Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ольшанский, А. А. Осиненко, Многомерные
многочлены Якоби и интеграл Сельберга, *Функц.
анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 31–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:13:40

Многомерные многочлены Якоби и интеграл Сельберга*

© 2012. Г. И. ОЛЬШАНСКИЙ, А. А. ОСИНЕНКО

Работа мотивирована задачей гармонического анализа на «больших» группах и может рассматриваться как продолжение статьи первого автора (Функц. анализ и его прил., **37**:4 (2003), 49–73). Наш основной результат — доказательство существования некоторого семейства вероятностных распределений с бесконечномерным носителем; эти распределения являются аналогом многомерных бета-распределений Эйлера, которые фигурируют в интеграле Сельберга.

§ 1. Введение

Настоящая работа мотивирована задачей гармонического анализа на «больших» группах и может рассматриваться как продолжение работы первого автора [25]. Наш основной результат — доказательство существования некоторого семейства вероятностных распределений с бесконечномерным носителем; эти распределения являются аналогом многомерных бета-распределений Эйлера, которые фигурируют в интеграле Сельберга.

Известно, что экстремальные характеры бесконечной симметрической группы и бесконечномерных классических групп (равно как и экстремальные сферические функции на бесконечномерных римановых симметрических пространствах компактного типа) зависят от счетного набора непрерывных координат (Тома [30], Вершик и Керов [31], Керов–Окуньков–Ольшанский [14], Пикрелл [29], Окуньков–Ольшанский [22], [23]). Будем обозначать (бесконечномерное) пространство экстремальных характеров или сферических функций символом Ω . В задаче гармонического анализа возникает семейство спектральных мер на пространстве Ω — это вероятностные распределения, которые задают разложение так называемых обобщенных регулярных представлений, заменяющих несуществующее регулярное представление ([15], [16], [25], [3], [4]).

Первый набросок программы гармонического анализа на «больших» группах был дан в заметке [15], и затем С. В. Керов и первый автор в течение нескольких последующих лет пытались понять природу спектральных мер и найти подходы к их описанию; трудность состояла в том, что спектральные меры нельзя задать плотностью относительно какой-то естественной «затравочной» (reference) меры вроде меры Лебега. Тогда же Керов обратил внимание на связь спектральных мер с интегралом Сельберга и предпринял первую попытку ее использовать (см. [12, §§11–12], [13, §13]).

Связь, о которой идет речь, состоит в следующем: наши спектральные меры зависят от нескольких непрерывных параметров, и когда параметры принимают некоторые особые значения, происходит вырождение: носитель меры становится конечномерным, меру тогда можно задать плотностью, и эта плотность имеет

*Работа поддержана грантом RFBR-CNRS 10-01-93114 (Г. О. и А. О.), фондом Саймонса (Г. О.) и Фондом поддержки молодых ученых «Конкурс Мебиуса» (А. О.)

тот же вид, что в интеграле Сельберга. (Похожее явление хорошо известно в теории представлений полупростых групп: при специальных значениях параметров модули Хариш-Чандры или модули со старшим весом вырождаются в конечномерные модули.)

Отсюда проистекает идея интерпретировать спектральные меры как результат аналитического продолжения вырожденных мер по параметрам. На этой идее построены работы [25]–[27], а также и настоящая работа. Мы проводим вычисления для вырожденных мер, а затем экстраполируем результат на общие значения параметров, опираясь на теорему Карлсона о единственности продолжения с целых точек для аналитических функций, удовлетворяющих определенным условиям. (Аналогично, общие модули Хариш-Чандры или модули со старшим весом можно интерпретировать как результат аналитического продолжения по параметрам конечномерных представлений. Это наблюдение было использовано еще 60 лет назад в работе Годемана [10].)

Как и в [25], наш подход к спектральным мерам формально не зависит от конструкции обобщенных регулярных представлений. Известно, что пространство Ω является границей некоторого бесконечного градуированного графа. Это означает, что имеет место биективное соответствие $M_\infty \leftrightarrow \{M_N : N = 1, 2, \dots\}$ между вероятностными мерами M_∞ на Ω и последовательностями $\{M_N\}$ вероятностных мер на этажах графа, удовлетворяющих так называемому *условию когерентности*

$$M_N \Lambda_{N-1}^N = M_{N-1}, \quad N = 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где Λ_{N-1}^N — некоторые канонические стохастические матрицы, связывающие соседние этажи графа (строки матрицы Λ_{N-1}^N индексируются вершинами N -го этажа, а столбцы — вершинами $(N-1)$ -го этажа; сами меры M_N при этом интерпретируются как векторы-строки).

Тем самым вопрос о существовании той или иной меры M на Ω сводится к предъявлению последовательности $\{M_N\}$, удовлетворяющей условию когерентности (1). Проверка этого условия нетривиальна и является основным техническим результатом работы.

Интересующие нас графы являются графами ветвления многомерных ортогональных многочленов гипергеометрического типа, связанных с классическими системами корней. В [25] рассматривался случай многочленов Джека (он отвечает системе корней типа A), а в настоящей работе мы разбираем случай симметрических многочленов Якоби (системы корней типа B , C , D и, более общо, BC). Эти многочлены зависят от трех непрерывных параметров: тех же двух параметров (a, b) , что и классические многочлены Якоби от одного переменного, а также так называемого параметра Джека θ , который возникает только для $N \geq 2$ переменных. В настоящей работе предполагается, что $\theta = 1$; тогда многомерные многочлены Якоби элементарны в том смысле, что их можно выразить явными детерминантными формулами через классические многочлены от одного переменного. Этот случай уже содержателен, поскольку при подходящей специализации параметров (a, b) элементарные многочлены Якоби от N переменных задают характеры ортогональных и унитарно-симплектических групп, а также сферические функции на комплексных грассманианах.

Подход к доказательству когерентности, изложенный в настоящей работе, переносится и на более общий случай, когда многомерные многочлены Якоби

зависят от дополнительного параметра Джека θ . Однако необходимые вычисления, и без того достаточно трудоемкие, приобретают еще более громоздкий вид. Поэтому, чтобы не затенять основные идеи доказательства, мы решили ограничиться случаем $\theta = 1$.

§2. Ветвление многомерных многочленов Якоби, когерентные системы мер, пространство Ω

На протяжении всей статьи мы фиксируем вещественные параметры $a > -1$ и $b > -1$ и полагаем

$$\varepsilon = (a + b + 1)/2.$$

Обозначим через $p_l^{a,b}(x)$ классические многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $(1-x)^a(1+x)^b$; здесь $l = 0, 1, 2, \dots$ — степень многочлена.

В многомерном случае индекс l заменяется набором λ из N невозрастающих неотрицательных целых чисел. Множество всех таких наборов обозначим через $\mathcal{V}_N$:

$$\mathcal{V}_N = \{\lambda \in \mathbb{Z}^N : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0\}.$$

Элементы $\lambda \in \mathcal{V}_N$ можно интерпретировать как диаграммы Юнга, имеющие не более N строк ненулевой длины.

