ординала ясен. Итак, показано, что $H^{(\alpha)}(J)$ — идеал в A и $H^{(\alpha)}(J) \subset H^{(\alpha)}(\bar{J})$ для любого ординала α . Учитывая включение $H^{(\alpha)}(\bar{J}) \subset H^{(\alpha)}(A)$, доказанное в [5], получим, что $H^{(\alpha)}$ удовлетворяет (R4).

В силу монотонности цепочки $(B^\alpha(A))$ и $(H^{(\alpha)}(A))$ стабилизируются: найдутся такие ординалы β и γ , что $H^{(\beta+1)}(A) = H^{(\beta)}(A)$ и $B^{\gamma+1}(A) = B^\gamma(A)$. Найденные при этом идеалы обозначим через $H'(A)$ и $B'(A)$. Из условий стабилизации легко следует, согласно [5, теоремы 6.6 и 6.10] (оговорка, сделанная выше, здесь уже не нужна), что соответствующие отображения B' и H' удовлетворяют (R3) и (R2), т.е. становятся радикалами. Ясно, что H' и B' — верхняя и нижняя грани семейства $\{P_i : i \in \Lambda\}$. Если T есть ТР, являющийся верхней гранью семейства $\{P_i : i \in \Lambda\}$, то по индукции получим, что $H^{(\alpha)} \leq T^{(\alpha)} = T$ для любого α , откуда $H' \leq T$. Значит, H' — точная верхняя грань семейства $\{P_i : i \in \Lambda\}$. Аналогично можно показать, что B' — точная нижняя грань семейства $\{P_i : i \in \Lambda\}$ (см. также [5, следствие 6.12]).

(b) Допустим, рассуждая по индукции, что мы уже построили требуемый идеал J_α . Поскольку $J_\alpha \subset P(A)$, можно проверить, что $P(A)/J_\alpha = P(A/J_\alpha)$ (см., например, [18, доказательство следствия 2.8 (ii)]). Если $J_\alpha \neq P(A)$, то $H(A/J_\alpha) \neq 0$, что дает возможность построить $J_{\alpha+1}$.

(c) Поскольку В удовлетворяет условиям (R1) и (R2), достаточно доказать (R5) для В. Но это очевидно в силу того, что (R5) выполнено для всех P_i . $\square$

3.1. Компактно квазинильпотентный радикал. Радикал $\mathcal{R}_{cq}$, который мы сейчас определим, связан с ССР. Пусть $\mathfrak{K}(A)$ — множество всех предкомпактных подмножеств нормированной алгебры A . Назовем A *компактно квазинильпотентной*, если $\rho(M) = 0$ для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$. Следующий результат доказан в [18, теоремы 4.18, 4.20 и 4.25, лемма 4.11].

Теорема 3.3. (а) В любой нормированной алгебре A есть наибольший компактно квазинильпотентный идеал $\mathcal{R}_{cq}(A)$. Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_{cq}(A)$ является НТР.

(b) Элемент $a \in A$ принадлежит $\mathcal{R}_{cq}(A)$ тогда и только тогда, когда $\rho(aM) = 0$ для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$. Эквивалентное условие: $\rho(\{a\} \cup M) = \rho(M)$ для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$.

(c) $\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_{cq}(A))$ для всех $M \in \mathfrak{K}(A)$.

(d) $\mathcal{R}_{cq}(B) = B \cap \mathcal{R}_{cq}(A)$ для любой плотной подалгебры B .

Условие (d) эквивалентно регулярности радикала $\mathcal{R}_{cq}$. Ясно, что $\mathcal{R}_{cq}$ равномерен.

3.2. Гипокомпактный радикал. Обозначим через $\mathcal{C}(A)$ множество всех компактных элементов нормированной алгебры A . Это замкнутый полугрупповой идеал в A , так что $\text{span } \mathcal{C}(A)$ — идеал в A .

Лемма 3.4. Если $f: A \rightarrow B$ — непрерывный открытый эпиморфизм нормированных алгебр, то $f(\mathcal{C}(A)) \subset \mathcal{C}(B)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{C}(A)$. Так как $fW_a = W_{f(a)}f$ и $f(A_\odot)$ содержит открытый шар пространства B , то $W_{f(a)}$ компактен в B . $\square$

Лемма 3.5. Пусть J — идеал в A . Если $\mathcal{C}(J) \neq 0$, то $J \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$W_{ba} = L_b W_a R_b = R_a W_b L_a \quad (3.2)$$

для всех $a, b \in A$. Если $a \in \mathcal{C}(J)$, то при любом $b \in J$ оператор W_{ba} компактен в A . Поэтому $J\mathcal{C}(J) \subset J \cap \mathcal{C}(A)$ и все доказано, если $J\mathcal{C}(J) \neq 0$. С другой стороны, если $J\mathcal{C}(J) = 0$, то $\mathcal{C}(J) \subset \mathcal{C}(A)$, поскольку $W_a(x) = (ax)a = 0$ для всех $a \in \mathcal{C}(J)$ и $x \in A$. $\square$

Следующий результат легко следует из (3.2).

Лемма 3.6. Замкнутый идеал, порожденный компактным элементом нормированной алгебры A , состоит из совместно компактных элементов в A .

Нормированная алгебра A называется *гипокомпактной*, если любой ее ненулевой фактор A/J содержит ненулевой компактный элемент, и *бикокомпактной*, если A состоит из совместно компактных элементов в A . Эти понятия распространим на идеалы и подалгебры, рассматривая их как нормированные алгебры. Из определения вытекает, что замыкания гипокомпактных подалгебр и факторы гипокомпактных алгебр гипокомпактны.

Лемма 3.7. Любой, даже односторонний, ненулевой идеал гипокомпактной алгебры содержит ненулевой компактный элемент этой алгебры.

Доказательство. Пусть A гипокомпактна и J — ее ненулевой левый идеал. Пусть $I = \{a \in A : aJ = 0\}$. Тогда I — замкнутый идеал в A . Если $I = A$, то всякий элемент из J — компактный элемент в A . Если $I \neq A$, то A/I имеет

ненулевой компактный элемент b . Выберем $a \in A$, такой, что $q_I(a) = b$. Очевидно, найдется $x \in J$, такой, что $ax \neq 0$. Докажем, что элемент ax компактен в A .

Действительно, $W_{ax} = R_x W_a L_x$. Так как $R_x(I) = 0$, определим оператор $V: A/I \rightarrow A$, полагая $V(q_I(y)) = yx$ для любого $y \in A$. Тогда нетрудно видеть, что $\|V\| \leq \|R_x\|$ и $R_x = Vq_I$. Поскольку оператор $q_I W_a = W_b q_I$ компактен, оператор $W_{ax} = Vq_I W_a L_x$ компактен в A . $\square$

Ясно, что всякая бикомпактная алгебра гипокомпактна. Мы установим в следующем предложении, что все гипокомпактные алгебры могут быть получены последовательным расширением бикомпактных.

Предложение 3.8. Пусть J — идеал в нормированной алгебре A . Следующие условия эквивалентны:

- (i) J гипокомпактен;
- (ii) для всякого непрерывного открытого эпиморфизма $f: A \rightarrow B$ либо $f(J) = 0$, либо $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$;
- (iii) существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ идеалов в A , такая, что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$, все J_α замкнуты в J и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактны.

