Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Оптимальные интерполяционные теоремы в парах пространств L_p для обобщенных пространств средних Лионса–Петре, *Функци. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:38:38

УДК 517.982

Оптимальные интерполяционные теоремы в парах пространств L_p для обобщенных пространств средних Лионса–Петре*

© 2012. В. И. Овчинников

Если рассматривать линейные операторы, действующие из одной пары весовых пространств $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ в другую пару $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, то возникает вопрос об оптимальных интерполяционных теоремах, т. е. вопрос о том, каково наименьшее пространство, куда отображают такие операторы данное пространство E , промежуточное между $L_{p_0}(U_0)$ и $L_{p_1}(U_1)$. Для шкал пространств Лоренца оптимальные интерполяционные теоремы получены в [6]–[8]. В данной работе найдены оптимальные интерполяционные теоремы в классе обобщенных пространств средних Лионса–Петре $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$, где φ — произвольная интерполяционная функция и $0 < s_0, s_1 \leq \infty$, которые могут оказаться и квазибанаховыми. В частности, получены оптимальные интерполяционные теоремы для пространств Орлича, интерполяционных между L_{p_0} и L_{p_1} , и пространств Лоренца с функциональными параметрами. Оказалось, что с точки зрения оптимальных интерполяционных теорем для пар пространств L_p этот класс пространств $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ инвариантен, т. е. наименьшее пространство оказывается тоже обобщенным пространством средних Лионса–Петре с другими параметрами.

В основе указанных результатов лежит описание интерполяционных орбит произвольных элементов $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$ при действии операторов $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, найденное в [9]. При доказательстве используется связь с интерполяционными орбитами при действии операторов из идеалов Неймана–Шаттена в гильбертовых парах.

1. Обобщенные пространства средних Лионса–Петре. Всюду в дальнейшем мы пользуемся стандартными обозначениями теории интерполяции линейных операторов, следуя [1] и [2].

Через L_p , где $1 \leq p \leq \infty$, обозначено пространство Лебега измеримых функций на пространстве $\mathfrak{M}$ с σ -конечной мерой. Если U — строго положительная измеримая функция на $\mathfrak{M}$, то через $L_p(U)$ обозначается весовое пространство, состоящее из функций f , таких, что $fU \in L_p$. В случае аналогичных пространств последовательностей используются обозначения l_p и $l_p(w_k)$, где $0 < p \leq \infty$ и последовательности из l_p пронумерованы целыми индексами k , а $w = \{w_k\}$ — строго положительная весовая последовательность. То есть $l_p(w_k)$ состоит из $\xi = \{\xi_k\}$, таких, что $\xi w \in l_p$.

Напомним, что строго положительная функция $\varphi(u, v)$ двух строго положительных переменных u и v называется интерполяционной, если $\varphi(u, v)$ возрастает по u и v и однородна первой степени, т. е. $\varphi(\lambda u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v)$, где $\lambda > 0$. Множество всех таких функций обозначим через Φ , а через Φ_0 обозначим подмножество интерполяционных функций, для которых $\varphi(u, 1) \rightarrow 0$ и $\varphi(1, u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$. Положим $\varphi^*(u, v) = 1/\varphi(1/u, 1/v)$.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №10-01-00276.

Как известно, для каждой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ можно провести дискретизацию, т. е. построить последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k \in M}$, где M — некоторый интервал в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, такую, что с точностью до эквивалентности вся информация о поведении $\varphi(u, v)$ содержится в $\{w_k\}_{k \in M}$. Эта последовательность называется балансировочной (см. [3]), и по определению в терминологии Янсона [4] она является заполняющей и равномерно разреженной для квазивогнутой функции $\varphi(1, v)$. Строится такая последовательность неоднозначно. Наиболее известны конструкция Осколкова–Янсона (см. [4]) и конструкция Брудного–Кругляка (см. [2]). В обоих случаях последовательность $\{w_k\}_{k \in M}$ строится индуктивно вверх и вниз, начиная с $w_0 = 1$. По Осколкову и Янсону w_{k+1} или w_{k-1} определяются из соотношения

$$\min\left(\frac{\varphi(1, w_{k+1})}{\varphi(1, w_k)}, \frac{\varphi^*(w_{k+1}, 1)}{\varphi^*(w_k, 1)}\right) = 2$$

до тех пор пока этот процесс идет. Тем самым определяется интервал M целых чисел, для которых w_k существует.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ — произвольная пара банаховых пространств. Напомним, что через $K(u, v, x, \{X_0, X_1\})$, где $u, v > 0$, обозначается

$$\inf_{x=x_0+x_1} u\|x_0\|_{X_0} + v\|x_1\|_{X_1},$$

где точная нижняя грань берется по всем представлениям $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Очевидно, что $K(u, v, x, \{X_0, X_1\})$ — интерполяционная функция.

Определение 1 (см. [10]). Пространство $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$, где $\varphi \in \Phi_0$, а $0 < s_0, s_1 \leq \infty$, состоит из $x \in X_0 + X_1$, таких, что $K(u, v, x, \{X_0, X_1\}) \in \Phi_0$ и для хотя бы одной балансировочной последовательности $\{w_k\}_{k \in M}$ функции $K(u, v, x, \{X_0, X_1\})$

$$\{K(1, w_k, x, \{X_0, X_1\})\}_{k \in M} \in \varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(w_k^{-1})),$$

где через $\varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(w_k^{-1}))$ обозначено пространство последовательностей, построенное с помощью конструкции Кальдерона–Лозановского по пространству l_{s_0} и весовому пространству $l_{s_1}(w_k^{-1})$.