По определению «элементарные» многочлены Якоби от N переменных $x_1, \dots, x_N$ задаются формулой

$$P_\lambda^{a,b}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} [p_{\lambda_j + N - j}^{a,b}(x_i)]}{V(x)}, \quad \lambda \in \mathcal{V}_N;$$

здесь и далее в статье $V(x)$ — определитель Вандермонда:

$$V(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j). \quad (2)$$

Многочлены $P_\lambda^{a,b}$ симметричны относительно перестановок переменных. Они неоднородны: $P_\lambda^{a,b}$ имеет степень $|\lambda| := \sum \lambda_i$, а старшая однородная компонента есть, с точностью до множителя, многочлен Шура с индексом λ :

$$P_\lambda^{a,b}(x_1, \dots, x_N) = k_{\lambda|N}^{a,b} s_\lambda(x_1, \dots, x_N) + \text{члены младших степеней}, \quad (3)$$

где $k_{\lambda|N}^{a,b}$ — ненулевой числовой множитель. Отсюда следует, что многочлены $P_\lambda^{a,b}$ образуют базис в алгебре всех симметрических многочленов от N переменных. Более того, они ортогональны по мере $m_N^{a,b}$ на N -мерном кубе $[-1, 1]^N$ с плотностью

$$\prod_{i=1}^N (1-x_i)^a (1+x_i)^b \cdot (V(x))^2$$

по мере Лебега: это легко выводится из аналогичного утверждения для $N = 1$.

Обозначим через H_N гильбертово пространство, состоящее из всех функций на $[-1, 1]^N$, квадратично интегрируемых по мере $m_N^{a,b}$ и инвариантных относительно перестановок координат. Поскольку симметрические многочлены плотны в H_N , многочлены $P_\lambda^{a,b}$ образуют ортогональный базис в H_N .

Нам понадобятся также многочлены Якоби, нормированные в единице:

$$\Phi_{\lambda}^{a,b}(x_1, \dots, x_N) = \frac{P_{\lambda}^{a,b}(x_1, \dots, x_N)}{P_{\lambda}^{a,b}(1, \dots, 1)}. \quad (4)$$

Положим в этом многочлене $x_N = 1$ и разложим получившийся симметрический многочлен по базису $\{\Phi_{\nu}^{a,b}(x_1, \dots, x_{N-1}) : \nu \in \mathcal{V}_{N-1}\}$, обозначив соответствующие коэффициенты символом $\Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu)$:

$$\Phi_{\lambda}^{a,b}(x_1, \dots, x_{N-1}, 1) = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_{N-1}} \Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) \Phi_{\nu}^{a,b}(x_1, \dots, x_{N-1}).$$

Коэффициенты $\Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu)$ зависят от параметров (a, b) , но для упрощения записи мы не включаем их в обозначение.

Лемма 2.1. *Для всех $N = 2, 3, \dots$ матрица Λ_{N-1}^N формата $\mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_{N-1}$, составленная из коэффициентов $\Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu)$ разложения, является стохастической.*

Доказательство. Очевидно, что $\sum_{\nu} \Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) = 1$ для любого λ . Неотрицательность коэффициентов $\Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu)$ неочевидна; этот факт доказан в [23, §7]. Оттуда же можно извлечь правило их вычисления, а также описание пар (λ, ν) , для которых $\Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) \neq 0$: а именно, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое μ , что $\mu \prec \lambda$ и $\nu \prec \mu \cup 0$, т. е.

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N$$

и

$$\mu_1 \geq \nu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{N-1} \geq \nu_{N-1} \geq 0. \quad \square$$

Последовательность множеств $\{\mathcal{V}_N : N = 1, 2, \dots\}$, связанных стохастическими матрицами Λ_{N-1}^N , является проективной цепочкой в смысле [7, разд. 2.2], и ниже в теореме 2.3 описана ее *граница* (определение этого понятия дано в [7, разд. 2.2]).

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных вещественных чисел и введем подпространство $\Omega \subset \mathbb{R}_+^{\infty} \times \mathbb{R}_+^{\infty} \times \mathbb{R}_+$, состоящее из троек $\omega = (\alpha, \beta, \delta)$, где

$$\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}_+^{\infty}, \quad \beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}_+^{\infty}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+,$$

и выполнено дополнительное условие

$$\sum \alpha_j + \sum \beta_j \leq \delta.$$

В силу этого условия подпространство Ω замкнуто в $\mathbb{R}_+^{\infty} \times \mathbb{R}_+^{\infty} \times \mathbb{R}_+$ относительно топологии прямого произведения и является локально компактным.

Далее, для $\omega = (\alpha, \beta, \delta) \in \Omega$ положим

$$\gamma := \delta - \sum \alpha_j - \sum \beta_j \geq 0$$

и

$$\Psi(x; \omega) = e^{\gamma(x-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_j(2 - \beta_j)(x-1)/2}{1 - \alpha_j(2 + \alpha_j)(x-1)/2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Приведенное определение взято из [23, (1.11)], где надо подставить $\theta = 1$, $\bar{a} = \bar{b} = 0$.

Теперь для каждого $N = 1, 2, \dots$ мы определяем марковское ядро $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda)$ на $\Omega \times \mathcal{V}_N$ посредством формулы

$$\Psi(x_1; \omega) \cdots \Psi(x_N; \omega) = \sum_{\lambda \in \mathcal{V}_N} \Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) \Phi_\lambda^{a,b}(x_1, \dots, x_N), \quad (5)$$

где $(x_1, \dots, x_N) \in [-1, 1]^N$

Подробнее, при фиксированном $\omega \in \Omega$ левая часть есть непрерывная симметрическая функция на кубе $[-1, 1]^N$, и поэтому она может быть разложена в ряд по нормированным многочленам Якоби, которые, напомним, образуют ортогональный базис в пространстве H_N . Коэффициенты разложения и являются нужными нам величинами $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda)$.

Не очевидно, что эти величины неотрицательны, но это следует из результатов статьи [23]. А тот факт, что их сумма равна 1 для любого фиксированного $\omega \in \Omega$, уже очевиден. Таким образом, $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda)$ есть действительно марковское ядро. Отметим еще, что оно непрерывно по ω (ср. [25, доказательство теоремы 8.1, шаг 1]).

Из построения ядер Λ_N^∞ следует, что они согласованы со стохастическими матрицами Λ_{N-1}^N :

$$\Lambda_N^\infty \Lambda_{N-1}^N = \Lambda_{N-1}^\infty, \quad N = 2, 3, \dots \quad (6)$$

Определение 2.2. Предположим, что для каждого $N = 1, 2, \dots$ задана комплексная мера на $\mathcal{V}_N$ с конечной вариацией. Скажем, что семейство $\{M_N\}$ таких мер является *когерентным*, если выполнено условие (1), т. е.

$$M_{N-1}(\nu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{V}_N} M_N(\lambda) \Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) \quad \text{для любого } \nu \in \mathcal{V}_{N-1}, \quad N = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Нас интересуют вероятностные меры, но по техническим соображениям приходится рассматривать и комплексные меры.

Следующая теорема является частным случаем результатов из [23] и [24].

Теорема 2.3. *Имеет место биективное соответствие $M_\infty \leftrightarrow \{M_N\}$ между произвольными вероятностными мерами на пространстве Ω и произвольными когерентными семействами вероятностных мер, задаваемое соотношениями*

$$M_N = M_\infty \Lambda_N^\infty, \quad N = 1, 2, \dots,$$

или, подробнее,

$$M_N(\lambda) = \int_\Omega M_\infty(d\omega) \Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) d\omega, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \lambda \in \mathcal{V}_N.$$

Будем говорить, что M_∞ является *граничной мерой* когерентного семейства $\{M_N\}$ вероятностных мер.

Описанная картина резко упрощается для так называемых вырожденных мер. Скажем, что семейство $\{M_N\}$ *вырождено*, если существует такое целое положительное число K , что для каждого N носитель меры M_N лежит в подмножестве

$$\mathcal{V}_N(K) := \{\lambda \in \mathcal{V}_N : \lambda_1 \leq K\} \subset \mathcal{V}_N.$$

Множество $\mathcal{V}_N(K)$ конечно, и его элементы суть диаграммы Юнга, заключенные в прямоугольной диаграмме $\square(N, K)$ с N строками и K столбцами.

