Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, Об интегралах в инволюции групп линейных симплектических преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 26–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:28:38

УДК 517.913

Об интегралах в инволюции групп линейных симплектических преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом*

© 2000. С. Л. Зиглин

Введение

В работе продолжается исследование связи ветвления решений комплексных гамильтоновых систем с отсутствием у них дополнительных (т. е. образующих с гамильтонианом функционально независимую систему) первых интегралов [1]. Основное внимание уделяется многомерным системам (с $n > 2$ степенями свободы).

Рассмотрим комплексную гамильтонову систему с n степенями свободы с аналитическим гамильтонианом H . Пусть Γ — ее комплексная фазовая кривая, не являющаяся положением равновесия. Будем называть приведенной системой в вариациях (для исходной системы) вдоль фазовой кривой Γ ограничение системы в нормальных вариациях (той же системы) вдоль этой фазовой кривой на нулевую поверхность уровня ее первого интеграла dH (ср. [2]; см. также [1]).

Будем называть группой монодромии линейной системы в голоморфном векторном расслоении над римановой поверхностью в некоторой ее точке образ естественного антипредставления фундаментальной группы этой поверхности в этой точке в группу линейных преобразований слоя над этой точкой.

Нетрудно видеть [2], что группа монодромии G_0 приведенной системы в вариациях вдоль фазовой кривой Γ является подгруппой группы линейных симплектических преобразований $(2n - 2)$ -мерного комплексного линейного симплектического пространства.

Будем называть преобразование $g \in G_0$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^{-1}$ резонансным [2], если существуют целые числа $k_1, \dots, k_{n-1}$, $\sum k_i^2 \neq 0$, такие, что $\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_{n-1}^{k_{n-1}} = 1$.

Согласно теореме 2 из [2], если группа G_0 содержит нерезонансное преобразование и другое преобразование, не сохраняющее объединение собственных направлений первого, то исходная гамильтонова система не имеет n функционально независимых мероморфных первых интегралов. Этот факт позволяет доказать неинтегрируемость ряда комплексных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (см., например, [3]).

Как указано в [4], при $n > 2$ условие нерезонансности в некоторых случаях может оказаться трудным для проверки.

В настоящей работе указывается класс многомерных гамильтоновых систем, для которых можно получить необходимые условия полной интегрируемости,

*Работа выполнена по программе «Ведущие научные школы», грант РФФИ № 00-15-96146.

т. е. существования n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, в терминах группы монодромии системы в вариациях (или приведенной системы в вариациях), не содержащие многомерных условий нерезонансности. В качестве примера рассматриваются натуральные механические системы с однородным потенциалом [4, 5], в частности, задача n тел.

§1. Общая теория

Пусть (M^{2n}, ω^2) — связное комплексное симплектическое многообразие и H — аналитическая функция на M . Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x} = IdH(x), \quad x \in M. \quad (1.1)$$

Пусть Γ — комплексная фазовая кривая системы (1.1), не являющаяся положением равновесия, $x_0 \in \Gamma$ и G — группа монодромии системы в вариациях для (1.1) вдоль кривой Γ в точке x_0 , т. е. образ естественного антипредставления фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma, x_0)$ кривой Γ в точке x_0 в группу линейных симплектических преобразований касательного пространства $T_{x_0}M$. Предположим, что существуют двумерные линейные взаимно косоортгональные подпространства $L_1^2, \dots, L_n^2$ пространства $T_{x_0}M$, инвариантные относительно G . Положим $\{g|_{L_i} : g \in G\} = G_i$ ($i = 1, \dots, n$).

ТЕОРЕМА. *Если система (1.1) имеет n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, то при любом i группа G_i имеет (непостоянный) рациональный первый интеграл (т. е. рациональную инвариантную функцию).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что указанные первые интегралы существуют. Тогда, согласно лемме п. 1.2 из [2], существует n полиномов от n переменных с комплексными коэффициентами, таких, что при подстановке в них указанных первых интегралов младшие однородные части в точке x_0 получающихся мероморфных функций функционально независимы. (Младшей однородной (квазиоднородной) частью мероморфной функции в точке здесь называется отношение младших однородных (квазиоднородных) частей в этой точке числителя и знаменателя этой функции в ее представлении в виде отношения аналитических функций. Если точка не указывается, то подразумевается, что это начало координат). Очевидно, что эти младшие однородные части являются первыми интегралами группы G и находятся в инволюции. Таким образом, остается доказать следующую лемму.