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Пусть $I = \ker f$ и $K = I \cap \overline{J}$. Тогда алгебра $\overline{J}$ и ее фактор $\overline{J}/K$ — гипокомпактные алгебры, в то время как $q_K(J)$ — одновременно идеал в A/K и $\overline{J}/K$. Предположим, что $f(J) \neq 0$. Тогда $q_K(J) \neq 0$ и $q_K(J) \cap \mathcal{C}(\overline{J}/K)$ отлично от нуля по лемме 3.7. Так как это множество содержится в $\mathcal{C}(q_K(J))$, то по лемме 3.5 найдется ненулевой элемент $a \in q_K(J) \cap \mathcal{C}(A/K)$. Определим отображение $g: A/K \rightarrow B$ условием $g(q_K(b)) = f(b)$ для любого $b \in A$. Ясно, что g — непрерывный открытый эпиморфизм. Выберем такой элемент $b \in J$, что $a = q_K(b)$. Тогда $f(b) = g(a)$ — ненулевой компактный элемент алгебры B по лемме 3.4.

(ii) $\implies$ (iii). Рассмотрим все возрастающие трансфинитные цепочки $(J_\alpha)_{\alpha \leq \beta}$ идеалов в A , такие, что $J_\alpha \subset J$ и J_α замкнут в J , $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикомпактен и отличен от нуля для любого $\alpha < \beta$. Такие цепочки образуют множество (а не класс), поскольку A — множество. Упорядочим его условием

$$(J_\alpha)_{\alpha \leq \beta_1} \prec (I_\alpha)_{\alpha \leq \beta_2}, \text{ если } \beta_1 \leq \beta_2 \text{ и } J_\alpha = I_\alpha \text{ при } \alpha \leq \beta_1.$$

По лемме Цорна в этом множестве есть максимальный элемент $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$. Пусть $K = \overline{J}_\gamma$. Если $J_\gamma \neq J$, то $K \neq \overline{J}$ и фактор J/J_γ изометрически изоморфен $q_K(J)$. Полагая $B = A/K$ и $f = q_K$, из (ii) выводим, что $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$. По лемме 3.6 существует ненулевой замкнутый бикомпактный идеал I в B , порожденный элементом из $f(J)$.

Положим $J_{\gamma+1} = \{x \in J : f(x) \in I\}$. Тогда легко видеть, что $J_{\gamma+1} \neq J_\gamma$, $J_{\gamma+1}$ — идеал в A , замкнутый в J , и $J_{\gamma+1}/J_\gamma$ бикомпактен. Следовательно, к цепочке можно добавить $J_{\gamma+1}$, вопреки предположению максимальности.

(iii) $\implies$ (i). Пусть I — собственный замкнутый идеал в J . Возьмем первый ординал α , при котором J_α не лежит в I . Тогда $0 \neq q_I(J_\alpha) \subset \mathcal{C}(J/I)$. $\square$

Следствие 3.9. Пусть A — нормированная алгебра. Следующие условия эквивалентны:

- (i) A гипокомпактна;
- (ii) все идеалы и факторы алгебры A гипокомпактны;

(iii) J и A/J гипокомпактны для некоторого замкнутого идеала J в A .

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Мы уже знаем, что фактор гипокомпактной алгебры гипокомпактен. Пусть теперь алгебра A гипокомпактна и J — ее идеал. Пусть $f: A \rightarrow B$ — непрерывный открытый эпиморфизм и $I = \ker f$. Считая, что $f(J) \neq 0$, получим, что $q_I(J) \neq 0$. По лемме 3.7 найдется такой $a \in J$, что $0 \neq q_I(a) \in \mathcal{C}(A/I)$. По лемме 3.4 $f(a)$ — ненулевой компактный элемент алгебры B . Согласно предложению 3.8, J гипокомпактен.

(ii) $\implies$ (iii) очевидно.

(iii) $\implies$ (i). Пусть I — собственный замкнутый идеал в A . Если $J \subset I$, то A/I можно отождествить с алгеброй $(A/J)/(I/J)$, являющейся фактором гипокомпактной алгебры. По определению она содержит компактный элемент.

Пусть теперь I не содержит J . Полагая $K = J \cap I$, имеем $\mathcal{C}(J/K) \neq 0$. По лемме 3.5 $J/K \cap \mathcal{C}(A/K) \neq 0$. Пусть $0 \neq q_K(a) \in J/K \cap \mathcal{C}(A/K)$. Тогда $a \notin I$ и $q_I(a) \in \mathcal{C}(A/I)$ по лемме 3.4. Таким образом, A/I содержит ненулевые компактные элементы. $\square$

Следствие 3.10. В любой нормированной алгебре есть наибольший гипокомпактный идеал.

Доказательство. Пусть J — замкнутая линейная оболочка объединения всех гипокомпактных идеалов алгебры A . Докажем, что идеал J гипокомпактен.

Согласно предложению 3.8, достаточно показать, что если $f: A \rightarrow B$ — непрерывный открытый эпиморфизм, причем $f(J) \neq 0$, то $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$. Но если $f(J) \cap \mathcal{C}(B) = 0$, то $f(I) = 0$ для любого гипокомпактного идеала I алгебры A . Следовательно, $f(J) = 0$, противоречие. $\square$

Обозначим наибольший гипокомпактный идеал алгебры A через $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$.

Лемма 3.11. Если J — идеал в A , то $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J) = J \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$.

Доказательство. По следствию 3.9 идеал $J \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ алгебры J гипокомпактен и потому содержится в $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J)$. Требуется доказать обратное включение.

Пусть $I = \text{span}_J(A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1)$. Ясно, что I — идеал в A . Так как

$$\begin{aligned} \text{span}_J I^3 &\subset \text{span}_J((A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1 A^1) \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) (A^1 A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1)) \\ &\subset \text{span}_J(J \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) J) \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(J), \end{aligned}$$

то $\text{span}_J I^3$ — гипокомпактный идеал в J . Но алгебра $I/(\text{span}_J I^3)$ бикомпактна, поскольку $L_a R_b = 0$ для любых $a, b \in I/(\text{span}_J I^3)$. По следствию 3.9 идеал I гипокомпактен. Следовательно, $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J) \subset I \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$. $\square$

Лемма 3.12. Алгебра $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ не имеет ненулевых гипокомпактных идеалов и компактных элементов.

Доказательство. Если J — гипокомпактный идеал алгебры $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$, то по следствию 3.9 его прообраз $\{x \in A : q_{\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)}(x) \in J\}$ — гипокомпактный идеал в A , строго содержащий $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$, противоречие.

По лемме 3.6, если $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ имеет ненулевые компактные элементы, то у нее есть ненулевые бикомпактные идеалы, что невозможно. $\square$

Теорема 3.13. Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ является НТР.

Доказательство. (R2) и (R5) доказаны в леммах 3.12 и 3.11; докажем (R1).

Пусть $f: A \rightarrow B$ — непрерывный открытый эпиморфизм. Обозначим для краткости $q\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$ через q . Ясно, что qof — непрерывный открытый эпиморфизм алгебры A на $B/\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$. Так как идеал $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ гипокомпактен, то по предложению 3.8 его образ $(qof)(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A))$ либо равен нулю, либо содержит ненулевой компактный элемент алгебры $B/\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$. Но последнее невозможно в силу леммы 3.12. Значит, $(qof)(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)) = 0$ и $f(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)) \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$. $\square$

Таким образом, *регулярный гипокомпактный радикал* $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$, получаемый регулярной процедурой, является НТР. Очевидно, что $\mathcal{R}_{\text{hc}} \leq \mathcal{R}_{\text{hc}}^r$.

3.3. Радикал $\text{Rad}^r \wedge \mathcal{R}_{\text{hc}}$. Для дальнейшего важна связь между радикалами $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r$ и $\mathcal{R}_{\text{cq}}$.

Теорема 3.14. *Радикал $\text{Rad}^r \wedge \mathcal{R}_{\text{hc}}$ является наследственным, сопоставляет каждой алгебре A идеал $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \cap \text{Rad}^r(A)$ и удовлетворяет неравенствам $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r \leq \mathcal{R}_{\text{cq}} \leq \text{Rad}^r$.*

Доказательство. Так как радикалы $\mathcal{R}_{\text{hc}}$ и Rad^r наследственны, то $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r$ — наследственный радикал и сопоставляет каждой алгебре A замкнутый идеал $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \cap \text{Rad}^r(A)$ по лемме 3.2.