Если $\{M_N\}$ — вырожденное когерентное семейство вероятностных мер с носителями в $\mathcal{V}_N(K)$ для всех N , то соответствующая граничная мера M_∞ на Ω сосредоточена на подмножестве

$$\Omega(K) := \{\omega = (\alpha, \beta, \delta) \in \Omega : \alpha \equiv 0, \beta_{K+1} = \beta_{K+2} = \dots = 0, \delta = \beta_1 + \dots + \beta_K\}.$$

Мы будем отождествлять $\Omega(K)$ с замкнутым подмножеством в $[0, 1]^K$, состоящим из векторов с вещественными невозрастающими координатами:

$$\Omega(K) = \{(\beta_1 \geq \dots \geq \beta_K) \in [0, 1]^K\}.$$

Таким образом, в случае вырожденного когерентного семейства граничная мера сосредоточена на некотором конечномерном кусочке бесконечномерной границы Ω . Мы не будем доказывать это утверждение; для наших целей достаточно следующего факта.

Предложение 2.4. Если $\omega \in \Omega(K)$, то $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathcal{V}_N \setminus \mathcal{V}_N(K)$.

Доказательство. Для $\omega = (\beta_1, \dots, \beta_K) \in \Omega(K)$ левая часть в (5) сильно упрощается и приобретает вид

$$\prod_{i=1}^N \Psi(x_i, (\beta_1, \dots, \beta_K)) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K (1 + \frac{1}{2} \beta_j (2 - \beta_j) (x_i - 1)). \quad (8)$$

В разложении этого многочлена в базисе многочленов Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ ненулевой вклад дают только индексы $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$. Поэтому аналогичное утверждение справедливо и для разложения по многочленам Якоби. $\square$

В следующем утверждении имеется в виду биективное соответствие $M_\infty \leftrightarrow \{M_N\}$ из теоремы 2.3.

Следствие 2.5. Если M_∞ — вероятностная мера на $\Omega(K) \subset \Omega$, то отвечающие ей меры M_N сосредоточены на подмножествах $\mathcal{V}_N(K) \subset \mathcal{V}_N$.

§3. Z-меры

Положим

$$D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -(1+b)/2\}.$$

При $z \in D$ функция $(1+x)^z$ квадратично интегрируема с весом $(1-x)^a(1+x)^b$ на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому функция от N переменных

$$f_{z|N}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N (1+x_i)^z, \quad z \in D,$$

лежит в H_N .

Ниже $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в H_N . Для любой пары чисел $z, z' \in D$ выражение

$$M_N(\lambda \mid z, z', a, b) = \frac{(f_{z|N}, P_\lambda^{a,b})(P_\lambda^{a,b}, f_{z'|N})}{(f_{z|N}, f_{z'|N}) \|P_\lambda^{a,b}\|^2} \quad (9)$$

определяет комплексную меру на $\mathcal{V}_N$ (знаменатель не обращается в 0, см. следствие 3.4 ниже). Мы называем ее *z-мерой*. Явная формула для z-меры приведена ниже в предложении 3.1.

Отметим, что формула (9) оставляет нам свободу в выборе стандартизации многочленов $P_{\lambda}^{a,b}$: правая часть не меняется при умножении многочленов на произвольные ненулевые константы.

Из (9) видно, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_N} M_N(\lambda \mid z, z', a, b) = 1.$$

Таким образом, если параметры $z, z' \in D$ таковы, что все числа $M_N(\lambda \mid z, z', a, b)$ вещественны и неотрицательны, то z -мера является вероятностной мерой. Например, так будет, если параметры сопряжены друг другу.

Отметим еще, что z -мера не меняется при перестановке $z \leftrightarrow z'$. Это следствие того факта, что при замене z на $\bar{z}$ функция $f_{z|N}$ меняется на сопряженную.

Предложение 3.1. *Для z -мер имеет место следующая явная формула:*

$$\begin{aligned} M_N(\lambda \mid z, z', a, b) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} ((\lambda_i + N - i + \varepsilon)^2 - (\lambda_j + N - j + \varepsilon)^2)^2 \\ &\times \prod_{i=1}^N \frac{(2\lambda_i + 2N - 2i + 2\varepsilon)\Gamma(\lambda_i + N - i + a + 1)\Gamma(\lambda_i + N - i + 2\varepsilon)}{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(2\varepsilon + 2N + z + \lambda_i - i)\Gamma(z' - \lambda_i + i)\Gamma(2\varepsilon + 2N + z' + \lambda_i - i)} \\ &\times \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(z + i)\Gamma(b + z + i)\Gamma(z' + i)\Gamma(b + z' + i)\Gamma(a + b + z + z' + N + i)}{\Gamma(\lambda_i + N - i + b + 1)\Gamma(\lambda_i + N - i + 1)\Gamma(a + i)\Gamma(b + z + z' + i)\Gamma(i)}. \end{aligned}$$

Это выражение было приведено в [5, §8] без доказательства и с неопределенной нормировочной константой. Там же объясняется, что z -мера задает N -частичный ортогональный ансамбль для некоторой системы дискретных многочленов гипергеометрического типа. Объясним это подробнее. Для упрощения формул мы будем использовать обозначения

$$l = (l_1, \dots, l_N), \quad l_i := \lambda_i + N - i, \quad (10)$$

$$\tilde{l} = (\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_N), \quad \tilde{l}_i := (l_i + \varepsilon)^2. \quad (11)$$

Когда λ пробегает $\mathcal{Y}_N$, $l = (l_1, \dots, l_N)$ пробегает множество всех наборов из N строго убывающих чисел из $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$. В этих обозначениях выражение для z -меры можно представить в виде

$$M_N(\lambda \mid z, z', a, b) = \prod_{i=1}^N F_{a,b,N}(l_i) \cdot V^2(\tilde{l}), \quad (12)$$

где $F_{a,b,N}(x)$ — некоторая функция на $\mathbb{Z}_+$, служащая весовой функцией для некоторой системы ортогональных многочленов на квадратичной решетке $\tilde{\mathbb{Z}}_+ := \{(x + \varepsilon)^2 : x \in \mathbb{Z}_+\}$. Многочлены, о которых идет речь, существуют только в конечном числе (поскольку весовая функция имеет только конечное число моментов) и выражаются через гипергеометрический ряд ${}_4F_3(1)$; подробнее о них см. работу Неретина [21]. Подчеркнем, что вес удобно выражать через переменную $x \in \mathbb{Z}_+$, тогда как аргументом многочленов служит $\tilde{x} := (x + \varepsilon)^2$; отметим еще, что числа $\tilde{x}$ строго возрастают, когда x пробегает $\mathbb{Z}_+$: это видно из неравенства $\varepsilon > -1/2$.

Из вида правой части в (12) и следует, что мера задает ортогональный полиномиальный ансамбль, см. [17]. Аналогичная картина имеет место в контексте

так называемых zw -мер на графе Гельфанда–Цетлина: там возникает ортогональный полиномиальный ансамбль на обычной решетке $\mathbb{Z}$, связанный с другой конечной системой ортогональных многочленов (они выражаются через ${}_3F_2(1)$, см. [3]).

Доказательство предложения 3.1. Для вычислений нам нужно выбрать стандартизацию многочленов. Для классических многочленов Якоби мы используем ту же стандартизацию, что в [8, т. 2]:

$$p_n^{a,b}(x) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+1)} \cdot {}_2F_1\left(-n, n+a+b+1; a+1; \frac{1-x}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Тем самым задана стандартизация и многочленов $P_\lambda^{a,b}$.

Предложение 3.1 будет следовать из доказанных ниже трех лемм, в которых вычислены все величины, входящие в формулу (9).