Пусть (L^{2n}, ω^2) есть $2n$ -мерное комплексное линейное симплектическое пространство, G — подгруппа группы его линейных симплектических преобразований и $L_1^2, \dots, L_n^2$ — двумерные линейные взаимно косоортгональные подпространства пространства L , инвариантные относительно G . Положим, как и ранее, $\{g|_{L_i} : g \in G\} = G_i$ ($i = 1, \dots, n$).

ЛЕММА. *Если группа G имеет n функционально независимых рациональных первых интегралов в инволюции, то при любом i группа G_i имеет рациональный первый интеграл.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (e_i, f_i) — симплектический базис подпространства L_i , а $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ — соответствующая симплектическая система координат на L . Положим $(x_1, y_1) = z_1, (x_2, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n) = z_2$.

Предположим, что указанные первые интегралы существуют. Тогда, согласно лемме п. 1.2 из [2], существует n полиномов от n переменных с комплексными коэффициентами, таких, что при подстановке в них этих первых интегралов младшие однородные части $F_1, \dots, F_n$ по переменным z_2 получающихся рациональных функций функционально независимы. Очевидно, они также являются первыми интегралами группы G и находятся в инволюции по переменным z_2 .

Пусть $L' \subset L$ — область регулярности функций $F_1, \dots, F_n$. Так как размерность нулевой плоскости в $(2n-2)$ -мерном линейном симплектическом пространстве не превосходит $n-1$ [6], то $\text{rank } \partial(F_1, \dots, F_n)/\partial z_2 \leq n-1$ для любой точки $z \in L'$.

Пусть $\max_{z \in L'} \text{rank } \partial(F_1, \dots, F_n)/\partial z_2(z) = r$. (Очевидно, что $r \geq n-2$.) Пусть для определенности существует точка $z \in L'$, такая, что

$$\text{rank } \partial(F_1, \dots, F_r)/\partial z_2(z) = r. \quad (1.2)$$

Тогда для любого $i > r$ функции $f = F_i$, $F = (F_1, \dots, F_r)$, z_1 функционально зависимы; следовательно [7, гл. X, предложение 10], они алгебраически зависимы, т.е. существует полином $P(X_1, \dots, X_{r+3})$ с ненулевыми комплексными коэффициентами, такой, что $P(f, F, z_1) = 0$. Очевидно, что $\partial P/\partial X_1 \neq 0$ (иначе функции F , z_1 были бы функционально зависимы, вопреки равенству (1.2)). Выберем полином P так, чтобы его степень по переменной X_1 была минимальной. Тогда $\partial P/\partial X_1(f, F, z_1) \neq 0$.

Выберем точку $z \in L'$ так, что

- 1) $dF_1(z), \dots, dF_n(z)$ линейно независимы,
- 2) $\text{rank } \partial F/\partial z_2(z) = r$,
- 3) $\partial P/\partial X_1(f(z), F(z), z_1(z)) \neq 0$.

Тогда на множестве $N = \{z' \in L' : F(z') = F(z)\}$ функция f удовлетворяет уравнению

$$Q(f, z_1) = \sum_{j=0}^k a_j(z_1) f^j = 0, \quad (1.3)$$

где a_j — полиномы, $k > 0$, $a_k(z_1) \not\equiv 0$ на N . (Далее ср. [8], доказательство теоремы Лиувилля [9] об отсутствии дополнительного алгебраического первого интеграла в задаче о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки в случае отсутствия полиномиального квазиоднородного.)

Выберем полином Q так, чтобы его степень k по переменной f была минимальной. Из инвариантности множества N и функции f относительно группы G следует, что для любого $g \in G$ функция f удовлетворяет на множестве N также уравнению

$$\sum_{j=0}^k a_j(z_1 \circ g) f^j = 0. \quad (1.4)$$

Умножая уравнение (1.3) на $a_k(z_1 \circ g)$, а уравнение (1.4) — на $a_k(z_1)$ и вычитая их одно из другого, получаем, что функция f удовлетворяет на множестве N уравнению

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j(z_1) f^j = 0, \quad b_j(z_1) = a_j(z_1) a_k(z_1 \circ g) - a_j(z_1 \circ g) a_k(z_1).$$

Из инвариантности подпространств $L_1, \dots, L_n$ относительно G следует, что функции $z_1 \circ g$ являются линейными комбинациями функций z_1 . Из минимальности числа k получаем, что $b_j(z_1) \equiv 0$ на N , а значит, и на множестве $N_1 = \pi(N)$, где $\pi: L \rightarrow L_1$ — естественная проекция.