Докажем сначала, что каждая Rad^r -радикальная бикompактная алгебра A компактно квазинильпотентна. В самом деле, если $M \in \mathfrak{K}(A)$, то $r(M) = 0$, поскольку A состоит из квазинильпотентных элементов. Пусть $N = L_M R_M$. Тогда $r(N) = 0$ по лемме 2.1. Так как N — предкомпактное множество компактных операторов, то $\rho(N) = 0$ по (1.3) и $\rho(M) = 0$ по лемме 2.1.

Пусть A — произвольная алгебра и $J = \text{Rad}^r(A) \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$. Так как идеал J гипокомпактен, то по предложению 3.8 существует возрастающая трансфинитная цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ замкнутых идеалов в A , такая, что $J_0 = 0$, $J_\gamma = J$ и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикompактны. Из доказанного выше следует, что эти факторы $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ -радикальны. Тогда идеал J также $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ -радикален по лемме 3.1.

Из теоремы 3.3(d) вытекает, что замыкание компактно квазинильпотентного идеала алгебры в ее пополнении состоит из квазинильпотентных элементов и, следовательно, лежит в радикале Джекобсона пополнения. Отсюда вытекает неравенство $\mathcal{R}_{\text{cq}} \leq \text{Rad}^r$. $\square$

В частности, мы доказали, что на гипокомпактных алгебрах регулярный радикал Джекобсона совпадает с компактно квазинильпотентным радикалом.

§4. Основные BW-формулы

4.1. Смешанная BW-формула. Здесь мы докажем, что

$$\rho(M) = \max\{\rho^\chi(M), r(M)\} \quad (4.1)$$

для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$. Это равенство достаточно установить, считая, что A — банахова алгебра и что M порождает A . В самом деле, все входящие в (4.1) величины не меняются при замене алгебры ее пополнением. Кроме того, $\rho(M)$ и $r(M)$ не изменятся, если их вычислять в замкнутой подалгебре $\mathcal{A}(M)$, порожденной множеством M . Значение же $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$ при этом не может возрасти, так как операторы $L_M R_M$ сужаются на подпространство $\mathcal{A}(M)$, а нетривиальной частью формулы (4.1) является лишь неравенство $\leq$.

Полугруппа G элементов алгебры A называется *полугруппой Раджави* (или, коротко, *R-полугруппой*), если $\lambda a \in G$ для любых $a \in G$ и $\lambda \geq 0$. Пусть

$M \subset A$, $\mathcal{S}(M)$ — полугруппа, порожденная M , и $\mathcal{S}_+(M)$ — R -полугруппа, порожденная M . Ясно, что $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^n$ и $\mathcal{S}_+(M) = \mathbb{R}_+ \mathcal{S}(M)$, где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

Пусть N — множество операторов в банаховом пространстве и $G = \mathcal{S}(N)$. Оператор $T \in N^n$ называется *ведущим* (точнее, *n-ведущим*), если $\|T\| \geq \|S\|$ для всех $S \in \bigcup_{k < n} N^k$. Уточнение термина существенно, так как оператор может принадлежать разным N^n . Далее, *ведущая последовательность* в G — это последовательность $n(k)$ -ведущих операторов $T_k \in N^{n(k)}$, такая, что $n(k) \rightarrow \infty$ и $\|T_k\| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Если G неограничена, то очевидно, что хотя бы одна ведущая последовательность в G существует.

Лемма 4.1. Пусть N — предкомпактное множество операторов. Если $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ и полугруппа $\mathcal{S}(N)$ неограничена, то существует последовательность операторов единичной нормы $T_n \in \mathcal{S}_+(N)$, сходящаяся к компактному оператору T . Более того, можно выбрать в качестве такой последовательности любую сходящуюся подпоследовательность из $\{S_n/\|S_n\|\}$, где $\{S_n\}$ — произвольная ведущая последовательность в $\mathcal{S}(N)$.

Доказательство. Последовательность $\{S_n/\|S_n\|\}$ предкомпактна согласно [16, следствие 6.8(iii)]; пусть T — ее предельная точка. В силу неравенства $\rho_\chi(N) < 1$ последовательность $\{\|S_n\|_\chi\}$ ограничена, и тогда последовательность хаусдорфовых норм операторов $S_n/\|S_n\|$ стремится к нулю. Следовательно, T компактен. $\square$

Лемма 4.2. Пусть $A = \mathcal{A}(M)$, где M предкомпактно, и пусть $N = L_M R_M$. Если $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$ и полугруппа $\mathcal{S}(N)$ неограничена, то $\overline{\mathcal{S}_+(N)}$ содержит ненулевой компактный оператор T , такой, что

- (i) оператор $L_{Th}R_{Tg}$ компактен при любых $h, g \in A$;
- (ii) если $r(N) < 1$, то $T(A) \subset \text{Rad}(A)$.

Доказательство. Все элементы полугруппы $\mathcal{S}_+(N)$ можно записывать в виде $F = \lambda L_a R_b$, где $a, b \in \mathcal{S}(M)$ и $\lambda \geq 0$. Для краткости мы полагаем $F^{\rightleftharpoons} = \lambda L_b R_a$. В выборе $F^{\rightleftharpoons}$ может присутствовать неоднозначность, но, независимо от этого выбора, для любых $h, g \in M$ выполняется равенство $L_{Fh}R_{Fg} = FL_hR_gF^{\rightleftharpoons}$.

Пусть $\{S_n\}$ — ведущая последовательность в $\mathcal{S}(N)$. Для каждого ее элемента $S_n \in N^{m(n)}$ оператор $S_n^{\rightleftharpoons}$ тоже можно выбрать в $N^{m(n)}$, поэтому мы можем дополнительно предполагать, что

$$\|S_n\| \geq \|S_n^{\rightleftharpoons}\| \quad (4.2)$$

для всех n . По лемме 4.1 есть последовательность операторов $T_n = S_{k_n}/\|S_{k_n}\|$, стремящаяся к компактному оператору T . Все операторы $T_n^{\rightleftharpoons} = S_{k_n}^{\rightleftharpoons}/\|S_{k_n}\|$ являются сжимающими в силу (4.2). Отсюда следует, что последовательность $\{L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons}\}$ ограничена для фиксированных $h, g \in A$. В силу этого

$$L_{Th}R_{Tg} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{T_n h} R_{T_n g} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons} = \lim_{n \rightarrow \infty} T L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons}$$

и оператор $L_{Th}R_{Tg}$ как предел компактных операторов компактен. Следовательно, $T(A)$ состоит из совместно компактных элементов алгебры A .