Лемма 3.2.

$$(f_{z|N}, P_\lambda^{a,b}) = N! \prod_{i=1}^N \frac{2^{a+b+z+i} \Gamma(b+z+i) \Gamma(1+a+l_i) \Gamma(z+i)}{\Gamma(l_i+1) \Gamma(z+N-l_i) \Gamma(2\varepsilon+N+z+l_i)} \cdot V^2(\tilde{l}). \quad (13)$$

Доказательство. Для $a = b = 0$ лемма была доказана в [28]. Вычисление для произвольных a и b аналогично. $\square$

Лемма 3.3.

$$(f_{z|N}, f_{\bar{z}|N}) = 2^{N(N+a+b+z+z')} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(a+i) \Gamma(b+z+z'+i) \Gamma(1+i)}{\Gamma(a+b+z+z'+N+i)}. \quad (14)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (f_{z|N}, f_{\bar{z}|N}) &= \int_{[-1,1]^N} V^2(x) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^a (1+x_i)^{b+z+z'} dx \\ &= 2^{N(N+a+b+z+z')} \int_{[0,1]^N} V^2(x) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^a x_i^{b+z+z'} dx \\ &= 2^{N(N+a+b+z+z')} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(a+i) \Gamma(b+z+z'+i) \Gamma(1+i)}{\Gamma(a+b+z+z'+N+i)}, \end{aligned}$$

где последнее равенство сводится к частному случаю интеграла Сельберга

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^N} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{A_1} (1-x_i)^{A_2} \right) V^2(x) dx_1 \cdots dx_N \\ &= S_N(A_1, A_2) := \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(A_1+j) \Gamma(A_2+j) \Gamma(1+j)}{\Gamma(A_1+A_2+N+j)}. \quad (15) \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 3.4. Для любых $z, z' \in D$ левая часть в (14) не обращается в нуль.

Доказательство. Единственным возможным источником обнуления мог бы быть множитель $1/\Gamma(a+b+z+z'+N+i)$ в правой части. Но на самом деле он не обращается в нуль, поскольку $\operatorname{Re}(a+b+z+z'+N+i) > 0$ для $z, z' \in D$. $\square$

Лемма 3.5.

$$\|P_\lambda^{a,b}\|^2 = N! \prod_{j=1}^N \frac{2^{a+b}\Gamma(l_i+a+1)\Gamma(l_i+b+1)}{(l_i+\varepsilon)\Gamma(l_i+2\varepsilon)\Gamma(l_i+1)}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|P_\lambda^{a,b}\|^2 &= \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 (P_\lambda^{a,b}(x_1, \dots, x_N))^2 V^2(x) \prod_{i=1}^N (1-x_i)^a (1+x_i)^b dx_i \\ &= \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 (\det[p_{\lambda_j+N-j}^{a,b}(x_i)])^2 \prod_{i=1}^N (1-x_i)^a (1+x_i)^b dx_i \\ &= \sum_{\sigma, \tau} \prod_{i=1}^N \int_{-1}^1 (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma\tau)} p_{\lambda_{\sigma(i)}+N-\sigma(i)}^{a,b}(x_i) p_{\lambda_{\tau(i)}+N-\tau(i)}^{a,b}(x_i) (1-x_i)^a (1+x_i)^b dx_i, \end{aligned}$$

где сумма берется по всем перестановкам σ и τ множества $\{1, \dots, N\}$. Если $\sigma \neq \tau$, то соответствующий член суммы в силу ортогональности одномерных многочленов Якоби $p_l^{a,b}$ равен 0. Значит,

$$\|P_\lambda^{a,b}\|^2 = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^N \int_{-1}^1 (p_{\lambda_{\sigma(i)}+N-\sigma(i)}^{a,b}(x_i))^2 (1-x_i)^a (1+x_i)^b dx_i.$$

Нетрудно видеть, что члены суммы не зависят от σ и равны

$$\prod_{i=1}^N \|p_{\lambda_i+N-i}\|^2.$$

Умножая на количество членов суммы ($N!$) и пользуясь равенством

$$\|p_l^{a,b}\|^2 = \frac{2^{a+b+1}\Gamma(l+a+1)\Gamma(l+b+1)}{(2l+2\varepsilon)\Gamma(l+2\varepsilon)\Gamma(l+1)},$$

получаем требуемое утверждение. $\square$

Для завершения доказательства предложения 3.1 надо подставить в (9) явные значения всех множителей, полученные в приведенных выше трех леммах. $\square$

Предложение 3.6. *Предположим, что*

$$z = K \in \{1, 2, \dots\}, \quad z' = K + s, \quad s > -1. \quad (16)$$

Тогда z -меры корректно определены и все семейство является вырожденным: для каждого N носитель N -й меры лежит в $\mathcal{V}_N(K)$. Более того, все меры неотрицательны и, стало быть, являются вероятностными.

Доказательство. В самом деле, оба параметра лежат в полуплоскости D . Далее, явное выражение для меры, приведенное в предложении 3.1, содержит множитель $1/\Gamma(z - \lambda_1 + 1) = 1/\Gamma(K - \lambda_1 + 1)$ в знаменателе. Если $\lambda_1 > K$, то

этот множитель обращается в нуль. Наконец, для любого $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$ формула предложения 3.1 дает строго положительное число. $\square$

§4. Формулировка основного результата. Редукция к вырожденному случаю

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

Теорема 4.1. *Предположим, что параметры z и z' лежат в полуплоскости D . Тогда семейство z -мер $\{M_N(\lambda \mid z, z', a, b) : N = 1, 2, \dots\}$ является когерентным.*

Отсюда и из теоремы 2.3 следует, что если дополнительно потребовать, чтобы параметры были таковы, что меры являются вероятностными (достаточное условие: $z' = \bar{z}$), то тогда они определяют некоторую вероятностную меру $M_\infty(d\omega \mid z, z', a, b)$ на пространстве Ω .

Цель этого параграфа — свести доказательство теоремы к вырожденному случаю, который разбирается ниже в §§5–7. Таким образом, мы временно примем на веру, что утверждение теоремы справедливо в случае, когда $z = K$ и $z' = K + s$, где s — вещественное, большее -1 , и при этом допущении будем доказывать, что теорема верна для произвольных комплексных z, z' , лежащих в полуплоскости D (ср. [25, §3]).

Шаг 1. Зафиксируем $z = K$, N и $\nu \in \mathcal{V}_{N-1}$ и докажем, что соотношение когерентности

$$M_{N-1}(\nu \mid z, z', a, b) - \sum_{\lambda \sqsupset \nu} M_N(\lambda \mid z, z', a, b) \Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) = 0 \quad (17)$$

выполнено не только для $z' = K + s$, но и для произвольного $z' \in D$; здесь и ниже символ $\lambda \sqsupset \nu$ означает, что координаты наборов λ и ν перемежаются (см. доказательство леммы 2.1).

В самом деле, при целом $z = K$ вес любой диаграммы, даваемый формулой предложения 3.1, является рациональной функцией параметра z' , поскольку та часть формулы, которая зависит от z' , может быть представлена как произведение множителей вида $\Gamma(z' + x)/\Gamma(z' + y)$, где x и y отличаются на целое число. Далее, опять-таки из того факта, что $z = K$, следует, что сумма по λ в левой части формулы (17) конечна. Стало быть, левая часть в (17) является рациональной функцией от z' . Поэтому ее обращение в 0 на луче $z' = K + s$ означает, что она равна 0 тождественно.

Шаг 2. Теперь, наоборот, зафиксируем произвольное $z' \in D$ и рассмотрим левую часть в (17) как функцию $G(z)$ комплексного параметра z . Мы будем доказывать, что $G(z) \equiv 0$ в полуплоскости D в предположении, что $G(z) = 0$ для целых положительных $z = K$.