Из условия 2) следует, что множество N_1 содержит открытое подмножество; следовательно, $b_j = 0$, т.е. $a_j(z_1)/a_k(z_1) = a_j(z_1 \circ g_1)/a_k(z_1 \circ g_1)$ на L_1 , где $g_1 = g|_{L_1}$, т.е. рациональные функции $a_j(z_1)/a_k(z_1)$ ($j = 1, \dots, k-1$) являются первыми интегралами группы G_1 .

Покажем, что не все они являются постоянными. Действительно, в противном случае функция f принимала бы на множестве $N' = \{z' \in N : a_k(z_1(z')) \neq 0\}$ конечное число значений. Но из условий 1), 2) следует, что сколь угодно близко к точке z существует точка $z' \in N'$, в которой дифференциалы $dF_1(z'), \dots, dF_n(z')$ линейно независимы. Для любой окрестности $U \subset L'$ точки z' функция f принимает на множестве $U \cap N'$ бесконечное число значений. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная теорема справедлива и для группы монодромии G_0 приведенной системы в вариациях вдоль Γ , т.е. для группы монодромии ограничения системы в нормальных вариациях вдоль Γ на нулевую поверхность уровня ее первого интеграла dH (ср. [2]). Действительно, согласно предложению п. 1.2 из [2], если система (1.1) имеет r дополнительных (т.е. функционально независимых с H) мероморфных первых интегралов, то группа G_0 имеет r функционально независимых рациональных первых интегралов. Из способа доказательства этого предложения, приведенного в [2], следует, что если исходные первые интегралы находятся в инволюции, то полученные первые интегралы также будут в инволюции. Если $r = n-1$ и группа G_0 имеет $n-1$ двумерных взаимно косоортогональных инвариантных подпространств, то применима доказанная выше лемма.

§2. Натуральные механические системы с однородным потенциалом

Пусть D — область в n -мерном комплексном координатном пространстве $\mathbb{C}^n$, инвариантная относительно умножения на ненулевые комплексные числа и такая, что $\operatorname{Re} D = D \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, и V — вещественно-аналитическая однородная функция в D целой степени k .

Будем использовать следующие обозначения. Если $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}^m$, то $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$, $x^2 = \langle x, x \rangle$.

Рассмотрим, следуя [4, 5], гамильтонову систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q \in D, \quad p \in \mathbb{C}^n, \quad (2.1)$$

где $H = p^2/2 + V(q)$.

Пусть $c \in \operatorname{Re} D$ — ненулевое решение системы уравнений

$$c = \frac{\partial V}{\partial q}(c). \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 0$ таких решений нет, так как при вещественных q имеем $q \perp \partial V / \partial q$.

Рассмотрим прямолинейное решение

$$q = c\phi(t), \quad p = c\dot{\phi}(t) \quad (2.3)$$

системы (2.1), где ϕ — решение дифференциального уравнения $\ddot{\phi} + \phi^{k-1} = 0$ с начальным условием $\phi(0) = 1$, $\dot{\phi}(0) = 0$.

Система в вариациях вдоль комплексифицированной фазовой кривой Γ решения (2.3) имеет вид

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\phi^{k-2}(t) \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}(c) \xi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (2.4)$$

В ортонормированном собственном базисе матрицы $\partial^2 V / \partial q^2(c)$ система (2.4) принимает вид

$$\dot{\xi}_i = \eta_i, \quad \dot{\eta}_i = -\lambda_i \phi^{k-2}(t) \xi_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $\partial^2 V / \partial q^2(c)$, или

$$\ddot{\xi}_i + \lambda_i \phi^{k-2}(t) \xi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.5)$$

Из теоремы §1 вытекает

ТЕОРЕМА. *Если система (2.1) имеет n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, то группа монодромии каждого из уравнений системы (2.5) имеет рациональный первый интеграл.*

Пусть $k \neq 0, \pm 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = \pm 2$ каждое из уравнений системы (2.5) имеет линейный или квадратичный первый интеграл. (При $k = 2$ это очевидно, а при $k = -2$ следует из цикличности группы монодромии, которая, в свою очередь, следует из тождественности преобразований монодромии, соответствующих обходам бесконечно удаленных по координатам точек на фазовой кривой. Последняя проверяется непосредственными выкладками).