Предположим, что $r(N) < 1$, и докажем, что при любых $u, v, x \in \mathcal{S}(M)$ элемент $u(Tx)v$ квазинильпотентен. По построению $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} S_{k_n}$, где

$$\lambda_{k_n} = \|S_{k_n}\|^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } S_{k_n} = L_{a_n} R_{b_n}$$

для некоторых $a_n, b_n \in M^{m(n)}$ и $m(n) \in \mathbb{N}$. Тогда $ua_nxb_nv \in \mathcal{S}(M)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и последовательность элементов $\lambda_{k_n}ua_nxb_nv$ стремится к компактному элементу $u(Tx)v$ алгебры A . Из [1, теорема 4.4] следует, что спектр элемента $u(Tx)v$ не более чем счетен; поэтому спектральный радиус непрерывен в $u(Tx)v$ согласно [10]. Поскольку $r(N) < 1$, множество $\{\rho(S) : S \in \mathcal{S}(N)\}$ ограничено, и тогда, учитывая, что $W_{ua_nxb_nv} \in \mathcal{S}(N)$, получим

$$\rho(u(Tx)v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} \rho(ua_nxb_nv) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} \rho(W_{ua_nxb_nv})^{1/2} = 0.$$

Таким образом, множество $\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)$ при любом $x \in \mathcal{S}(M)$ состоит из совместно компактных квазинильпотентных элементов алгебры A . Это же верно для его замыкания $\overline{\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)}$. Так как

$$Tx \in \overline{\mathcal{S}_+(N)\mathcal{S}(M)} = \overline{L_{\mathcal{S}_+(M)}R_{\mathcal{S}_+(M)}\mathcal{S}(M)} \subset \overline{\mathcal{S}_+(M)\mathcal{S}(M)\mathcal{S}_+(M)} \subset \overline{\mathcal{S}_+(M)},$$

то множество $\overline{\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)}$ является полугруппой. По лемме 2.4 его замкнутая линейная оболочка J состоит из квазинильпотентных элементов. Так как $A = \text{span } \mathcal{S}_+(M)$, то J — идеал $\overline{A(Tx)A}$ алгебры A и, таким образом, $A(Tx)A \subset \text{Rad}(A)$. В силу квазирегулярной характеристики радикала Джекобсона $A(Tx) \subset \text{Rad}(A)$, и по той же причине $Tx \in \text{Rad}(A)$. Учитывая, что $A = \text{span } \mathcal{S}(M)$, получим, что $T(A) \subset \text{Rad}(A)$. $\square$

Бикомпактные идеалы, состоящие из квазинильпотентных элементов, мы будем называть *qb-идеалами*.

Следствие 4.3. Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. Если $\max\{\rho^x(M), r(M)\} < \rho(M) = 1$ и полугруппа $\mathcal{S}(L_M R_M)$ неограничена, то $\mathcal{A}(M)$ имеет ненулевой qb-идеал.

Доказательство. Пусть T — компактный оператор, построенный в лемме 4.2. Тогда любой ненулевой элемент $Tx \in \mathcal{A}(M)$ порождает qb-идеал. $\square$

Лемма 4.4. Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. Если $\mathcal{A}(M)$ не имеет ненулевых qb-идеалов, то равенство (4.1) справедливо.

Доказательство. Предположим, что (4.1) не выполнено. Мы можем считать, что $\rho(M) = 1$. Пусть $N = L_M R_M$; тогда $\rho(N) = 1$ в силу леммы 2.1.

Если полугруппа $\mathcal{S}(N)$ ограничена, то $\max\{\rho_x(N), r(N)\} = 1$ согласно лемме 2.3. Если $\rho_x(N) = 1$, то $\rho^x(M) = 1$. Если же $\rho_x(N) < 1$, то $r(N) = 1$ и $r(M) = 1$ по лемме 2.1. В обоих случаях выполняется (4.1), что противоречит сделанному предположению. Таким образом, $\mathcal{S}(N)$ неограничена. По следствию 4.3 $\mathcal{A}(M)$ имеет ненулевой qb-идеал, что невозможно по условию леммы. $\square$

Теорема 4.5. Формула $\rho(M) = \max\{\rho^x(M), r(M)\}$ верна для любой нормированной алгебры A и любого $M \in \mathfrak{K}(A)$.

Доказательство. Как мы уже отмечали, можно считать, что $A = \mathcal{A}(M)$. Пусть $J = \text{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$. Так как в силу теоремы 3.14 $J \subset \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$, то $\rho(M) = \rho(M/J)$ по теореме 3.3. Далее, алгебра A/J не имеет ненулевых qb-идеалов. Действительно, пусть I — какой-нибудь qb-идеал в A/J . Тогда его прообраз U в

A содержится в $\text{Rad}(A)$ и $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$, поскольку радикалы устойчивы относительно расширений. Поэтому $U \subset J$, откуда $I = 0$.

Учитывая, что $A/J = \mathcal{A}(M/J)$, и применяя лемму 4.4, заключаем, что

$$\rho(M) = \rho(M/J) = \max\{\rho^x(M/J), r(M/J)\} \leq \max\{\rho^x(M), r(M)\}$$

в силу (2.5). Обратное неравенство очевидно. $\square$

4.2. Операторная BW-формула. Теперь мы можем доказать формулу (1.4).

Теорема 4.6. *Если множество $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ предкомпактно, то*

$$\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

Доказательство. По лемме 2.2 $\|L_M R_M\|_{\mathcal{X}} \leq 16\|M\|_{\mathcal{X}}\|M\|$. Заменяя M на M^n , извлекая корни n -й степени и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству $\rho^x(M)^2 = \rho_{\mathcal{X}}(L_M R_M) \leq \rho_{\mathcal{X}}(M)\rho(M)$. Применяя теорему 4.5, получим, что $\rho(M)^2 \leq \max\{\rho_{\mathcal{X}}(M)\rho(M), r(M)^2\}$, откуда в силу неравенства $r(M) \leq \rho(M)$ следует, что

$$\rho(M) \leq \max\{\rho_{\mathcal{X}}(M), r(M)\} \leq \max\{\rho_e(M), r(M)\}$$

согласно (2.3). Обратное неравенство очевидно. $\square$

4.3. Алгебраическая BW-формула. Наша следующая цель — доказать, что

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}}^r(A)), r(M)\} \quad (4.3)$$

для любой нормированной алгебры A и для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$. Нам будет удобнее доказывать (4.3) в более гибкой форме:

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\} \quad (4.4)$$

для любого замкнутого гипокompактного идеала J алгебры A . Снова достаточно показать справедливость этой формулы для банаховых алгебр, поскольку, как было отмечено ранее, значения радиусов в (4.4) не меняются при пополнении алгебр и замыкании идеала в пополнении, в то время как замыкание идеала гипокompактно.

Начнем со случая, когда идеал J алгебры A бикompактен.

Лемма 4.7. *Пусть J — замкнутый бикompактный идеал алгебры A и $M \in \mathfrak{K}(A)$. Тогда*

$$\rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/J)\rho(M). \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть $I = \text{span } J^2$. Докажем сначала неравенство

$$\|L_M R_M\|_e \leq 3\|M/I\| \|M\|. \quad (4.6)$$

Пусть $a, b \in M$, $\varepsilon > 0$ и $u, v \in I$ — такие, что $\max\{\|a - u\|, \|b - v\|\} < \|M/I\| + \varepsilon$. В частности, $\|u\| < \|a\| + \|a - u\| \leq \|M\| + \|M/I\| + \varepsilon \leq 2\|M\| + \varepsilon$. Так как J — бикompактный идеал в A , то I состоит из совместно компактных элементов алгебры A . Тогда оператор $L_u R_v$ компактен в A и

$$\begin{aligned} \|L_a R_b\|_e &\leq \|L_a R_b - L_u R_v\| = \|L_{a-u} R_b + L_u R_{b-v}\| \leq \|a - u\| \|b\| + \|u\| \|b - v\| \\ &\leq (\|M/I\| + \varepsilon) \|M\| + (2\|M\| + \varepsilon)(\|M/I\| + \varepsilon) \leq (\|M/I\| + \varepsilon)(3\|M\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю и беря точную верхнюю грань по всем $a, b \in M$, получим (4.6).

Заменяя M в (4.6) на M^n , извлекая корни n -й степени и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $\rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/I)\rho(M)$. Теперь, чтобы получить (4.5), заметим, что J/I — нильпотентный идеал в A/I , откуда вытекает, что $J/I \in \mathcal{R}_{\text{сж}}(A/I)$ и $\rho(M/J) = \rho(M/I)$ в силу теоремы 3.3. $\square$

Следствие 4.8. Равенство (4.4) выполнено для любого замкнутого бикомпактного идеала J и любого $M \in \mathfrak{K}(A)$.