Мы будем опираться на теорему Карлсона, причем нам достаточно ее слабой версии, которая говорит, что функция, голоморфная в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{const}$, имеющая полиномиальный рост на бесконечности и обращающаяся в 0 в целых точках, равна нулю тождественно. См., например, [1, теорема 2.8.1] (там предполагается, что функция ограничена, но случай полиномиального роста легко к этому сводится).

Проверим, что наша функция $G(z)$ голоморфна в полуплоскости D . Для этого воспользуемся исходным определением (9). Заметим, что $z \mapsto f_{z|N}$ является голоморфной вектор-функцией со значениями в гильбертовом пространстве H_N . Отсюда и из (9) видно, что вес любой диаграммы является голоморфной функцией от z и что ряд в (17) сходится абсолютно и равномерно на компактах по параметру $z \in D$ (здесь существенно еще, что $0 \leq \Lambda_{N-1}^N(\lambda, \nu) \leq 1$). А это и влечет за собой голоморфность функции $G(z)$.

Ввиду голоморфности функции $G(z)$ достаточно доказать ее обращение в 0 в произвольной правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > C$, где константу C можно выбрать сколь угодно большой.

Далее, тот факт, что вес любой фиксированной диаграммы имеет от силы полиномиальный рост по параметру z , легко получается из явной формулы предложения 3.1 и хорошо известного асимптотического соотношения

$$\frac{\Gamma(\operatorname{const}_1 + z)}{\Gamma(\operatorname{const}_2 + z)} = z^{\operatorname{const}_1 - \operatorname{const}_2} (1 + O(1/z)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (18)$$

если $-\pi + \delta < \arg z < \pi - \delta$, где $\delta > 0$,

см. [8, т. 1, 1.19 (5)].

Поэтому проблема лишь в контроле сходимости ряда по λ в (17), и здесь мы воспользуемся возможностью считать, что $\operatorname{Re} z \gg 0$, поскольку при увеличении $\operatorname{Re} z$ улучшается сходимость ряда по λ .

Шаг 3. Займемся теперь контролем сходимости ряда по λ . Ввиду условия $\lambda \sqsubset \nu$ все координаты λ_i с $i > 2$ меняются в конечных пределах, так что мы можем считать их фиксированными и следить только за двумя переменными координатами, λ_1 и λ_2 . Мы докажем, что при $\operatorname{Re} z \gg 0$ величина $|M_N(\lambda \mid z, z', a, b)|$ мажорируется произведением многочлена от z на $((\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1))^{-2}$, откуда будет следовать желаемый вывод, что $G(z)$ имеет от силы полиномиальный рост на бесконечности.

Представим формулу для веса $M_N(\lambda \mid z, z', a, b)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq N} ((\lambda_i + N - i + \varepsilon)^2 - (\lambda_j + N - j + \varepsilon)^2)^2 \prod_{i=1}^N (2\lambda_i + 2N - 2i + 2\varepsilon) \\ & \times \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(z' + i)\Gamma(b + z' + i)}{\Gamma(z' - \lambda_i + i)\Gamma(2\varepsilon + 2N + z' + \lambda_i - i)} \\ & \times \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\lambda_i + N - i + a + 1)\Gamma(\lambda_i + N - i + 2\varepsilon)\Gamma(a + b + z + z' + N + i)}{\Gamma(\lambda_i + N - i + b + 1)\Gamma(\lambda_i + N - i + 1)\Gamma(a + i)\Gamma(b + z + z' + i)\Gamma(i)} \\ & \times \prod_{i=3}^N \frac{\Gamma(z + i)\Gamma(b + z + i)}{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(2\varepsilon + 2N + z + \lambda_i - i)} \\ & \times \prod_{i=1}^2 \frac{\Gamma(z + i)\Gamma(b + z + i)}{\Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(2\varepsilon + 2N + z + \lambda_i - i)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Каждое из выражений, стоящих в первых четырех строках (а значит, и их произведение), имеет от силы полиномиальный рост по z и по (λ_1, λ_2) . В самом деле, это устанавливается с помощью оценки (18) и того факта, что если $c, d \in \mathbb{C}$

фиксированы, а n пробегает $\mathbb{Z}$, то $(\Gamma(c-n)\Gamma(d+n))^{-1}$ имеет, самое большее, полиномиальный рост по n при $n \rightarrow \infty$, см. [25, лемма 3.1].

Оценим теперь последнее выражение (19). Выделим в нем множитель, отвечающий $i = 1$, и покажем, что при $\operatorname{Re} z \gg 0$ его модуль мажорируется произведением многочлена по z на $(\lambda_1 + 1)^{-p}$, где p — натуральное число, которое можно выбрать заранее сколь угодно большим.

В самом деле, положим $L = 2N - 1 + 2\varepsilon$. Интересующий нас множитель имеет вид

$$\frac{\Gamma(z+b+1)\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-\lambda_1)\Gamma(\lambda_1+L+z)}.$$

Фиксируя λ_1 и предполагая, что $\lambda_1 \geq p$, мы представим его как произведение трех выражений:

$$\frac{z(z-1)\cdots(z-p+1)\Gamma(z+b+1)}{\Gamma(L+z)}, \quad (20)$$

$$\frac{(z-p)\cdots(z-\lambda_1+1)}{(L+z)\cdots(L+z+\lambda_1-p-1)} = \prod_{i=1}^{\lambda_1-p} \frac{z-p+1-i}{L+z+i-1}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{(L+z+\lambda_1-1)\cdots(L+z+\lambda_1-p)} \quad (22)$$

Выражение (20) не зависит от λ_1 и имеет, самое большее, полиномиальный рост по z .

Выражение (21) по модулю меньше 1, коль скоро $\operatorname{Re} z$ достаточно велико. В самом деле, сравним i -е сомножители в числителе и знаменателе, $i = 1, 2, \dots$. Их мнимые части одинаковы и равны $\operatorname{Im} z$. В знаменателе вещественная часть положительна и все время увеличивается на 1, тогда как в числителе она сначала также положительна (и меньше, чем в знаменателе), потом последовательно уменьшается на 1, но с некоторого момента, при переходе в отрицательную область, ее модуль начинает увеличиваться на 1. Отсюда видно, что модуль i -го сомножителя в числителе всегда меньше, нежели модуль соответствующего множителя в знаменателе.

Наконец, (22) не превосходит $(\lambda_1 + 1)^{-p}$.

Второй множитель, связанный с λ_2 , оценивается точно так же. Если выбрать p достаточно большим, то множитель $((\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1))^{-p}$ будет компенсировать возможный полиномиальный рост по (λ_1, λ_2) остальной части веса, и в итоге мы сможем добиться желаемой оценки.

Это завершает редукцию к вырожденному случаю.

§5. Начало доказательства для вырожденного случая

С этого места и до конца статьи мы доказываем теорему 4.1 для вырожденных z -мер. Соответственно мы предполагаем, что основные параметры имеют вид (16), где K и s фиксированы. Для упрощения обозначений полагаем

$$M_N(\lambda) := M_N(\lambda \mid K, K+s, a, b), \quad \lambda \in \mathcal{V}_N(K).$$

Предположим, что мы нашли вероятностную меру M_∞ на $\Omega(K)$, для которой выполнены соотношения

$$M_N(\lambda) = \int_{\omega \in \Omega(K)} M_\infty(d\omega) \Lambda_N^\infty(\omega, \lambda), \quad N = 1, 2, \dots, \lambda \in \mathcal{V}_N(K). \quad (23)$$

Тогда отсюда сразу будет следовать когерентность семейства $\{M_N\}$: это немедленно проверяется с помощью равенства (6).