В [4, 5] показано, что если i -е уравнение системы (2.5) имеет рациональный первый интеграл, то числа μ_i , ν_i , определяемые из квадратных уравнений

$$\mu_i^2 - 2[\cos(2\pi/k) + 2\cos^2(\pi\omega_i/2k)]\mu_i + 1 = 0, \quad \nu_i^2 - 2\nu_i \cos 2\pi\omega_i + 1 = 0,$$

где $\omega_i = \sqrt{(k-2)^2 + 8k\lambda_i}$, являются корнями из единицы. (В действительности в [4, 5] рассматривались полиномиальные первые интегралы, однако результаты с помощью леммы п. 1.3 из [2] переносятся и на случай рациональных первых интегралов).

ЗАМЕЧАНИЕ [4, 5]. Из этого утверждения следует, что числа ω_i рациональны и удовлетворяют неравенству

$$\cos(2\pi/k) + 2\cos^2(\pi\omega_i/2k) \leq 1. \quad (2.6)$$

Отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если система (2.1) имеет n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции, то все числа μ_i , ν_i ($i = 1, \dots, n$) являются корнями из единицы.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4, 5] показано, что одно из чисел λ_i , для определенности λ_n , равно $k-1$, и для существования у системы (2.1) дополнительного аналитического первого интеграла необходимо, чтобы наборы чисел $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ и $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ были резонансными, т. е. чтобы существовали целые числа $k_1, \dots, k_{n-1}, l_1, \dots, l_{n-1}$, $\sum k_i^2 \neq 0$, $\sum l_i^2 \neq 0$, такие, что $\mu_1^{k_1} \cdots \mu_{n-1}^{k_{n-1}} = 1$, $\nu_1^{l_1} \cdots \nu_{n-1}^{l_{n-1}} = 1$

(последнее равенство эквивалентно рациональной зависимости чисел $\omega_1, \dots, \omega_n$ [5]).

ПРИМЕР [5]. Рассмотрим систему n точек на прямой с потенциалом

$$V(q) = (-q_1)^k + (q_1 - q_2)^k + \dots + (q_{n-1} - q_n)^k + q_n^k, \quad (2.7)$$

где $k > 2$ — четное, а $n \geq 1$ — нечетное натуральные числа.

В этом случае уравнение (2.2) имеет решение

$$c_1 = -c_3 = c_5 = \dots = (1/2k)^{1/(k-2)}, \quad c_2 = c_4 = \dots = 0.$$

Как показано в [5], собственные значения матрицы $\partial^2 V / \partial q^2(c)$ имеют вид

$$\lambda_j = 2(k-1) \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right) \quad (j = 1, \dots, n).$$

В [5] было показано, что при $k = 4$ и $n = 1, 3, 5$ числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ рационально независимы и, согласно предыдущему замечанию, система (2.1) не имеет дополнительного аналитического первого интеграла, и высказано предположение, что это утверждение справедливо при всех четных k и нечетных n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При четных $k > 2$ и нечетных $n \geq 3$ система (2.1) с потенциалом (2.7) не имеет n функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции ни в какой области, содержащей начало координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если такие первые интегралы существуют в какой-либо области, содержащей начало координат, то они существуют во всем комплексном фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ (ср. [3, доказательство теоремы из §4]). Действительно, предположим, что такие первые интегралы существуют. Тогда, согласно лемме п. 1.2 из [2], существует n полиномов от n переменных с комплексными коэффициентами, таких, что при подстановке в них этих первых интегралов младшие квазиоднородные части получающихся мероморфных функций по переменным p, q , где переменным p приписывается вес k , а q — вес 2, функционально независимы. Очевидно, они также находятся в инволюции и, как следует из квазиоднородности гамильтониана H , являются первыми интегралами системы (2.1), что и требовалось доказать. Таким образом, остается показать, что указанных первых интегралов не существует во всем комплексном фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$.