Доказательство. Так как $\rho^\chi(M)^2 = \rho_\chi(L_M R_M) \leq \rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/J)\rho(M)$, согласно (4.5), то, применяя теорему 4.5 и неравенство $r(M) \leq \rho(M)$, получим

$$\rho(M)^2 = \max\{\rho^\chi(M)^2, r(M)^2\} \leq \max\{\rho(M/J)\rho(M), r(M)\rho(M)\},$$

что немедленно влечет за собой равенство (4.4). $\square$

Лемма 4.9. Пусть $I \subset K$ — замкнутые идеалы алгебры A и $M \in \mathfrak{K}(A)$. Если алгебра K/I бикомпактна и равенство (4.4) выполнено при $J = I$, то оно выполнено и при $J = K$.

Доказательство. Изоморфизм $A/K \rightarrow (A/I)/(K/I)$ обеспечивает равенство $\rho(M/K) = \rho((M/I)/(K/I))$, что, в свою очередь, дает оценку

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \max\{\rho(M/I), r(M)\} = \max\{\max\{\rho((M/I)/(K/I)), r(M/I)\}, r(M)\} \\ &\leq \max\{\rho(M/K), r(M)\}. \end{aligned}$$

Обратное неравенство очевидно. $\square$

Лемма 4.10. Если $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$, где (J_α) — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры A , то для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$

$$\|M/J\| = \lim_\alpha \|M/J_\alpha\| = \inf_\alpha \|M/J_\alpha\|, \quad (4.7)$$

$$\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha). \quad (4.8)$$

Доказательство. Для любого α выполняется неравенство $\|M/J\| \leq \|M/J_\alpha\|$, откуда следует, что

$$\rho(M/J) = \inf_n \|M^n/J\|^{1/n} \leq \inf_\alpha \inf_n \|M^n/J_\alpha\|^{1/n} = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha)$$

и, кроме того, $\|M/J\| \leq \inf_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \liminf_\alpha \|M/J_\alpha\|$. С другой стороны, легко проверить, что для любых $a \in M$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha = \alpha(a, \varepsilon)$, что

$$\|a/J_\alpha\| \leq \|a/J\| + \varepsilon \leq \|M/J\| + \varepsilon. \quad (4.9)$$

Выберем в M конечную ε -сеть N ; так как для любого $c \in A$ из $\beta > \alpha$ следует неравенство $\|c/J_\beta\| \leq \|c/J_\alpha\|$, то, выбирая $\gamma \geq \max\{\alpha(a, \varepsilon) : a \in N\}$, получим в силу (4.9), что $\text{dist}(b/J_\gamma, N/J_\gamma) \leq \text{dist}(b, N) \leq \varepsilon$ для каждого $b \in M$ и потому $\|M/J_\gamma\| \leq \|N/J_\gamma\| + \varepsilon \leq \|M/J\| + 2\varepsilon$. Следовательно,

$$\inf_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \|M/J\|, \quad (4.10)$$

откуда вытекает (4.7). Выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что $\|M^n/J\|^{1/n} \leq \rho(M/J) + \varepsilon$. Тогда в силу неравенства (4.10), примененного к M^n ,

$$\inf_\alpha \rho(M/J_\alpha) \leq \limsup_\alpha \rho(M/J_\alpha) \leq \limsup_\alpha \|M^n/J_\alpha\|^{1/n} \leq \|M^n/J\|^{1/n} \leq \rho(M/J) + \varepsilon.$$

Это доказывает справедливость равенства (4.8). $\square$

Теперь мы докажем формулу (4.4) и, тем самым, формулу (4.3).

Теорема 4.11. *Формула $\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\}$ справедлива для любого замкнутого гипокompактного идеала J и любого $M \in \mathfrak{K}(A)$.*

Доказательство. Найдется возрастающая трансфинитная цепочка $\{J_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}$ замкнутых идеалов в A , такая, что $J_0 = 0$, $J_\beta = J$ и все $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ бикompактны. Если есть ординалы α , для которых (4.4) при $J = J_\alpha$ неверно, то пусть γ — наименьший из них. Он не является предельным в силу леммы 4.10 и не имеет предыдущего в силу леммы 4.9. Значит, (4.4) выполнено для всех α . $\square$

Из теоремы Вала [22] следует, что $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ — бикompактный идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Пусть $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$ — идеал всех слабо компактных операторов в $\mathcal{X}$. Как известно (см. [4, следствие 6.8.13]), для широкого класса банаховых пространств $\mathcal{X}$, включающего все пространства L^1 суммируемых функций, произведение двух операторов из $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$ компактно, так что факторалгебра $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ имеет тривиальное умножение, а значит, бикompактна. Поэтому для таких $\mathcal{X}$ идеал $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$ гипокompактен и потому содержится в $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Таким образом, идеал $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ может строго включать $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

§5. Дальнейшее усиление алгебраической BW-формулы

5.1. В поисках идеала. Формулы типа (4.4) тем полезнее, чем больше входящий в них идеал J . При $J = A$ такая формула означает, что в алгебре A величины $\rho(M)$ и $r(M)$ совпадают на $\mathfrak{K}(A)$, а при $J = 0$ равенство (4.4) тривиально. Поэтому естественно ставить задачу об отыскании (или хотя бы о существовании) наибольшего идеала с таким свойством. Обозначим через $BW(A)$ совокупность всех замкнутых идеалов $J \subset A$, для которых равенство (4.4) верно для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$; такие идеалы будем называть *BW-идеалами*. Удобно выделить следующий результат, который легко доказывается.

Лемма 5.1. *Пусть $I \subset J$ — замкнутые идеалы в A . Если $J \in BW(A)$, то $I \in BW(A)$.*

Следующий результат доказывается аналогично лемме 4.9.

Лемма 5.2. *Пусть $I \subset J$ — замкнутые идеалы в A . Если $I \in BW(A)$ и $J/I \in BW(A/I)$, то $J \in BW(A)$.*

Лемма 5.3. *Если $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$, где (J_α) — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры A , и $J_\alpha \in BW(A)$ для всех α , то $J \in BW(A)$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. Можно считать, что $r(M) < \rho(M)$ (в противном случае равенство (4.4) очевидно). Следовательно, из $J_\alpha \in BW(A)$ вытекает, что $\rho(M/J_\alpha) = \rho(M)$ для всех α . Применяя лемму 4.10, получаем, что $\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \rho(M)$. $\square$

Применяя леммы 5.2 и 5.3, получаем по индукции следующий результат:

Следствие 5.4. *Если возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ алгебры A такова, что $J_0 = 0$ и $J_{\alpha+1}/J_\alpha \in BW(A/J_\alpha)$ для всех $\alpha < \gamma$, то $J_\gamma \in BW(A)$.*

По теореме 4.11 все замкнутые гипокompактные идеалы являются BW-идеалами. Докажем, что в $BW(A)$ попадают также все замкнутые коммутативные идеалы. На деле для них равенство (4.4) принимает более сильную форму. Напомним, что $r_1(M)$ определяется (см. (1.2)) как $\sup\{\rho(a) : a \in M\}$.

Лемма 5.5. Если J — замкнутый центральный идеал в A и $M \in \mathfrak{K}(A)$, то

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r_1(L_M|J)\} = \max\{\rho(M/J), r_1(M)\}. \quad (5.1)$$

Доказательство. Семейство операторов L_M действует на нормированном пространстве A и оставляет инвариантным замкнутое подпространство J . По лемме 4.2 из [16] (которую легко адаптировать к неполным пространствам)

$$\rho(L_M) = \max\{\rho(L_M|J), \rho(L_M|(A/J))\},$$

где $L_M|J$ — сужение семейства L_M на J и $L_M|(A/J)$ — семейство, индуцированное в факторе A/J . Ясно, что $L_M|(A/J) = L_{M/J}$, и тогда $\rho(L_M|(A/J)) = \rho(M/J)$. На подпространстве J операторы умножения коммутируют: $L_a L_b x = abx = bxa = bax = L_b L_a x$. Тогда $\rho(L_M|J) = r_1(L_M|J)$ по [17, лемма 2.8]. Остается учесть, что $r_1(L_M|J) \leq r_1(L_M) = r_1(M)$ и $\rho(M) = \rho(L_M)$. $\square$

Алгебра A называется *полупримарной*, если она не имеет нильпотентных идеалов. Эквивалентное условие: из равенства $aAa = 0$ следует, что $a = 0$.