Общая теория дает указание на то, как найти меру M_∞ . А именно, она должна получаться как предел при $N \rightarrow \infty$ образа меры M_N при отображении

$$\mathcal{V}_N \ni \lambda \mapsto \left(\frac{\lambda'_1}{N}, \dots, \frac{\lambda'_K}{N} \right) \in \Omega(K).$$

Явное вычисление предельной меры не сложно, но достаточно громоздко. Поэтому мы его опустим (формально оно не нужно для доказательства) и приведем конечный результат:

$$M_\infty(d\omega) = \text{const} \cdot (V((1 - \beta_1)^2, \dots, (1 - \beta_K)^2))^2 \times \prod_{j=1}^K (1 - (1 - \beta_j)^2)^s (1 - \beta_j)^{2b+1} \cdot d\beta_1 \cdots d\beta_K.$$

Удобно сделать замену координат, положив

$$(t_1, \dots, t_K) = ((1 - \beta_1)^2, \dots, (1 - \beta_K)^2).$$

В новых координатах наша мера есть не что иное, как K -мерное бета-распределение из интеграла Сельберга (см. выше (15)), откуда сразу получается и значение нормировочной константы:

$$M_\infty(d\omega) = K! S_K^{-1}(b, s) \cdot V^2(t_1, \dots, t_K) \cdot \prod_{j=1}^K t_j^b (1 - t_j)^s \cdot dt_1 \cdots dt_K. \quad (24)$$

Явное выражение для константы $S_K(b, s)$ дано в (15); множитель $K!$ возникает из-за того, что интегрирование ведется не по всему кубу $[0, 1]^K$, а по его подмножеству $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K \leq 1$; в дальнейшем мы избавимся от этого ограничения.

Следующий шаг состоит в нахождении удобного выражения для ядра $\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda)$ на $\Omega(K) \times \mathcal{V}_N(K)$.

Для $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$ обозначим через $\mu \in \mathcal{V}_K(N)$ диаграмму следующего вида:

$$\mu = (N - \lambda'_K, \dots, N - \lambda'_1).$$

Нам понадобится *дуальное тождество Коши* для многомерных многочленов Якоби:

$$\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K (x_i + y_j) = \sum_{\lambda \in \mathcal{V}_N(K)} \mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y_1, \dots, y_K) \mathcal{P}_{\lambda|N}^{a,b}(x_1, \dots, x_N), \quad (25)$$

где $\mu \in \mathcal{V}_K(N)$ жестко связано с λ , как указано выше,

$$\mathcal{P}_{\lambda|N}^{a,b} = P_{\lambda|N}^{a,b} / k_{\lambda|N}^{a,b},$$

второй нижний индекс добавлен ввиду того, что у нас теперь появились многочлены от разного числа переменных, а нормировочные коэффициенты $k_{\lambda|N}^{a,b}$ определены в (3). Тождество (25) можно извлечь, например, из [20], где оно доказано в более широком контексте.

Предложение 5.1. Для $\omega = (\beta_1, \dots, \beta_K) \in \Omega(K)$ и $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$ имеет место формула

$$\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) = \prod_{j=1}^K \left(\frac{\beta_j(1-\beta_j)}{2} \right)^N \cdot \mathcal{P}_\lambda^{a,b}(1^N) \cdot \mathcal{P}_\mu^{b,a}(y_1, \dots, y_K), \quad (26)$$

где

$$1^N = (\underbrace{1, \dots, 1}_N)$$

и

$$y_j = \frac{1 + (1 - \beta_j)^2}{1 - (1 - \beta_j)^2} = \frac{1 + t_j}{1 - t_j}. \quad (27)$$

Доказательство. Согласно определению, $\Lambda^\infty(\omega, \lambda)$ есть коэффициент с индексом λ в разложении выражения (8) по нормированным многочленам Якоби (4). Заметим теперь, что (8) представимо в виде

$$\prod_{j=1}^K \left(\frac{\beta_j(1-\beta_j)}{2} \right)^N \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K (x_i + y_j),$$

где величины y_j даются формулой (27). А тогда результат следует из дуального тождества Коши (25). $\square$

Напомним, что наша задача состоит в доказательстве соотношения (23). Теперь мы можем переписать его в следующем виде:

$$\frac{M_N(\lambda)}{\mathcal{P}_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)} = 2^{-NK} S_K^{-1}(b, s) \int_{t \in [0,1]^K} \prod_{j=1}^K t_j^b (1 - t_j)^{s+N} \cdot V^2(t) \mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y) dt.$$

Здесь используются сокращения $t = (t_1, \dots, t_K)$, $y = (y_1, \dots, y_K)$ и y выражается через t согласно (27).

Предынтегральный множитель $K!$ исчез, поскольку мы перешли к интегралу по всему кубу, пользуясь тем, что многочлен в правой части симметричен.

Заметим теперь, что левая и правая части в доказываемом соотношении (23) суть вероятностные меры на $\mathcal{V}_N(K)$. Это дает нам возможность несколько упростить дальнейшие вычисления, игнорируя всюду, где это законно, множители, не зависящие от λ . Условимся в таких случаях заменять знак равенства тильдой. В качестве первого примера применения этого соглашения перепишем последнюю формулу в виде

$$\frac{M_N(\lambda)}{\mathcal{P}_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)} \sim \int_{t \in [0,1]^K} \prod_{j=1}^K t_j^b (1 - t_j)^{s+N} \cdot V^2(t) \mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y) dt. \quad (28)$$

§6. Интеграл типа Каделла

Интеграл Каделла, или обобщенный интеграл Сельберга, возникает при интегрировании многочлена Джека по многомерному бета-распределению. В интересующем нас «элементарном» частном случае параметр Джека θ равен 1; тогда определитель Вандермонда берется в степени $2\theta = 2$ и многочлен Джека превращается в многочлен Шура. См. [9, (3.13)].

В этом параграфе мы вычисляем интеграл

$$I := \int_{t \in [0,1]^K} \prod_{j=1}^K t_j^b (1-t_j)^{s+N} \cdot V^2(t) \mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y) dt,$$

стоящий в правой части формулы (28). Он похож на «элементарный» интеграл Каделла, только многочлен Шура у нас заменен многочленом Якоби, причем от преобразованных аргументов.

По аналогии с обозначениями $l = (l_i)$ и $\tilde{l} = (\tilde{l}_i)$ для λ введем аналогичные обозначения для μ :

$$m = (m_1, \dots, m_K), \quad m_j := \mu_j + K - j, \quad (29)$$

$$\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_K), \quad \tilde{m}_j := (m_j + \varepsilon)^2. \quad (30)$$

Предложение 6.1. *Справедлива формула*

$$I \sim \frac{1}{k_{\mu|K}^{b,a}} \prod_{j=1}^K \frac{\Gamma(m_j + b + 1) \Gamma(s + N + K - m_j) \Gamma(s + 2\varepsilon + N + K + m_j)}{\Gamma(m_j + 1)} \cdot V(\tilde{m}). \quad (31)$$

Доказательство. Сделав замену переменных $t \rightarrow y$, мы получим после несложных преобразований

$$I = 2^{(s+N+K)K} \int_{[1,\infty]^K} V^2(y) \mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y) \prod_{j=1}^K (y_j - 1)^b (y_j + 1)^{-(s+N+b+2K)} dy.$$

В результате подынтегральное выражение упростилось: в нем остался только один набор переменных y вместо двух (связанных друг с другом) наборов t и y . Однако область интегрирования изменилась: куб $[0,1]^K$ заменился на $[1,\infty]^K$. Следующая лемма позволит нам вернуться назад к интегралу по кубу. Идея этой леммы подсказана рассуждением в [11, §8]; см. также [19, гл. VI, §9, пример 3].