Как показано в [4], при $k > 2$ и

$$1 < \lambda_i < k - 1 \quad (2.8)$$

неравенство (2.6) невозможно.

Полагая $n = 2l - 1$, получаем

$$\lambda_{l-1} = 2(k-1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4l} \right) = (k-1) \left(1 - \sin \frac{\pi}{2l} \right).$$

Так как $3(1 - \sin(\pi/6)) > 1$, то при $l \geq 3$, $i = l - 1$ число λ_i удовлетворяет неравенству (2.8). Это доказывает предложение 2 при $n \geq 5$.

Поскольку $\sin^2(\pi/8) = (1 - 1/\sqrt{2})/2$ иррационально, при $n = 3$ число ω_1 иррационально, что доказывает предложение 2 при $n = 3$.

§3. Задача n тел

В [4] доказано отсутствие аналитического первого интеграла в задаче трех тел на комплексной прямой, образующего с интегралами энергии и импульса функционально независимую систему и находящегося с ними в инволюции. В настоящем параграфе доказывается отсутствие полного набора мероморфных первых интегралов в инволюции в задаче трех тел в комплексном пространстве произвольного числа измерений и в задаче $n > 3$ тел в комплексном пространстве более одного измерения.

3.1. Задача трех тел. Пусть D — область в $3k$ -мерном комплексном координатном пространстве $\mathbb{C}^{3k}$ ($k \geq 1$) с координатами $q = (q_1, q_2, q_3)$, $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^k)$ ($i = 1, 2, 3$), задаваемая неравенствами

$$|(q_i^2 - q_j^2)^2 + \dots + (q_i^k - q_j^k)^2| < |q_i^1 - q_j^1|^2 \quad (i < j \leq 3).$$

Положим

$$L^3 = \{q \in U : q_i^2 = \dots = q_i^k = 0, i = 1, 2, 3\}.$$

В области D функции $1/r_{i,j}$ ($i < j \leq 3$), определяемые равенствами

$$r_{i,j}^2 = (q_i - q_j)^2, \quad r_{i,j}|_L = q_i^1 - q_j^1,$$

однозначны и аналитичны.

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q \in D, \quad p \in \mathbb{C}^{3n}, \quad (3.1)$$

где

$$p = (p_1, p_2, p_3), \quad p_i = (p_i^1, \dots, p_i^k) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + W, \quad W = g \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{i,j}}, \quad m_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g < 0.$$

В связной компоненте вещественной части фазового пространства, определяемой неравенствами $q_1 > q_2 > q_3$, система (3.1) описывает движение трех точек с массами m_i , притягивающихся по закону Ньютона.

ТЕОРЕМА (ср. [10–13]). *В положительном октанте трехмерного координатного пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $m = (m_1, m_2, m_3)$ существует окрестность U объединения S биссекторных плоскостей $m_i = m_j$ ($i \neq j$) с выкинутыми прямыми $m_k/m_i = 11/12, 1/4, 1/24$ ($i \neq k \neq j$), такая, что при $m \in U$ система (3.1) не имеет $3n$ функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем каноническую замену переменных

$$p_i = \sqrt{m_i} P_i = \sqrt{m_i} (P_i^1, \dots, P_i^k), \quad q_i = \frac{Q_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{(Q_i^1, \dots, Q_i^k)}{\sqrt{m_i}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда система (3.1) примет вид

$$\dot{Q} = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad (3.2)$$

где

$$F = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 + V, \quad V(Q_1, Q_2, Q_3) = W\left(\frac{Q_1}{\sqrt{m_1}}, \frac{Q_2}{\sqrt{m_2}}, \frac{Q_3}{\sqrt{m_3}}\right).$$

Рассмотрим решение системы уравнений $c = \partial V / \partial Q(c)$ вида $c = (c_1, c_2, c_3)$, $c_i = (b_i, 0, \dots, 0)$, $i = (1, 2, 3)$, где числа b_1, b_2, b_3 удовлетворяют системе уравнений

$$b_i = \partial V / \partial Q_i^1(c) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