Данные пространства для произвольных интерполяционных функций появились в [9] в связи с описанием интерполяционных орбит. В частных случаях они появлялись и ранее, начиная с [5].

В [10] проверено, что $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ — это интерполяционное пространство между X_0 и X_1 . Функционал

$$\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}} = \|\{K(1, w_k, x, \{X_0, X_1\})\}\|_{\varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(w_k^{-1}))}$$

является квазинормой. Однако при $s_0, s_1 \geq 1$ он эквивалентен норме.

В ряде случаев конструкция пространства $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ сводится к известным. В частности, $\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$ при $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, где через $\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$, как и выше, обозначена конструкция Кальдерона–Лозановского, примененная к пространствам $L_{p_0}(U_0)$, $L_{p_1}(U_1)$, и $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ совпадает с конструкцией Янсона $(X_0, X_1)_{\psi, s}$, если $\psi(v) = \varphi(1, v)$ и $s_0 = s_1 = s$ (см. [9]).

Пространство $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ является K -монотонным. Отсюда следует, что пространство $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$ определяется с помощью множества $\Psi(\varphi, s_0, s_1)$, состоящего из всех интерполяционных функций, эквивалентных функциям $K(u, v, x, \{X_0, X_1\})$, таким, что $x \in \varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$.

Следующая теорема описывает «цепную» структуру этого множества.

Теорема 1. Если $0 < s_0, s_1, r_0, r_1 \leq \infty$ и $1/t_0 = 1/r_0 + 1/s_0$, $1/t_1 = 1/r_1 + 1/s_1$, то

$$\Psi(\varphi, t_0, t_1) = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, s_0, s_1)} \Psi(\psi, r_0, r_1).$$

Теорема 1 доказывается сведением к описанию пространств $\varphi(H_0, H_1)_{s_0, s_1}$, где $\{H_0, H_1\}$ — пара гильбертовых пространств, в терминах интерполяционных орбит относительно идеалов Неймана–Шаттена (см. [10]). Далее используется факторизация для таких идеалов.

2. Интерполяционная теорема. Если воспользоваться описанием интерполяционных орбит в парах пространств L_p (см. [9]), т. е. равенством

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) = \psi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1},$$

где $\psi(u, v) = K(u, v, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$, а $1/r_0 = (1/q_0 - 1/p_0)_+$, $1/r_1 = (1/q_1 - 1/p_1)_+$, то из теоремы 1 получаем интерполяционную теорему.

Теорема 2. Пусть $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, где $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, — линейный оператор. Тогда для любой $\varphi \in \Phi_0$

$$T: \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1} \rightarrow \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1},$$

где $1/t_0 = 1/s_0 + (1/q_0 - 1/p_0)_+$, $1/t_1 = 1/s_1 + (1/q_1 - 1/p_1)_+$.

В невырожденных случаях эта теорема оптимальна.

Определение 2. Банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется K_0 -обильной (см. [2]), если для любой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ найдется такой $x \in X_0 + X_1$, что функция $K(u, v, x, \{X_0, X_1\})$ эквивалентна функции $\varphi(u, v)$.

Теорема 3. Если пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ является K_0 -обильной, то для любого $y \in \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1}$ найдутся $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}$ и линейный оператор $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, такие, что $y = Tx$.

Если в теореме 2 положить $s_0 = p_0$ и $s_1 = p_1$, то получим, что $T: \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} \rightarrow \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$, где $r_0 = \min(p_0, q_0)$, $r_1 = \min(p_1, q_1)$. Поскольку $\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$, это дает уточненный аналог теоремы Стейна–Вейсса для пространств с функциональными параметрами. Теорема Стейна–Вейсса [11] получается при степенной функции $\varphi(u, v) = u^{1-\theta}v^\theta$ и $q_0 \leq p_0$, $q_1 \leq p_1$. В общем случае пространство $\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$ совпадает с весовым пространством Орлича. Если весов U_0, U_1 нет, то $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$ — пространство Орлича, интерполяционное между L_{p_0} и L_{p_1} (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. Introduction*, Springer-Verlag, 1978.
 [2] Ju. A. Brudnyi, N. Ya. Krugliak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, I, North Holland, Amsterdam, 1991. [3] Ju. A. Brudnyi, A. Shteinberg, J. Funct. Anal., **131**:2 (1995), 459–498. [4] S. Janson, J. Funct. Anal., **44**:1 (1981), 50–73. [5] J.-L. Lions, J. Peetre, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **19** (1964), 5–68. [6] В. А. Дикарев,

В. И. Мацаев, Докл. АН СССР, **168**:5 (1966), 986–988. [7] А. А. Дмитриев, Е. М. Семенов, Докл. АН СССР, **258**:6 (1981), 1298–1300. [8] В. И. Овчинников, Докл. АН СССР, **272**:2 (1983), 300–303. [9] V. I. Ovchinnikov, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, **334**:10 (2002), 881–884. [10] В. И. Овчинников, Алгебра и анализ, **22**:4 (2010), 214–231. [11] E. M. Stein, G. Weiss, Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 159–172.

Воронежский государственный университет

e-mail: vio@comch.ru

Поступило в редакцию

31 января 2011 г.