Лемма 6.2. *Пусть $F(y) = F(y_1, \dots, y_K)$ — произвольный многочлен. Тогда*

$$\begin{aligned} & \int_{[1,\infty]^K} F(y) \prod_{j=1}^K (y_j - 1)^b (y_j + 1)^{-B} dy \\ &= \left(\frac{\sin(\pi B)}{\sin(\pi(B - b - 1))} \right)^K \int_{[-1,1]^K} F(y) \prod_{j=1}^K (1 - y_j)^b (1 + y_j)^{-B} dy. \end{aligned} \quad (32)$$

Прежде всего, поясним, как надо понимать это равенство. Здесь, как и раньше, $b > -1$, а новый параметр B есть комплексное число с $\operatorname{Re} B > 1$. Тогда интеграл в левой части сходится. С другой стороны, интеграл в правой части, наоборот, расходится, поэтому его надо понимать в смысле аналитического продолжения по B .

Доказательство леммы 6.2. Достаточно доказать утверждение леммы для $K = 1$ и $F(y) = (y + 1)^n$, где n — целое неотрицательное число. Тогда оба

интеграла сводятся к классическому бета-интегралу: интеграл в левой части равен

$$2^{-B+b+n+1} \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(B-b-n-1)}{\Gamma(B-n)},$$

а интеграл в правой части равен

$$2^{-B+b+n+1} \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(-B+n+1)}{\Gamma(-B+b+n+2)}.$$

Используя классическое тождество

$$\Gamma(u)\Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \quad (33)$$

и тот факт, что n есть целое число, получаем, что отношение интегралов равно $\sin(\pi B)/\sin(\pi(B-b-1))$. $\square$

Применим теперь лемму, взяв в ней $F(y) = V^2(y)\mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y)$ и $B = s+b+N+2K$. Тогда получим

$$I \sim \int_{[-1,1]^K} V^2(y)\mathcal{P}_{\mu|K}^{b,a}(y) \prod_{j=1}^K (1-y_j)^b (1+y_j)^{-B} dy \quad (34)$$

$$= \frac{1}{k_{\mu|K}^{b,a}} \int_{[-1,1]^K} V^2(y)P_{\mu|K}^{b,a}(y) \prod_{j=1}^K (1-y_j)^b (1+y_j)^{-B} dy, \quad (35)$$

где, напомним, в правой части подразумевается аналитическое продолжение по параметру B .

Заметим теперь, что интеграл в правой части имеет тот же вид, что в (13) из леммы 3.2, только в ней необходимо сделать замену

$$(N, \{l_i\}, a, b) \rightarrow (K, \{m_j\}, b, a)$$

и положить $z = -B - a$. Применяя эту формулу и используя тождество (33) для гамма-функции, получаем искомый результат. $\square$

§ 7. Окончание доказательства для вырожденного случая

Займемся теперь обработкой левой части формулы (28), т. е. выражения

$$\frac{M_N(\lambda)}{\mathcal{P}_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)} = \frac{k_{\lambda|N}^{a,b} M_N(\lambda)}{P_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)}. \quad (36)$$

Найдем явный вид величины $P_{\lambda}^{a,b}(1^N)$.

Предложение 7.1.

$$P_{\lambda}^{a,b}(1^N) = \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(l_i + a + 1)2^{-(N-i)}}{\Gamma(l_i + 1)\Gamma(N - i + a + 1)\Gamma(N - i + 1)} \cdot V(\tilde{l}).$$

Доказательство. Воспользуемся следующим хорошо известным тождеством: если

$$f_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(i)} t^m, \quad i = 1, \dots, N,$$

то

$$\frac{\det[f_i(t_j)]_{1 \leq i, j \leq N}}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (t_i - t_j)} = \sum_{\mu} \det[a_{\mu_j + N - j}^{(i)}] s_{\mu}(t_1, \dots, t_N),$$

где сумма берется по всем разбиениям μ длины, не превышающей N . В частности, если все ряды $f_i(t)$ обрываются, то

$$\left. \frac{\det[f_i(t_j)]_{1 \leq i, j \leq N}}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (t_i - t_j)} \right|_{t_1 = \dots = t_N = 0} = \sum_{\mu} \det[a_{N-j}^{(i)}].$$

Мы применим эту формулу к $f_i(t) = p_{\lambda_i + N - i}^{a,b}(1+t)$. Согласно [8, т. 2, 10.8(16)],

$$p_l^{a,b}(1+t) = \sum_{m \geq 0} \frac{l^{\downarrow m} (l+2\varepsilon)^{\uparrow m} \Gamma(l+a+1)}{2^m m! \Gamma(a+m+1) \Gamma(l+1)} t^m,$$

где используются обозначения

$$u^{\downarrow n} := u(u-1) \cdots (u-n+1) := \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+1-n)},$$

$$u^{\uparrow n} = u(u+1) \cdots (u+n-1) = \frac{\Gamma(u+n)}{\Gamma(u)}$$

для убывающих и возрастающих факториальных степеней. Подставляя $t = 0$, мы получаем, что

$$P_{\lambda}^{a,b}(1^N) = \det[A_{ij}],$$

где

$$A_{ij} = \frac{l_i^{\downarrow(N-j)} (l_i+2\varepsilon)^{\uparrow(N-j)} \Gamma(l_i+a+1)}{2^{(N-j)} \Gamma(N-j+1) \Gamma(N-j+a+1) \Gamma(l_i+1)}.$$

Вынося из определителя общие множители по строкам и столбцам, получаем, что

$$P_{\lambda}^{a,b}(1^N) = \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(l_i+a+1)}{2^{(N-i)} \Gamma(N-i+1) \Gamma(N-i+a+1) \Gamma(l_i+1)} \det[l_i^{\downarrow(N-j)} (l_i+2\varepsilon)^{\uparrow(N-j)}].$$

Значение последнего определителя известно (см., например, [18, лемма 4] и равно $V(\tilde{l})$, откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Напомним, что для $M_N(\lambda)$ мы располагаем явным выражением, см. предложение 3.1. Для множителей $k_{\lambda|N}^{a,b}$ и $k_{\mu|K}^{b,a}$ также нетрудно написать явные формулы (см. ниже). Таким образом, мы знаем все величины, входящие в доказываемое соотношение (28). Однако проблема в том, что левая часть у нас выписана через переменные l_i , связанные с диаграммой Юнга $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$, тогда как правая часть — через переменные m_j , относящиеся к дополнительной диаграмме $\mu \in \mathcal{V}_K(N)$.

Чтобы преодолеть это затруднение, мы воспользуемся хорошо известным комбинаторным фактом (см. [19, гл. I, (1.7)]): числовые наборы $\{l_i\}$ и $\{m_j\}$ не пересекаются и их объединение совпадает с $\{0, 1, \dots, N+K-1\}$. Отсюда

следует, что для любой функции $\phi(x) \neq 0$ на множестве $\{0, 1, \dots, N + K - 1\}$ произведение

$$\prod_{i=1}^N \phi(l_i) \cdot \prod_{j=1}^K \phi(m_j)$$

не зависит от диаграммы $\lambda \in \mathcal{V}_N(K)$. Или, что то же самое,

$$\prod_{i=1}^N \phi(l_i) \sim \left(\prod_{j=1}^K \phi(m_j) \right)^{-1}. \quad (37)$$

Левая часть в (28), т.е. выражение (36), имеет следующую структуру: во-первых, произведение вида $\prod \phi(l_i)$, где каждое $\phi(l_i)$ составлено из некоторых гамма-множителей; во-вторых, $k_{\lambda|N}^{a,b}$; в-третьих, множитель $V(\tilde{l})$ (заметим, что он входит в числитель в квадрате, а в знаменатель — в первой степени, так что в результате сокращения остается только $V(\tilde{l})$). Правая часть имеет аналогичную структуру.