Пусть $m \in S$ и для определенности $m_1 = m_3$. Выберем единицы измерения так, что $m_1 = 1$. Тогда система (3.3) имеет решение [4]

$$b_2 = 0, \quad b_1 = -b_3 = -[g(m_2 + 1/4)]^{1/3}. \quad (3.4)$$

Покажем, что собственные значения матрицы

$$B = \partial^2 V / \partial (Q^1)^2(c)$$

не равны единице и, следовательно, при близких значениях m система (3.3) имеет решение, близкое к решению (3.4). Действительно, так как ограничение функции V на многообразие $Q_i^2 = \dots = Q_i^n = 0$ ($i = 1, 2, 3$) зависит только от двух линейных функций $q_1^1 - q_1^2$ и $q_2^1 - q_3^1$, то одно из собственных значений матрицы B равно нулю. Другое, согласно замечанию в конце §2, равно -2 . Следовательно, третье собственное значение равно

$$\lambda = \text{trace } A + 2 = -8(m_2 + 2)/(4m_2 + 1) \neq 1,$$

что и требовалось доказать.

Согласно предложению 1 §2, для существования у системы (3.2) полного набора мероморфных первых интегралов в инволюции необходимо, чтобы собственные значения матрицы $A = \partial^2 V / \partial Q^2(c)$ удовлетворяли неравенству (2.6). Последнее при $k = -1$ эквивалентно равенству $\lambda_i = 1 - l(l+1)/2$, где l — целое число [4].

Так как спектр матрицы B содержится в спектре матрицы A , то для доказательства теоремы остается проверить, что $\lambda \neq 1 - l(l+1)/2$, где l целое, а это непосредственно следует из условия.

3.2. Задача n тел. Введем следующие обозначения. Если $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$, то $\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$.

Пусть D — область kn -мерного комплексного координатного пространства $\mathbb{C}^{kn}$ ($k > 1$, $n > 2$) с координатами $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^k)$ ($i = 1, \dots, n$), задаваемая неравенством

$$\|q - q_1^1 a\| < \frac{2}{5} |q_1^1| \sin^2 \frac{\pi}{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_n), \quad a_i = (a_i^1, \dots, a_i^k) \quad (i = 1, \dots, n), \\ a_i^3 &= \dots = a_i^k = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ a_i^1 &= \cos \frac{2\pi i}{n-1}, \quad a_i^2 = \sin \frac{2\pi i}{n-1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad a_n = 0. \end{aligned}$$

При $i \neq j$ имеем

$$\begin{aligned} |(q_i - q_j)^2 - (q_1^1)^2(a_i - a_j)^2| &= |\langle q_i - q_j - q_1^1(a_i - a_j), q_i - q_j + q_1^1(a_i - a_j) \rangle| \\ &\leq \|q_i - q_j - q_1^1(a_i - a_j)\| \|q_i - q_j + q_1^1(a_i - a_j)\| \\ &< \frac{4}{5} |q_1^1|^2 \sin^2 \frac{\pi}{n-1} \left(\frac{4}{5} \sin^2 \frac{\pi}{n-1} + 4 \right) \\ &< 4 |q_1^1|^2 \sin^2 \frac{\pi}{n-1} \leq |q_1^1|^2 \|a_i - a_j\|^2; \end{aligned}$$

следовательно, функции $1/r_{i,j}$ ($i < j$), определяемые равенствами

$$r_{i,j}^2 = (q_i - q_j)^2, \quad r_{i,j}(a) = \|a_i - a_j\|,$$

в области D однозначны и аналитичны.

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q \in D, \quad p \in \mathbb{C}^{kn}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} p &= (p_1, \dots, p_n), \quad p_i = (p_i^1, \dots, p_i^k) \quad (i = 1, \dots, n), \\ H &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{p_i^2}{m_i} + W, \quad W = g \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{i,j}}, \quad m_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad g < 0. \end{aligned}$$

В связной компоненте вещественной части фазового пространства, определяемой неравенством $q_1^1 > 0$, система (3.5) описывает движение n точек в k -мерном координатном пространстве, притягивающихся по закону Ньютона.

ТЕОРЕМА (ср. [14], обобщение Пенлеве на задачу n тел теоремы Брунса об отсутствии дополнительного алгебраического первого интеграла задачи трех тел). *При фиксированных $m_1 = \dots = m_{n-1}$ существует не более конечного числа значений m_n , при которых система (3.5) имеет kn функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем каноническую замену переменных $p_i = \sqrt{m_i} P_i$, $q_i = Q_i / \sqrt{m_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда в новых переменных гамильтониан примет вид

$$F = \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 + V, \quad V(Q_1, \dots, Q_n) = W\left(\frac{Q_1}{\sqrt{m_1}}, \dots, \frac{Q_n}{\sqrt{m_n}}\right). \quad (3.6)$$

Выберем единицы измерения так, что $m_1 = \dots = m_{n-1} = 1$.