Лемма 5.6. Если алгебра A полупримарна, то любой ее коммутативный идеал J централен. Как следствие, среди всех ее коммутативных идеалов есть наибольший.

Доказательство. Пусть $x, y \in J$, $a \in A$. Тогда $x[a, y] = xay - xya = yxa - yxa = 0$. Взяв $x = [a, y]b$, где $b \in A$, получим $[a, y]A[a, y] = 0$, откуда $[a, y] = 0$. Это означает, что J централен. $\square$

Будем говорить, что подмножество $K \subset A$ коммутативно по модулю идеала J , если $ab - ba \in J$ для любых $a, b \in K$.

Теорема 5.7. (i) Любая нормированная алгебра имеет наибольший идеал $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$, коммутативный по модулю $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$.

(ii) Если замкнутый идеал J нормированной алгебры A коммутативен по модулю $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$, то равенство (5.1) выполнено для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$.

Доказательство. Так как любой нильпотентный идеал компактно квазинильпотентен, то алгебра $B = A/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ полупримарна. По лемме 5.6 она имеет наибольший коммутативный идеал $I(B)$; его прообраз $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ в A — наибольший идеал, коммутативный по модулю $R_{\text{cq}}(A)$.

Утверждение (ii) достаточно доказать для $J = \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$. Используя центральность идеала $I(B)$ и лемму 5.5, имеем

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \rho(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)) = \max\{\rho_{I(B)}(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)), r_1(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A))\} \\ &= \max\{\rho(M/J), r_1(M)\}, \end{aligned}$$

где $\rho_{I(B)}(N)$ обозначает $\rho(N/I(B))$ для любого $N \in \mathfrak{K}(B)$. $\square$

Для банаховых алгебр справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5.8. Для того чтобы в банаховой алгебре A выполнялось условие

$$\rho(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M\} \quad \text{для всех } M \in \mathfrak{K}(A), \quad (5.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы она была коммутативной по модулю $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 5.7.

Пусть выполнено (5.2). Для любых $a, b \in A$ положим $(\text{ad } b)a = [a, b]$. Тогда при любом $\lambda \neq 0$ отображение $\exp(\lambda(\text{ad } b))$ является автоморфизмом алгебры

A , и потому $\rho(\exp(\lambda(\operatorname{ad} b))a) = \rho(a)$. Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. Из формулы (5.2), примененной к множеству $N = M \cup \{\lambda^{-1}a, \lambda^{-1} \exp(\lambda(\operatorname{ad} b))a\}$, получаем, что

$$\rho(N) = \max\{\rho(a)/|\lambda|, r_1(M)\}.$$

Обозначим правую часть этого равенства через $C(\lambda)$. Поскольку элемент $\frac{1}{2}(\exp(\lambda(\operatorname{ad} b))a - a)/\lambda$ принадлежит абсолютно выпуклой оболочке $\operatorname{abs}(N)$ множества N и $\rho(\operatorname{abs}(N)) = \rho(N)$ (см. [16, предложение 2.6]), получим, что

$$\rho(\{(\exp(\lambda(\operatorname{ad} b))a - a)/\lambda\} \cup M) \leq C(\lambda).$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ верхний предел функции $f(\lambda) = \rho(\{\frac{1}{2}(\exp(\lambda(\operatorname{ad} b))a - a)/\lambda\} \cup M)$ не превосходит числа $r_1(M)$. Будучи субгармонической (см. [16, теорема 3.5]), эта функция постоянна и везде не превосходит $r_1(M)$. В частности,

$$f(0) = \rho(\{[a, b]/2\} \cup M) \leq r_1(M) \leq \rho(M).$$

Так как M произвольно, это означает, что $[a, b] \in \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ (см. теорему 3.3(b)). Следовательно, A коммутативна по модулю идеала $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$. $\square$

Таким образом, $BW(A)$ содержит все замкнутые идеалы, которые получаются из бикомпактных, коммутативных и компактно квазинильпотентных с помощью последовательного применения операции расширения.

По лемме 5.3 всякая цепочка BW -идеалов имеет мажоранту, являющуюся BW -идеалом. Следовательно, по лемме Цорна в любой нормированной алгебре A есть максимальные BW -идеалы, и факторалгебра по любому из этих идеалов не имеет BW -идеалов по лемме 5.2. Неизвестно, однако, существует ли наибольший BW -идеал. Эквивалентный вопрос: является ли замыкание суммы BW -идеалов BW -идеалом? Мы увидим, что ответы на эти вопросы станут утвердительными, если вместо идеалов рассматривать радикалы.

5.2. От идеалов к радикалам. Скажем, что $\text{ТР } P$ является BW -радикалом, если все замкнутые P -радикальные идеалы являются BW -идеалами.

Теорема 5.9. *Существует наибольший BW -радикал $\mathcal{R}_{\text{bw}}$; всякий ТР , не превосходящий $\mathcal{R}_{\text{bw}}$, является BW -радикалом.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{R}_{\text{bw}}$ точную верхнюю грань семейства всех BW -радикалов (см. лемму 3.2); требуется доказать, что $\mathcal{R}_{\text{bw}}(A)$ является BW -идеалом для любой нормированной алгебры A .

По лемме 3.2 существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$, такая, что $J_1 = 0$, $J_\gamma = \mathcal{R}_{\text{bw}}(A)$ и каждый фактор $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ является P -радикальным для некоторого BW -радикала P . Значит, $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ является BW -идеалом в A/J_α . По следствию 5.4 $\mathcal{R}_{\text{bw}}(A)$ есть BW -идеал.

Если P есть ТР и $P \leq \mathcal{R}_{\text{bw}}$, то P является BW -радикалом в силу леммы 5.1. $\square$

Согласно теореме 5.9, $\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{\text{bw}}(A)), r(M)\}$ для любого $M \in \mathfrak{K}(A)$ и любой алгебры A . В частности, справедлив такой результат.

Следствие 5.10. $\mathcal{R}_{\text{bw}}(A) \cap \operatorname{Rad}^r(A) \subset \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ для любой алгебры A .

В силу (4.3) регулярный гипокомпактный радикал $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$ является BW -радикалом. Покажем, что отображение $A \mapsto \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ — также BW -радикал.

Лемма 5.11. $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A) = \{x \in A : x[a, b] \in \mathcal{R}_{\text{cq}}(A) \text{ для всех } a, b \in A\}$.

Доказательство. Пусть $P(A)$ — правая часть доказываемого равенства. Легко видеть, что $P(A)$ — идеал в A . Если $x \in P(A)$, $a, b \in A$, то $[x, a]b[x, a] \in \mathcal{R}_{cq}(A)$ (поскольку $[x, a]b \in P(A)$), т. е. образ элемента $[x, a]$ в $A/\mathcal{R}_{cq}(A)$ порождает нильпотентный идеал. Так как $A/\mathcal{R}_{cq}(A)$ полупримарна, то этот образ равен нулю, и тогда x централен по модулю $\mathcal{R}_{cq}(A)$. Следовательно, $P(A) \subset \mathcal{R}_{cq}^a(A)$.