Первое произведение мы можем переписать в терминах $\{m_j\}$ благодаря (37). Далее, такой же прием можно применить к $k_{\lambda|N}^{a,b}$. В самом деле, из определения многомерных многочленов Якоби следует, что

$$k_{\lambda|N}^{a,b} = \prod_{i=1}^N k_{\lambda_i + N - i}^{a,b},$$

где $k_l^{a,b}$ обозначает старший коэффициент классического многочлена Якоби. Далее, согласно [8, т. 2, 10.8(5)],

$$k_l^{a,b} = 2^{-l} \binom{2l + a + b}{l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда видно, что

$$k_{\lambda|N}^{a,b} \sim (k_{\mu|K}^{b,a})^{-1}.$$

Несколько сложнее обстоит дело с множителем $V(\tilde{l})$. Можно показать, что его можно переписать как произведение аналогичного множителя $V(\tilde{m})$ на некоторое мультипликативное выражение (соответствующее рассуждение приведено в доказательстве предложения 5.7 из [3]; см. также [2]). Однако есть более простой способ.

А именно, вернемся к исходному определению z -меры, данному в (9). Учитывая, что в рассматриваемой ситуации $z = K$ и $z' = K + s$, его можно представить в виде

$$M_N(\lambda) \sim \frac{(f_{K|N}, \mathcal{P}_{\lambda}^{a,b})(\mathcal{P}_{\lambda}^{a,b}, f_{K+s|N})}{\|\mathcal{P}_{\lambda}^{a,b}\|^2}.$$

Функция $f_{K|N} = f_{z|N}|_{z=K}$ имеет специальный вид:

$$f_{K|N}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K (x_i + y_j) \Big|_{y_1 = \dots = y_K = 1}.$$

Отсюда и из дуального тождества Коши следует равенство

$$(f_{K|N}, \mathcal{P}_\lambda^{a,b}) = \|\mathcal{P}_\lambda^{a,b}\|^2 \mathcal{P}_\mu^{b,a}(1^K).$$

Таким образом,

$$\frac{k_{\lambda|N}^{a,b} M_N(\lambda)}{P_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)} \sim \frac{k_{\lambda|N}^{a,b} \mathcal{P}_\mu^{b,a}(1^K) (f_{K+s|N}, \mathcal{P}_\lambda^{a,b})}{P_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)} \sim \frac{k_{\lambda|N}^{a,b} P_\mu^{b,a}(1^K) (f_{K+s|N}, P_\lambda^{a,b})}{P_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)}, \quad (38)$$

где последний переход оправдан тем, что $k_{\mu|K}^{b,a} k_{\lambda|N}^{a,b} \sim 1$.

Получившееся выражение удобнее, нежели (36), поскольку $P_\mu^{b,a}(1^K)$ вносит множитель $V(\tilde{m})$ — ровно тот, что фигурирует и в правой части, тогда как множитель $V(\tilde{l})$, входящий в $(f_{K+s|N}, P_\lambda^{a,b})$ и в $P_{\lambda|N}^{a,b}(1^N)$, благополучно сокращается.

Теперь мы можем обработать (38) с помощью (37) и после несложного вычисления убедиться, что получается тот же результат, что в (31).

Это завершает доказательство теоремы 4.1 для вырожденного случая, а тем самым (в силу редукции, проведенной в §4), и в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [2] A. Borodin, *Duality of orthogonal polynomials on a finite set*, J. Statist. Phys., **109**:5–6 (2002), 1109–1120.
- [3] A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*, Ann. of Math., **161**:3 (2005), 1319–1422.
- [4] A. Borodin, G. Olshanski, *Representation theory and random point processes*, in: European Congress of Mathematics (Stockholm, Sweden, June 27–July 2, 2004), Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, 73–94.
- [5] A. Borodin, G. Olshanski, *Random partitions and the gamma kernel*, Adv. Math., **194** (2005), 141–202; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0305043>.
- [6] A. Borodin, G. Olshanski, *The boundary of the Gelfand–Tsetlin graph: A new approach*, Adv. Math., **230**:4–6 (2012), 1738–1779; <http://arxiv.org/abs/1109.1412>.
- [7] A. Borodin, G. Olshanski, *The Young bouquet and its boundary*, Moscow Math. J. (to appear); <http://arxiv.org/abs/1110.4458>.
- [8] A. Erdelyi et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. 1–2, Mc Graw-Hill Book Company, New York–Toronto–London, 1953.
- [9] P. J. Forrester, S. O. Warnaar, *The importance of the Selberg integral*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.), **45**:4 (2008), 489–534.
- [10] R. Godement, *A theory of spherical functions I*, Trans. Amer. Math. Soc., **73**:3 (1952), 496–556.
- [11] K. W. J. Kadell, *The Selberg–Jack symmetric functions*, Adv. Math., **130**:1 (1997), 33–102.
- [12] S. Kerov, *The boundary of Young lattice and random Young tableaux*, in: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (New Brunswick, NJ, 1994), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 133–158.
- [13] С. В. Керов, *Многомерное гипергеометрическое распределение и характеры унитарной группы*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **301** (2003), 35–91.

- [14] S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski, *The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities*, Internat. Math. Res. Notices, **1998**:4 (1998), 173–199; <http://arxiv.org/abs/q-alg/9703037>.
- [15] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **316**:8 (1993), 773–778.
- [16] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*, Invent. Math., **158**:3 (2004), 551–642; <http://arxiv.org/abs/math/0312270>.
- [17] W. König, *Orthogonal polynomial ensembles in probability theory*, Probab. Surv., **2** (2005), 385–447.
- [18] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sémin. Lothar. Combin., **42** (1999) Art. B42q; <http://arxiv.org/abs/math/9902004>.
- [19] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, New York, 1995.
- [20] K. Mimachi, *A duality of the Macdonald-Koornwinder polynomials and its application to integral representations*, Duke Math. J., **107**:2 (2001), 265–281.
- [21] Ю. А. Неретин, *Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона*, Матем. сб., **193**:7 (2002), 131–148; <http://arxiv.org/abs/math/0206199>.
- [22] A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity*, Internat. Math. Res. Notices, **1998**:13 (1998), 641–682.
- [23] A. Okounkov, G. Olshanski, *Limits of BC-type orthogonal polynomials as the number of variables goes to infinity*, in: Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials, Contemp. Math., vol. 417, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 281–318.
- [24] G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group*, J. Funct. Anal., **205**:2 (2003), 464–524; <http://arxiv.org/abs/math/0109193>.
- [25] Г. И. Олшанский, *Вероятностные меры на дуальных объектах к компактным симметрическим пространствам и гипергеометрические тождества*, Функц. анализ и его прил., **37**:4 (2003), 49–73.
- [26] G. Olshanski, *Laguerre and Meixner symmetric functions, and infinite-dimensional diffusion processes*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **378** (2010), 81–110; <http://arxiv.org/abs/1009.2037>.
- [27] G. Olshanski, *Laguerre and Meixner orthogonal bases in the algebra of symmetric functions*, Internat. Math. Res. Notices, **2012**:16 (2012), 3615–3679; <http://arxiv.org/abs/1103.5848>.
- [28] D. Pickrell, *Measures on infinite dimensional Grassmann manifold*, J. Funct. Anal., **70**:2 (1987), 323–356.
- [29] D. Pickrell, *Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces*, J. Funct. Anal., **90**:1 (1990), 1–26.
- [30] E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*, Math. Z., **85** (1964), 40–61.
- [31] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*, Функц. анализ и его прил., **15**:4 (1981), 15–27.

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
Независимый московский университет
НИУ Высшая школа экономики
e-mail: olsh2007@gmail.com

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: antoniosi@mail.ru

Поступило в редакцию
13.01.2012