Уравнение $c = \partial V / \partial Q(c)$ имеет решение $c = ba$, где

$$b = - \left[g \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} \sin^{-1} \frac{\pi i}{n-1} + m_n \right) \right]^{1/3}.$$

Из сказанного в конце п. 3.1 следует, что, если

$$\text{Спец} \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}(c) \notin \mathbb{Z},$$

то система (3.5) не имеет kn функционально независимых мероморфных первых интегралов в инволюции.

Так как

$$\text{Spec } \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}(c) \supset \text{Spec } \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{Q}^2}(c),$$

где

$$\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n), \quad \bar{Q}_i = (Q_i^1, Q_i^2) \quad (i = 1, \dots, n),$$

то для доказательства теоремы остается показать, что существует не более конечного числа значений m_n , при которых

$$p = \text{trace } \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{Q}^2}(c) \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку

$$p = -(n-1) \frac{m_n + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-2} \sin^{-3} \frac{\pi i}{n-1} + 1}{m_n + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} \sin^{-1} \frac{\pi i}{n-1}},$$

остается показать, что

$$1 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-2} \sin^{-3} \frac{\pi i}{n-1} > \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} \sin^{-1} \frac{\pi i}{n-1},$$

т. е.

$$S = \sum_{i=1}^{n-2} \cos \frac{2\pi i}{n-1} \sin^{-3} \frac{\pi i}{n-1} > -8.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S &\geq 2 \sum_{i=1}^{[(n-1)/2]} \cos \frac{2\pi i}{n-1} \sin^{-3} \frac{\pi i}{n-1} \geq 2 \cos \frac{2\pi}{n-1} [(n-1)/2] \sin^{-3} \frac{\pi}{n-1} [(n-1)/2] \\ &\geq -2 \sin^{-3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n-1)} \right) \geq -2 \sin^{-3} \frac{\pi}{4} = -4\sqrt{2} > -8, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь случаем, исправим замеченную неточность в [15].

На стр. 4 вместо «все, кроме, может быть, счетного числа» должно быть «все, кроме не более чем счетного числа».

Автор благодарен В. И. Арнольду и А. И. Нейштадту за ценные замечания.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Когда настоящая работа находилась в печати, автору стало известно о работе [16], в которой содержится утверждение (теорема 5.1), более сильное, чем предложение 1 §2 настоящей работы: при $k \neq \pm 1$ числа λ_i должны удовлетворять более жестким ограничениям, чем указано в формулировке этого предположения. Автор благодарен Ж. Ж. Моралесу-Руизу за присланную книгу [16] и любезные разъяснения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.
2. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 30–41 (1982).
3. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. II. Функц. анализ и его прил. **17**, вып. 1, 8–24 (1983).
4. Yoshida H. A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with homogeneous potential. Phys. D, **29**, 128–142 (1987).
5. Yoshida H. A criterion for the non-existence of an additional analitic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom. Phys. Lett. A, **141**, 108–112 (1989).
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1974.
7. Ленг С. Алгебра. Мир, М., 1968.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В кн.: Движение твердого тела около неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1940, с. 157–186.
9. Liouville R. Sur la mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un ses points. Acta Math., **20**, 239–284 (1896).
10. Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы, 2. Одномерные нелинейные колебания в периодически возмущаемом поле. Матем. сб., **77**, № 4, 545–601 (1968).
11. Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы, 3. Квазислучайные колебания одномерных осцилляторов. Матем. сб., **78**, № 1, 3–50 (1969).
12. Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. УМН, **36**, вып. 4, 161–176 (1981).
13. Libre J., Simo C. Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. Math. Ann., **248**, No. 2, 153–184 (1980).
14. Умтекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.-Л., 1937.
15. Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в некоторых задачах динамики. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 1, 3–11 (1997).
16. Morales-Ruiz J. J. Differential Galois theory and nonintegrability of Hamiltonian systems. Progress in Math., vol. 179, Birkhäuser, 1999.

Институт радиотехники и электроники РАН

Поступило в редакцию
19 марта 1999 г.