Обратно, пусть $x \in \mathcal{R}_{cq}^a(A)$. Так как x централен по модулю $\mathcal{R}_{cq}(A)$, то $x[a, b] = [xa, b] - [x, b]a \in \mathcal{R}_{cq}(A)$ для любых $a, b \in A$, откуда $\mathcal{R}_{cq}^a(A) \subset P(A)$. $\square$

Из этой леммы и теоремы 3.3(d) сразу вытекает

Следствие 5.12. $\mathcal{R}_{cq}^a(B) = B \cap \mathcal{R}_{cq}^a(A)$ для любой плотной подалгебры B нормированной алгебры A .

Теорема 5.13. *Отображение $A \mapsto \mathcal{R}_{cq}^a(A)$ — наследственный топологический радикал.*

Доказательство. Мы должны проверить условия (R1), (R2) и (R5) для $\mathcal{R}_{cq}^a$, причем достаточно это сделать для банаховых алгебр. В самом деле, если показать, что $\mathcal{R}_{cq}^a$ есть НТР в классе банаховых алгебр, то его регулярное расширение $\mathcal{R}_{cq}^{ar}$ является НТР в силу [18, теорема 2.21]. Но $\mathcal{R}_{cq}^a = \mathcal{R}_{cq}^{ar}$ по следствию 5.12.

Если $f: A \rightarrow B$ — непрерывный эпиморфизм банаховых алгебр, то, полагая $J = f(\mathcal{R}_{cq}^a(A))$, получим $[J, J] \subset f([\mathcal{R}_{cq}^a(A), \mathcal{R}_{cq}^a(A)]) \subset f(\mathcal{R}_{cq}(A)) \subset \mathcal{R}_{cq}(B)$, т. е. идеал J коммутативен по модулю $\mathcal{R}_{cq}(B)$. Значит, $f(\mathcal{R}_{cq}^a(A)) \subset \mathcal{R}_{cq}^a(B)$, т. е. выполнено условие (R1).

Пусть $I = \mathcal{R}_{cq}^a(A)$, $B = A/I$, $K = \{x \in A : q_I(x) \in \mathcal{R}_{cq}^a(B)\}$; требуется доказать, что $K \subset I$. Ясно, что (5.1) справедливо при $J = I$ и выполнено в алгебре B при $J = K/I$. Рассуждая, как в лемме 5.2 (т. е. как в лемме 4.9), получаем, что оно выполнено при $J = K$, откуда следует, что $\rho(M) = r_1(M)$ при $M \in \mathfrak{K}(K)$. По теореме 5.8 идеал K коммутативен по модулю $\mathcal{R}_{cq}(K) = K \cap \mathcal{R}_{cq}(A)$, а значит, и по модулю $\mathcal{R}_{cq}(A)$, т. е. $K \subset \mathcal{R}_{cq}^a(A) = I$. Условие (R2) доказано.

Пусть I — замкнутый идеал банаховой алгебры A . Из леммы 5.11 следует, что $\mathcal{R}_{cq}^a(I)$ инвариантен относительно непрерывных автоморфизмов алгебры I , а потому и относительно ее ограниченных дифференцирований (поскольку они — генераторы групп автоморфизмов). Следовательно, если $x \in \mathcal{R}_{cq}^a(I)$, $a \in A$, то $[a, x] \in \mathcal{R}_{cq}^a(I)$. С другой стороны, из леммы 5.11 (и того, что $\mathcal{R}_{cq}(I)$ — идеал в A) следует, что $ax[v, w] \in \mathcal{R}_{cq}(I)$ для любых $v, w \in I$; поэтому $ax \in \mathcal{R}_{cq}^a(I)$. Отсюда $xa \in \mathcal{R}_{cq}^a(I)$. Мы доказали, что $\mathcal{R}_{cq}^a(I)$ — идеал в A .

Так как $\mathcal{R}_{cq}(I) \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$ и идеал $\mathcal{R}_{cq}^a(I)$ коммутативен по модулю $\mathcal{R}_{cq}(I)$, то он коммутативен и по модулю $\mathcal{R}_{cq}(A)$, а значит, содержится в $\mathcal{R}_{cq}^a(A)$. Таким образом, $\mathcal{R}_{cq}^a(I) \subset I \cap \mathcal{R}_{cq}^a(A)$. С другой стороны, если $x \in I \cap \mathcal{R}_{cq}^a(A)$, то для любых $a, b \in I$, согласно лемме 5.11, $x[a, b] \subset I \cap \mathcal{R}_{cq}(A) = \mathcal{R}_{cq}(I)$ и, следовательно, $x \in \mathcal{R}_{cq}^a(I)$. Это доказывает включение $I \cap \mathcal{R}_{cq}^a(A) \subset \mathcal{R}_{cq}^a(I)$. Выполнение условия (R5) доказано. $\square$

Следствие 5.14. *Радикал $\mathcal{R}_{cq}^a$ равномерен и является BW-радикалом.*

Доказательство. Для равномерности достаточно показать в силу следствия 5.12, что любая замкнутая подалгебра $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ -радикальной банаховой алгебры $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ -радикальна. Но это очевидно в силу теоремы 5.8.

Далее, $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ является BW -радикалом согласно теоремам 5.7 и 5.13. $\square$

Обозначим радикал $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r \vee \mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ через $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$. Ясно, что он отличен от $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$ и $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ и что $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a} \leq \mathcal{R}_{\text{bw}}$. Следующий результат вытекает из теоремы 5.9.

Следствие 5.15. *Радикал $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ является BW -радикалом.*

Следствие 5.16. *Замыкание $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальной подалгебры является $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальным.*

Доказательство. Заметим, что доказываемым свойством обладают радикалы $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$ и $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$. Поэтому из леммы 3.2 следует, что замыкание B произвольной $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальной подалгебры обладает цепочкой замкнутых идеалов $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$, таких, что $J_0 = 0$, $J_\gamma = B$ и каждый фактор $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ либо $\mathcal{R}_{\text{hc}^r}$ -радикален, либо $\mathcal{R}_{\text{cq}^a}$ -радикален, а значит, $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикален. Тогда алгебра B является $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальной по лемме 3.1. $\square$

§6. Роль BW -формул в вопросе о непрерывности $ССР$

В [16, предложение 3.1] было показано, что $ССР$ — полунепрерывная сверху функция ограниченного подмножества нормированной алгебры. Это означает, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \leq \rho(M)$, если последовательность ограниченных подмножеств M_n стремится к M в смысле расстояния Хаусдорфа. Скажем, что $ССР$ непрерывен в $M \subset A$, если $\rho(M_n) \rightarrow \rho(M)$, когда M_n стремится к M .

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 6.1. *Пусть $M \subset A$ ограничено и J — замкнутый идеал в A . Если $\rho(M) = \rho(M/J)$ и $ССР$ непрерывен в M/J , то $ССР$ непрерывен в M .*

Хорошо известно, что оператор T — точка непрерывности спектрального радиуса (в обычном смысле), если $\rho_e(T) < \rho(T)$, а также что спектральный радиус непрерывен на коммутативных нормированных алгебрах. Мы получим сейчас аналогичные результаты для $ССР$.

Лемма 6.2. *Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. $ССР$ непрерывен в M , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- (i) $A = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $\rho_\chi(M) < \rho(M)$;
- (ii) существует замкнутый центральный идеал J алгебры A , такой, что $\rho(M/J) < \rho(M)$.

Доказательство. Пусть $M_n \rightarrow M$. Покажем, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \geq \rho(M)$.

(i) Допустим противное. Умножая на константу и заменяя последовательность $\{M_n\}$ ее подпоследовательностью, мы можем считать, что $\rho_\chi(M) < 1$ и $\lim \rho(M_n) < 1 < \rho(M)$. По теореме 4.6 $\rho(M) = r(M)$. Следовательно, $\sup\{\rho(T) : T \in M^k\} > 1$ при некотором k и найдется $T \in M^k$, такой, что $\rho(T) > 1$. Так как $\rho_\chi(M) < 1$, то $\|M^n\|_\chi < 1$ при достаточно больших n , и тогда $\|T^n\|_\chi \leq \|M^{nk}\|_\chi < 1$, откуда $\rho_\chi(T) \leq 1$. Поскольку $\rho_\chi(T) = \rho_e(T)$ (см. [7, следствие 6.4]), получим, что $\rho_e(T) < \rho(T)$. По условию найдутся такие $T_n \in M_n^k$, что $T_n \rightarrow T$ и, следовательно, $\rho(T_n) \rightarrow \rho(T)$ при $n \rightarrow \infty$. Но это невозможно, поскольку $\rho(T_n) \leq \rho(M_n^k) = \rho(M_n)^k$ и $\lim_n \rho(M_n)^k < 1$.

(ii) Согласно (5.1), $\rho(M) = r_1(L_M|J)$. Так как операторы левого умножения, суженные на J , образуют коммутативную алгебру и $L_{M_n}|J$ стремится к $L_M|J$, то из [17, лемма 2.7] вытекает, что $r_1(L_{M_n}|J) \rightarrow r_1(L_M|J)$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\rho(M_n) \geq r_1(L_{M_n}|J)$ для любого n , получим $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \geq \rho(M)$. $\square$

Теорема 6.3. Пусть $M \in \mathfrak{K}(A)$. Если $\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)) < \rho(M)$, то ССР непрерывен в M и $\rho(M) = \sup\{\rho(K) : K \subset M \text{ конечно}\}$.

Доказательство. По следствию 5.16 можно считать, что A — банахова алгебра. Согласно лемме 3.2, найдется цепочка $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ замкнутых идеалов, такая, что $J_0 = 0$, $J_\gamma = \mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$ и все факторы $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ либо гипокompактны, либо центральны по модулю компактно квазинильпотентного радикала. Расширяя, если необходимо, цепочку за счет цепочек, соответствующих этим факторам, мы можем считать, что все $J_{\alpha+1}/J_\alpha$ либо центральны, либо компактно квазинильпотентны, либо бикompактны (по предложению 3.8).

Найдем первый ординал β , для которого $\rho(M/J_\beta) < \rho(M)$. Тогда β не может быть предельным по лемме 4.10. Иными словами, существует ординал α , такой, что $\rho(M) = \rho(M/J_\alpha) > \rho(M/J_{\alpha+1})$. Пусть $M' = M/J_\alpha$ и $J = J_{\alpha+1}/J_\alpha$. Тогда J не является компактно квазинильпотентным по теореме 3.3. Если J централен, то ССР непрерывен в M' по лемме 6.2 и потому в M по лемме 6.1.

Остается рассмотреть случай, когда J бикompактен. Пусть $N = L_{M'}R_{M'}$. Тогда N — предкомпактное множество операторов. Так как

$$\rho_\chi(N) \leq \rho_e(N) \leq \rho(M'/J)\rho(M') < \rho(M')^2 = \rho(N)$$

в силу лемм 4.7 и 2.1, то ССР непрерывен в N по лемме 6.2. Пусть теперь последовательность ограниченных множеств M_n стремится к M . Положим $N_n = L_{M_n/J_\alpha}R_{M_n/J_\alpha}$. Тогда N_n стремится к N и

$$\rho(M_n)^2 \geq \rho(M_n/J_\alpha)^2 = \rho(N_n) \rightarrow \rho(N) = \rho(M)^2.$$

Следовательно, $\liminf \rho(M_n) \geq \rho(M)$ и ССР непрерывен в M . В качестве $\{M_n\}$ можно взять последовательность конечных подмножеств, стремящуюся к M . Поэтому $\rho(M) = \sup \rho(K)$, где K пробегает конечные подмножества в M . $\square$

Следствие 6.4. Если G — полугруппа квазинильпотентных элементов нормированной алгебры A и $G \subset \mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$, то алгебра $\text{span } G$ компактно квазинильпотентна.

Доказательство. Для каждого конечного подмножества N линейной оболочки полугруппы найдется конечное подмножество $M \subset G$, такое, что $N \subset \text{abs}(M)$. Так как $\rho(\text{abs}(M)) = \rho(M) = r(M) = 0$, то $\rho(N) = 0$. Поскольку $\text{span } G$ лежит в $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$, ССР непрерывен в M для любого $M \in \mathfrak{K}(\text{span } G)$ согласно теореме 6.3, откуда ясно, что алгебра $\text{span } G$ компактно квазинильпотентна. $\square$

Нам неизвестно, непрерывен ли ССР в $M \in \mathfrak{K}(A)$, если выполнено неравенство $\rho(M/\mathcal{R}_{\text{bw}}(A)) < \rho(M)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. C. Alexander, *Compact Banach algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **18** (1968), 1–18.
- [2] M. A. Berger, Y. Wang, *Bounded semigroups of matrices*, Linear Algebra Appl., **166** (1992), 21–27.

- [3] P. S. Guinand, *On quasinilpotent semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **86**:3 (1982), 485–486.
- [4] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, т. 1, ИЛ, М., 1962.
- [5] P. G. Dixon, *Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **74**:1 (1997), 174–200.
- [6] R. Jungers, *Joint Spectral Radius, Theory and Applications*, LNCIS, vol. 385, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [7] A. Lebow, M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness*, J. Funct. Anal., **7** (1971), 1–26.
- [8] В. И. Ломоносов, *Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным*, Функц. анализ и его прил., **7**:3 (1973), 55–56.
- [9] I. D. Morris, *The generalized Berger–Wang formula and the spectral radius of linear cocycles*, J. Funct. Anal., **262**:3 (2012), 811–824; <http://arxiv.org/abs/0906.2915v1>.
- [10] J. D. Newburgh, *The variation of spectra*, Duke Math. J., **18** (1951), 165–176.
- [11] J. R. Peters, W. R. Wogen, *Commutative radical operator algebras*, J. Operator Theory, **42**:2 (1999), 405–424.
- [12] G.-C. Rota, G. Strang, *A note on the joint spectral radius*, Indag. Math., **22** (1960), 379–381.
- [13] Ю. В. Туровский, *Спектральные свойства некоторых подалгебр Ли и спектральный радиус подмножеств в банаховых алгебрах*, в сб.: Спектральная теория операторов и ее приложения, т. 6, «Элм», Баку, 1985, 144–181.
- [14] Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, *Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые проблемы теории радикальных банаховых алгебр*, Функц. анализ и его прил., **35**:4 (2001), 88–91.
- [15] В. С. Шульман, *Об инвариантных подпространствах вольтерровых операторов*, Функц. анализ и его прил., **18**:2 (1984), 85–86.
- [16] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of W. Wojtyński*, J. Funct. Anal., **177**:2 (2000), 383–441.
- [17] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Formulae for joint spectral radii of sets of operators*, Studia Math., **149**:1 (2002), 23–37.
- [18] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence*, in: Topological Algebras, Their Applications and Related Topics, vol. 67, Banach Center publications, Warszawa, 2005, 293–333.
- [19] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Application of topological radicals to calculation of joint spectral radii*, <http://arxiv.org/abs/0805.0209>.
- [20] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators*, in: Elementary Operators and Their Applications, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 212, Birkhäuser, Basel, 2011, 45–114.
- [21] Yu. V. Turovskii, *Volterra semigroups have invariant subspaces*, J. Funct. Anal., **162**:2 (1999), 313–323.
- [22] K. Vala, *On compact sets of compact operators*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, **35**:1 (1964), 1–8.

Институт математики и механики
Национальной академии наук Азербайджана
e-mail: yuri.turovskii@gmail.com

Поступило в редакцию
20 ноября 2010 г.

Вологодский государственный технический университет
e-mail: shulman.victor80@gmail.com